

МЕДИЧНА І БІОЛОГІЧНА ФІЗИКА

Під загальною редакцією
члена-кореспондента АПН України,
професора О.В. Чалого

Видання 2-ге перероблене і доповнене

Допущено
Міністерством охорони здоров'я України
як підручник для студентів вищих медичних
закладів III–IV рівнів акредитації

Рекомендовано
Міністерством освіти та науки України

Київ 2004

Чалий О.В., Агапов Б.Т., Цехмістер Я.В. та ін.

Ч14 Медична і біологічна фізика: Підручник для студентів вищих медичних закладів освіти III–IV рівнів акредитації. – К.: Книга плюс, 2004. – 760 с.

Автори:

О.В. Чалий – член-кореспондент АПН України, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри медичної і біологічної фізики Національного медичного університету імені О.О. Богомольця;

Я.В. Цехмістер – доктор педагогічних наук, професор;

Б.Т. Агапов – доктор біологічних наук, доцент;

А.В. Меленевська – кандидат біологічних наук, доцент;

М.І. Мурашко – кандидат технічних наук, доцент;

Н.Ф. Радченко – кандидат хімічних наук, доцент;

Н.В. Стучинська – кандидат фізико-математичних наук, доцент.

У підручнику викладені найважливіші аспекти медичної і біологічної фізики, медичної апаратури, математичної обробки медико-біологічної інформації. Містить лабораторні і практичні роботи, приклади розв'язків основних типів задач. Структура і зміст підручника повністю адаптовані до вимог нової програми з медичної та біологічної фізики, що затверджена Міністерством охорони здоров'я України.

Книга призначється передусім для студентів вищих медичних закладів освіти III–IV рівнів акредитації, а також викладачів, науковців і всіх, хто цікавиться сучасною медичною та біологічною фізикою.

Рецензенти:

Л. А. Булавін – член-кореспондент НАН України, професор, декан фізичного факультету Київського Національного університету ім. Т. Шевченка;

В. М. Сисюв – професор кафедри молекулярної фізики Київського Національного університету ім. Т. Шевченка;

Ю.С. Сінекоп – професор, завідувач кафедри фізичної і біомедичної електроніки Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут";

М. І. Шут – член-кореспондент АПН України, професор, завідувач кафедри методики викладання фізики Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова.

Допущено Міністерством охорони здоров'я України як підручник для студентів вищих медичних навчальних закладів III і IV рівнів акредитації (лист МОЗ України № 23–01–25/216 від 24.05.2001). Рекомендовано Міністерством освіти і науки України (лист МОН України № 14/18.2–108 від 07.02.2001).

ISBN 966-7619-60-5

Чалий О.В., Цехмістер Я.В., Агапов Б.Т. та ін., 2004

ПЕРЕДМОВА

Проблеми еволюції живої і неживої природи та Всесвіту в цілому продовжують викликати підвищений інтерес і турбувати допитливий людський розум. Матеріалістичний науковий підхід (тут ми не торкаємося теології, яка, зрозуміло, теж має право на існування хоча б тому, що кількість віруючих серед населення Землі значно перевищує кількість атеїстів) до цієї великої проблеми дає змогу зазирнути всередину мікро- і макросвіту.

Справді, з одного боку, сучасні телескопи дають можливість вивчати дуже далекі ділянки Всесвіту, який нині продовжує розширюватися із зростаючою на периферії швидкістю згідно з законом Хаббла. Ці найбільш віддалені ділянки Всесвіту знаходяться від нас на відстані близько 3 млрд. світлових років, тобто $2,8 \cdot 10^{25}$ м, і рухаються зі швидкістю 90000 км/с, що складає приблизно третину від швидкості світла. Цікаво зазначити, що згідно з сучасною теорією еволюції Всесвіту швидкість розширення далеких галактик може наблизитися до швидкості світла, але інтенсивність їх випромінювання буде при цьому падати до нуля. Саме ці неймовірно далекі ділянки Всесвіту, що будуть знаходитися від нас на відстані близько 10 млрд. світлових років і для яких швидкість розширення буде наближатися до 300000 км/с, визначають границю (радіус) того Всесвіту, який ми можемо пізнати і який таким чином з погляду матеріалістичної науки є обмеженим.

З другого боку, найпотужніші прискорювачі елементарних частинок дають можливість вивчати процеси, що відбуваються в ядрі атома, тобто на відстанях менших за 10^{-15} м. Тепер ми знаємо вже навіть про внутрішню будову так званих елементарних частинок (електронів, протонів, нейтронів тощо), а саме – про кварки, а також кванти кваркового поля – глюони.

Дослідження процесів еволюції живої природи на відстанях, що є проміжними між згаданими вище найдальшими (більшими за 10^{25} м) і найменшими (меншими за 10^{-15} м), дало змогу зрозуміти походження основних складових елементів живого – клітин, що мають типові розміри порядку мікрометрів, тобто 10^{-6} м. Клітини з'явилися значною мірою завдяки утворенню клітинних

плазматичних мембран. Повинен викликати подив той факт, що саме цей процес, який пов'язаний з так званою самозбіркою ліпідних молекул у водному оточенні і про що йтиметься нижче, був абсолютно детермінованим, тобто відбувся з ймовірністю, яка дорівнювала одиниці.

Біофізика мембранних процесів (як втім і молекулярна біофізика, і біофізика складних систем) досягла значних успіхів завдяки тісному зв'язку з іншими точними природничими науками. Глибоке розуміння складних процесів у живих системах, що відбуваються на глибинному молекулярному рівні, вимагають використання як прецизійних експериментальних методів, так і сучасних теоретичних підходів. Саме поєднання якісного і кількісного рівнів розуміння медико-біологічних процесів у клітинах та в організмі в цілому є, безумовно, той напрям, по якому буде розвиватися медицина XXI століття, спираючись на досягнення медичної і біологічної фізики, біохімії, мікробіології, інженерії та інших наук.

Сучасний етап розвитку вищої медичної освіти висуває нові вимоги до змісту, методики та організації викладання багатьох дисциплін у вищому медичному закладі. Це повною мірою стосується викладання дисципліни “Медична і біологічна фізика”. Останнім часом багато досягнень медицини значною мірою пов'язані з успіхами фізики, біології, комп'ютерної техніки та інформатики, медичного приладобудування. Ця важлива обставина викликає необхідність одержання студентами вищих медичних навчальних закладів України загальних і спеціальних знань в галузі медичної і біологічної фізики.

На жаль, до написання першого видання підручника “Медична і біологічна фізика” (том 1 – К., Віпол, 1999; том 2 – К., Віпол, 2001) у вищій медичній школі не існувало україномовного підручника з медичної і біологічної фізики, в якому в досить простій і стислій формі подавалися б ті питання, що містяться в затвердженій Головним управлінням навчальних закладів МОЗ України програмі дисципліни “Медична і біологічна фізика”.

Підручник, що пропонується, має своєю метою саме ліквідувати цей недолік. Основу для нього складають лекції та лабораторний практикум, що викладалися протягом багатьох

років для студентів Київського медичного інституту – нині Національного медичного університету імені О.О. Богомольця. Саме цей підручник, який тримає в своїх руках наш шанований читач, дає можливість студентам вищих медичних навчальних закладів України опанувати складну та водночас дуже цікаву і важливу для освіти лікаря XXI століття дисципліну “Медична і біологічна фізика”.

Кожний з 9 розділів підручника “Медична і біологічна фізика” містить в собі не тільки теоретичні відомості, а й завдання лабораторного практикуму та семінарських занять, тести і завдання для контролю теоретичних знань та практичних навичок. Цим самим автори спробували об'єднати “тріаду” – теоретичний підручник, посібник з лабораторного практикуму і задачник – в одному підручнику, досить невеликому за своїм обсягом.

При створенні цього підручника були використані матеріали методичних посібників, що підготовлені викладачами кафедри медичної і біологічної фізики Національного медичного університету імені О.О. Богомольця і апробовані в свій час при викладанні дисципліни “Біологічна фізика, інформатика і медична апаратура” для студентів першого курсу. У переробленому 2-му виданні цього підручника були враховані критичні зауваження і друкарські помилки, які мали місце у 1-му виданні.

Внесок авторів в написання цього підручника розподіляється так: О.В. Чалий (передмова, розділи 1–9), Б.Т. Агапов (розділи 2, 4, 6), А.В. Меленевська (розділ 7), М.І. Мурашко (розділ 9), Н.Ф. Радченко (розділи 2, 3, 5–8), Н.В. Стучинська (розділи 1, 3, 4), Я.В. Цехмістер (розділ 1).

Автори висловлюють щире подяку всім викладачам, які в різні роки працювали на кафедрі фізики Київського медичного інституту імені академіка О.О. Богомольця. Саме вони заклали основи того лабораторного практикуму, який виконували багато поколінь студентів-медиків. Наша особлива подяка доценту, кандидату біологічних наук О.В. Говорусі, доценту, кандидату педагогічних наук А.І. Єгоренкову, доценту, кандидату технічних наук В.І. Кунцю, старшому викладачу, кандидату педагогічних наук Д.А. Макарченку, доценту, кандидату фізико-математичних

наук М.П. Малезику та асистенту П.І. Островерхову за допомогу в створенні лабораторного практикуму, який існує нині на кафедрі медичної і біологічної фізики Національного медичного університету імені О.О. Богомольця. На великий жаль, В.І. Кунця та П.І. Островерхова вже немає з нами.

Ми щиро вдячні рецензентам – члену-кореспонденту НАН України, декану фізичного факультету Київського університету імені Тараса Шевченка професору Л.А. Булавіну, завідувачу кафедри фізичної і біомедичної електроніки Національного технічного університету України „Київський політехнічний інститут” професору Ю.С. Сінекопу, професору кафедри молекулярної фізики Київського університету імені Тараса Шевченка В.М. Сисоєву, члену-кореспонденту АПН України, завідувачу кафедри методики викладання фізики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова професору М.І. Шуту за цінні поради.

Автори будуть вдячні за всі критичні зауваження і висловлюють сподівання, що підручник “Медична і біологічна фізика” буде корисним не лише для студентів вищих медичних навчальних закладів України, а й для студентів, аспірантів, викладачів інших навчальних закладів та всіх тих, хто цікавиться ідеями та досягненнями сучасної медичної і біологічної фізики.

РОЗДІЛ 1

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА МЕДИКО-БІОЛОГІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

“...В наступні роки я не міг пробачити собі той невеликий витримки, який не дозволив мені подолати математику, щоб розібратися в її великих керівних принципах. У людей, що за своїли ці принципи, на один орган почуттів більше, ніж у звичайних смертних.”

Чарльз Дарвін

У цьому розділі в дуже стислій формі зроблена спроба ознайомити студентів-медиків з деякими основними розділами вищої математики, а саме: елементами диференціального та інтегрального числень, теорії ймовірностей та математичної статистики. Підручник містить короткі теоретичні відомості, що становлять основу цих розділів, а також невеликий практикум з вищої математики (приклади з розв’язками і завдання для самостійної роботи).

Прикро, але в навчальних планах вищих медичних навчальних закладів України (за винятком фармацевтичних інститутів) досі ще не знайшлося місця для більш детального вивчення такої великої і мудрої науки, якою є вища математика. Автори вважають, що подібна ситуація не може бути нормальною, і з часом вона зміниться на кращу. Без оволодіння фундаментальними знаннями, що базуються на сучасних досягненнях природничих наук, не можна навіть мріяти про успіх реформи медичної освіти. Слова, що винесені в епіграф, ще раз підтверджують цю думку.

Список рекомендованої літератури з вищої математики, що міститься в кінці першого тому, дозволяє допитливим студентам зазирнути в чудовий світ гармонії й краси, який віддзеркалюється яскравими математичними барвами в будь-якій дисципліні, що претендує на високу назву “наука”.

1.1. ЕЛЕМЕНТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

1.1.1. ПОХІДНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 (символічно $f'(x_0)$) називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx за умови, що приріст аргументу нескінченно малий ($\Delta x \rightarrow 0$), тобто

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1.1.1)$$

Позначення похідної: $f'(x)$, y'_x , \dot{y}_x , $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$.

Якщо функція $y = f(x)$ в деякій фіксованій точці має похідну, то функція в цій точці неперервна.

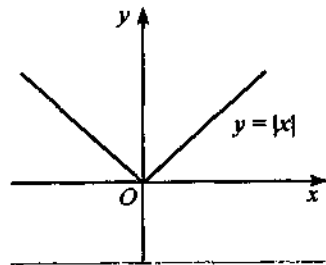


Рис. 1.1

Зауважимо, що обернене твердження не є правильним, тобто не всяка неперервна в точці x функція має похідну в цій точці. Так, наприклад, функція $y = |x|$ в точці $x = 0$ (рис. 1.1) є неперервною, однак похідної в цій точці не має.

Якщо функція $f(x)$ диференційовна у кожній точці деякого проміжку, то говорять про диференційовність функції на цьому проміжку. Якщо, крім цього, похідна $f'(x)$ неперервна, то кажуть, що функція *неперервно*

диференційовна на даному проміжку.

Процедуру знаходження похідної називають *диференціюванням* функції.

Приклад. Функція $f(x) = x^2$ має скінченну похідну при будь-якому дійсному x , яка дорівнює $2x$. Справді, для довільного x маємо:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна, то її приріст Δy можна подати у вигляді:

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x. \quad (1.1.2)$$

Добуток $\alpha(x, \Delta x)\Delta x$ є нескінченно малою вищого порядку малювання відносно Δx , оскільки

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(x, \Delta x) = 0.$$

Таким чином, приріст диференційовної функції складається з двох частин (доданків), перша з яких прямує до нуля "повільніше" ніж друга і є лінійною відносно Δx . Ця частина приросту дістала назву головної.

Головна частина приросту функції Δy , що рівна добутку похідної y' на приріст аргументу Δx , називається *диференціалом* функції і позначається dy :

$$dy = y'\Delta x.$$

Якщо $y = x$, то $dy = dx = x'\Delta x$, але $x' = 1$. Звідси

$$dx = \Delta x,$$

тобто диференціал незалежної змінної дорівнює її приросту. Остаточного масмо: *диференціал функції* дорівнює добутку похідної функції на диференціал незалежної змінної

$$dy = y' dx. \quad (1.1.3)$$

Із (1.1.3) маємо $y' = \frac{dy}{dx}$, тобто похідна функції дорівнює відношенню диференціала цієї функції до диференціала аргументу.

Із рівності (1.1.2) випливає, що при малих Δx справедлива наближена рівність

$$\Delta y \approx dy, \quad (1.1.4)$$

або

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) dx. \quad (1.1.5)$$

Ці рівності використовуються при наближених обчисленнях і в теорії похибок; вони дозволяють звести обчислення приросту функції до обчислення похідної (диференціала), що, зазвичай, є більш простою задачею.

Геометричне тлумачення похідної і диференціала. Геометричне тлумачення похідної тісно пов'язане з поняттям дотичної. *Дотичною* до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M(x_0, y_0)$ називають граничне положення січної MN (рис. 1.2) при необмеженому наближенні точки N до точки M . Нескладно побачити з рис. 1.2, що кутівий коефіцієнт січної дорівнює: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Якщо ж точка N прямує до M , то січна MN займе граничне положення, для якого $\alpha \rightarrow \varphi$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Таким чином, значення похідної $y' = f'(x_0)$ у точці x_0 визначає кутівий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M(x_0, y_0)$, тобто

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{або} \quad y'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi.$$

У цьому і полягає геометричне тлумачення похідної. Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у даній точці $M(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Тангенс кута нахилу дотичної ($y' = \operatorname{tg} \varphi$) є дуже важливою і зручною характеристикою поведінки функції в точці: якщо він додатний (кут φ гострий), то функція, очевидно, зростає в околі досліджуваної точки; якщо ж $\operatorname{tg} \varphi < 0$ (кут φ тупий), то спадає; за модулем $|\operatorname{tg} \varphi| = |y'|$ можна судити про швидкість зростання (спадання) функції. Надалі ми ще повернемося до цього питання і дослідимо його більш детально. Тут можемо лише стверджувати, що характер похідної повністю визначається характером вихідної функції $y = f(x)$.

Як видно з рис. 1.2, $AB = \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta x$, оскільки $\operatorname{tg} \varphi = y'(x_0)$, а $\Delta x = dx > 0$, $AB = dy$, тобто диференціал dy дорівнює приросту ординати дотичної, проведеної в точці M до графіка даної функції $y = f(x)$.

Фізичне тлумачення похідної і диференціала. У кожній точці, де функція $y = f(x)$ диференційовна, похідна $y' = f'(x_0)$ є швидкістю зміни функції у цій точці відносно аргументу x . Заміна приросту функції її диференціалом дозволяє вважати процес зміни функції лінійним відносно достатньо малих змін аргументу.

Приклади. 1. Якщо $s(t)$ – закон руху матеріальної точки, то згідно з означенням миттєва швидкість на даний момент часу $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Таким чином, миттєва швидкість: $v = \frac{ds}{dt} = s'$.

Диференціал $ds = v dt$ визначає шлях, який пройшла б матеріальна точка за час $\Delta t = dt$, рухаючись рівномірно.

2. Аналогічно, якщо $q = q(t)$ – закон, що визначає залежність величини заряду, який протікає через поперечний переріз провідника, від часу t , то похідна $I = q' = \frac{dq}{dt}$ визначає силу

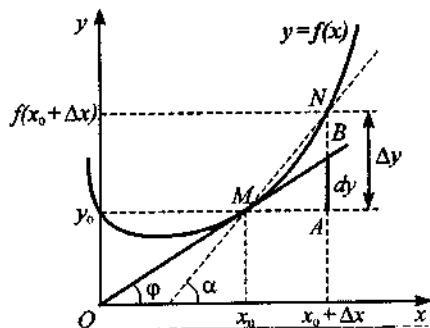


Рис. 1.2

струму в момент часу t . Диференціал $dq = Idt$ визначає кількість заряду, який пройшов би за проміжок часу dt при силі постійного струму I через поперечний переріз провідника.

3. Якщо $p(t)$ визначає розмір популяції бактерій в момент часу t , то $\frac{dp}{dt} = p'$ – швидкість зростання популяції, а $dp = p' dt$ – зміну чисельності популяції за достатньо малим проміжком часу dt .

1.1.2. ОСНОВНІ ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Припустимо, що $u = f(x)$ і $v = \varphi(x)$ – диференційовні функції незалежної змінної x ; c – деяка константа, тоді справедливими є такі твердження.

1. Похідна сталої $y = c$ дорівнює нулю:

$$c' = 0.$$

2. Похідна суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

3. Постійний множник можна винести за знак похідної:

$$(cu)' = c u'.$$

4. Похідна добутку функцій визначається за формулою:

$$(u v)' = u' v + u v'.$$

5. Похідна частки

$$\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{v' u - u' v}{u^2} \quad \text{за умови, що } u \neq 0.$$

Правила обчислення диференціала такі ж, як і правила обчислення похідних (звідси термін диференціювання). Щоб отримати диференціал функції потрібно похідну помножити на диференціал незалежної змінної.

1.1.3. ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Обчислення похідної, а, отже, і диференціала безпосередньо за означенням досить громіздке. Наведемо ряд результатів, які дозволяють значно спростити процедуру диференціювання.

$$1. (x^n)' = n x^{n-1}.$$

$$2. (\sin x)' = \cos x.$$

$$3. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$4. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

5. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

6. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. $(\operatorname{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

8. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

9. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

10. $(a^x)' = a^x \ln a$.

11. $(e^x)' = e^x$.

12. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

13. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$ ($x > 0, a > 0$).

1.1.4. ПРАВИЛО ДИФЕРЕНЦЮВАННЯ СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ

Якщо $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, тобто $y = f[\varphi(x)]$ – складена функція, і функції $y(u)$ та $u(x)$ – диференційовні, то складена функція $y = f[\varphi(x)]$ також диференційовна, причому

$$y'(x) = y'(u)u'(x), \quad (1.1.6)$$

або в інших позначеннях

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Доведення. Функція $y = f(u)$ має похідну в точці u , тоді згідно з (1.1.2)

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha(u, \Delta u) \cdot \Delta u.$$

Функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці x , тоді

$$\Delta u = u'_x \Delta x + \beta(x, \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Маємо

$$\Delta y = y'_u \cdot u'_x \Delta x + y'_u \beta \Delta x + u'_x \alpha \Delta x + \alpha \beta \Delta x.$$

Поділимо обидві частини останньої рівності на Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x + y'_u \cdot \beta + u'_x \cdot \alpha + \alpha \beta.$$

Перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$ і отримаємо

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Це правило поширюється на ланцюжок із будь-якого числа диференційовних функцій. Наприклад, якщо $y = \sin^2 x^3$, то

$$y' = 2 \sin x^3 (\sin x^3)' = 2 \sin x^3 \cos x^3 (x^3)' = 3x^2 2 \sin x^3 \cos x^3 = 3x^2 \sin 2x^3.$$

Інваріантність (незмінність) форми диференціала. Формула для обчислення диференціала функції $y = f(u)$ не залежить від того, чи буде u незалежною змінною, чи функцією від незалежної змінної.

Нехай $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, тобто $y = f[\varphi(x)]$, і обидві ці функції диференційовні. Тоді

$$dy = f'_u du,$$

якщо u незалежна змінна. Якщо ж незалежна змінна x , то $dy = y'_x \cdot dx$. Враховуючи, що $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, маємо

$$dy = y'_u \cdot u'_x \cdot dx = y'_u \cdot du = f'_u du.$$

Цю властивість називають *інваріантністю форми диференціала* функції однієї змінної.

1.1.5. ПОХІДНІ І ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩОГО ПОРЯДКУ

Похідна $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ сама може бути неперервною функцією, в такому випадку можна ввести поняття похідної другого порядку. *Похідною другого порядку* або другою похідною функції називається похідна від її похідної:

$$(f'(x))' = f''(x) = y'' = \frac{d^2 y}{dx^2},$$

тобто

$$y'' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y'(x_0 + \Delta x) - y'(x_0)}{\Delta x}.$$

Наприклад, прискорення згідно з означенням є друга похідна від шляху за часом $a(t) = s''(t)$. Якщо друга похідна (функція $f''(x)$) диференційована, то можна визначити третю похідну $f'''(x)$.

Похідну n -порядку функції $y = f(x)$ позначають через $y^{(n)}(x)$ або $\frac{d^n y}{dx^n}$ і отримують у результаті диференціювання n разів функції $y = f(x)$. При обчисленні похідних вищих порядків використовуються ті ж правила, що і при обчисленні похідної першого порядку.

Розкриття невизначеностей. Правило Лопітала. Розглянемо метод розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, який називають *правилом*

Лопітала.

Теорема. *Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних, якщо ці похідні існують, тобто*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Приклад 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$

Іноколи правило Лопітала доводиться застосовувати декілька разів.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{1} = 0.$

Такі типи невизначеностей, як

$$0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty, \infty - \infty,$$

за допомогою тотожних перетворень можна звести до типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x)$.

Тут ми маємо невизначеність типу $0 \cdot \infty$. Запишемо цей вираз у вигляді $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.

Дістали невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Скориставшись правилом Лопітала, маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

1.1.6. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ НА МОНОТОННІСТЬ. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЙ

У цьому параграфі буде показано, як за допомогою похідних можна виявити основні особливості поведінки функції: знайти проміжки монотонності та точки екстремуму. При геометричному тлумаченні змісту похідної ми помітили, що на проміжку зростання функції кутковий коефіцієнт дотичної, а, отже, і похідна функції будуть додатними, а на проміжку спадання – від'ємними. Прості й наочні міркування, які привели до такого висновку, справедливі й у загальному випадку. Сформулюємо їх у вигляді ознак.

Достатня ознака монотонності. Розглянемо функцію $y = f(x)$, неперервну і диференційовану на деякому відрізку $a \leq x \leq b$. Якщо при цьому в кожній точці деякого проміжку з указаного інтервалу виконується нерівність:

$$y' > 0,$$

то на цьому проміжку функція є зростаючою.

Якщо ж

$$y' < 0$$

на деякому проміжку, то на цьому проміжку функція є спадною.

Максимуми та мінімуми функцій. Кажуть, що функція $f(x)$ має у точці x_0 максимум (мінімум), якщо існує такий окіл цієї точки $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, що для кожного x із цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Інакше кажучи, функція $f(x)$ має в точці x_0 максимум (мінімум), якщо для досить малого приросту Δx (будь-якого знаку) виконується нерівність: $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ ($f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$).

Максимуми або мінімуми функції називаються її *екстремумами*.

Необхідна умова існування екстремуму. Якщо диференційовна в деякому інтервалі $(a; b)$ функція має в точці $x_0 \in (a; b)$ екстремум, то її похідна в цій точці дорівнює нулю: $f'(x_0) = 0$.

Внутрішні точки області визначення функції, в яких похідна або існує і дорівнює 0, або не існує, називають *критичними*. Рівність похідної нулю є необхідною, але не достатньою умовою екстремуму. Наприклад, для функції $y = x^3$ похідна $y' = 3x^2$ перетворюється в нуль при $x = 0$. Але при $x = 0$ функція $y = x^3$ екстремуму не має.

Достатня умова існування екстремуму. Якщо похідна функції $f'(x)$ перетворюється в нуль в точці x_0 і при переході через цю точку в напрямі зростання x змінює знак “+” (“-”) на “-” (“+”), то в точці x_0 ця функція має максимум (мінімум). Якщо ж перша похідна функції при переході через точку x_0 не змінює знаку, то в цій точці функція $f(x)$ екстремуму не має.

Друга достатня умова існування екстремуму. Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 та її околі неперервні першу та другу похідні, причому $f'(x_0) = 0$,

$f''(x_0) \neq 0$, то функція має в точці x_0 мінімум (максимум), якщо $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$).

Максимальне та мінімальне значення функції на відрізку. Спочатку зауважимо, що не слід плутати максимум (мінімум) з найбільшим (найменшим) значенням функції на проміжку. Згідно з означенням максимум (мінімум) – це така точка, в якій функція набуває найбільшого (найменшого) значення порівняно зі значеннями функції в досить близьких до екстремальної точках. Функція може мати декілька максимумів і мінімумів, проте найбільше значення, якщо воно існує, – єдине. Це саме стосується і найменшого значення. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найменшого і найбільшого значень, для визначення яких необхідно знайти всі критичні точки функції, що належать цьому відрізку, а також додати до них значення на кінці відрізка ($x = a$; $x = b$), знайти значення функції у всіх цих точках; вибрати з них найбільше та найменше.

Якщо $f(x)$ має на відрізку $[a; b]$ скінченну кількість точок розриву, то потрібно також дослідити поведінку функції в околі кожної точки розриву. У випадку відкритого проміжку досліджують також поведінку функції в односторонніх околах кінців проміжку.

1.1.7. ОПУКЛІСТЬ ТА УГНУТІСТЬ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ. ТОЧКИ ПЕРЕГІНУ

Говорять, що графік диференційовної функції $y = f(x)$ опуклий (угнутий) на інтервалі $(a; b)$, якщо при будь-яких значеннях x з цього інтервалу дуга кривої розміщена нижче (вище) дотичної, проведеної в будь-якій точці інтервалу (рис. 1.3: a – опуклий, b – угнутий).

Достатньою умовою того, що графік визначеної і двічі диференційовної функції опуклий, є виконання на відповідному інтервалі нерівності:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) < 0,$$

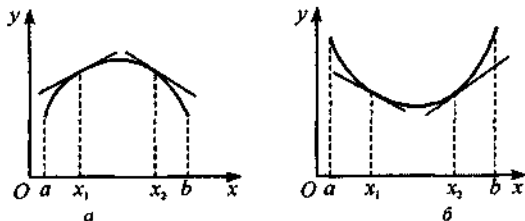


Рис. 1.3

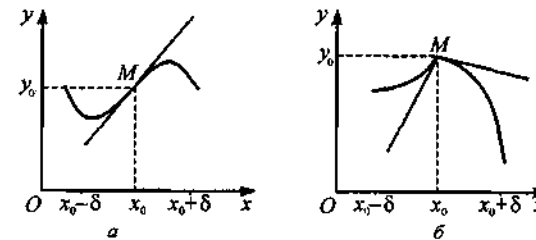


Рис. 1.4

якщо ж

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) > 0,$$

то графік функції *угнутий*.

Точки кривої, які відокремлюють угнуту її частину від опуклої і при цьому існують дотичні до графіка у цих точках, називаються *точками перегину*. Так, на рис. 1.4, a точка $M(x_0, y_0)$ є точкою перегину, а на рис. 1.4, b не є точкою перегину. У точках перегину друга похідна або не існує, або дорівнює нулю:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 0.$$

Це є *необхідна умова перегину*. *Достатньою умовою* того, щоб деяка точка була точкою перегину, є зміна знаку другої похідної при переході через таку точку. Точки, в яких друга похідна дорівнює нулю, називають *критичними точками другого роду*. Таким чином, щоб знайти точки перегину, потрібно:

- 1) знайти область визначення функції;
- 2) визначити другу похідну;
- 3) знайти критичні точки другого роду з умови $f''(x) = 0$;
- 4) розбити область визначення на інтервали, межами яких є критичні точки другого роду;
- 5) визначити знак $f''(x)$ в цих інтервалах.

Якщо при переході з одного інтервалу в інший, знак $f''(x)$ змінюється, то критична точка є точкою перегину.

1.1.8. АСИМПТОТИ КРИВОЇ

Кривою з нескінченною гілкою називають криву, що описується графіком функції $y = f(x)$, для якого виконується одна з умов:

- 1) область визначення функції не обмежена (наприклад, $y = \sin x$);
- 2) область значень функції не обмежена (наприклад, $y = \operatorname{tg} x$);

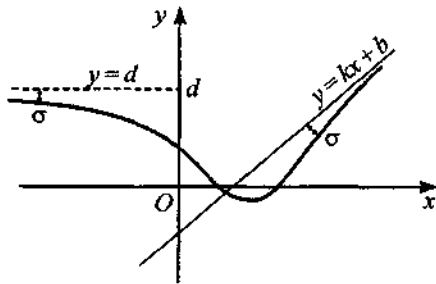


Рис. 1.5

3) область визначення і область значень функції не обмежені (наприклад, $y = x^2$).

Асимптотою кривої з нескінченною гілкою називається така пряма $y = kx + b$, для якої границя відстані σ від точок на кривій до прямої при прямуванні змінної до деякого числа c або до нескінченності дорівнює нулю (рис. 1.5), тобто

$$\lim_{x \rightarrow \infty(c)} \sigma = 0$$

або

$$\lim_{x \rightarrow \infty(c)} (f(x) - kx - b) = 0. \quad (1.1.7)$$

Рівняння (1.1.7) можна розглядати як рівняння асимптоти.

Криві з нескінченною гілкою можуть мати три види асимптот: горизонтальні ($k = 0$), похилі ($k \neq 0$) та вертикальні. Для існування вертикальної асимптоти необхідно і достатньо, щоб границя функції $y = f(x)$ при x , що прямує до скінченного числа, дорівнювала нескінченності:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty.$$

Для знаходження k і b у випадку похилої асимптоти рівність (1.1.7) запишемо у вигляді

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

Звідси

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (1.1.8)$$

Знаючи k , з рівності (1.1.8) знайдемо b :

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx].$$

Якщо k або b нескінченні, то похилих асимптот немає. Якщо $k = 0$, то $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, – асимптота горизонтальна.

1.1.9. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ І ПОБУДОВА ГРАФІКІВ

Повне дослідження функції проводять за схемою:

- 1) знаходять область визначення, точки розриву, множину значень функції;
- 2) визначають асимптоти графіка;
- 3) досліджують функцію на парність, періодичність;
- 4) досліджують функцію на монотонність і знаходять її екстремуми;
- 5) визначають інтервали опуклості і угнутості графіка, точки перегину;
- 6) знаходять точки перетину з осями координат;
- 7) будують графік.

Приклади. 1. Побудуємо графік функції $y = e^{-x^2}$.

- 1) Ця функція визначена, неперервна і додатна на всій числовій осі.
- 2) Оскільки множина значень функції обмежена, то вона може мати лише горизонтальну асимптоту. Перевіримо це. Згідно з (1.1.8)

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = 0.$$

Підставивши k в рівняння асимптоти (1.1.7), дістанемо $\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{-x^2} - b] = 0$, а отже і $b = 0$. Таким чином, горизонтальною асимптотою при $x \rightarrow \infty$ є вісь Ox .

3) Функція парна: $y(-x) = y(x)$. При $x \rightarrow \pm\infty$, $y \rightarrow 0$, а це означає, що пряма $y = 0$ є горизонтальною асимптотою, як при $x \rightarrow \infty$, так і при $x \rightarrow -\infty$.

4) Похідна $y' = -2x e^{-x^2}$ дорівнює нулю лише при $x_0 = 0$. Причому, при $x > 0$ похідна $y' < 0$, а значить, функція спадає, а при $x < 0$ похідна додатна, $y' > 0$, досліджувана функція зростає. Ордината функції дорівнює 1. Отже, точка з координатами $(0; 1)$ є точкою максимуму.

5) Друга похідна $y'' = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$ дорівнює нулю при $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ і $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Результати зручно подати у вигляді таблиці.

Значення x	$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$x > \frac{1}{\sqrt{2}}$
Значення $f'(x)$	Додатні	0	Від'ємні	0	Додатні
Опуклість точки перегину $f(x)$	Угнута	$y_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}$ – точка перегину	Опукла	$y_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}$ – точка перегину	Угнута

Графік цієї функції подано на рис. 1.6, а. Це так звана *крива Гаусса*.

2. Побудуємо графік функції $z = y' = -2xe^{-x^2}$. Ця функція непарна, визначена і неперервна на всій числовій осі. Вісь абсцис є горизонтальною асимптотою: $y \rightarrow 0$ як при $x \rightarrow +\infty$, так і при $x \rightarrow -\infty$, оскільки $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-2xe^{-x^2}) = 0$. Враховуючи, що $z' = y''(x)$, і проаналізувавши

результати таблиці, бачимо, що $z(x)$ має максимум при $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ і мінімум при $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ординати цих точок відповідно дорівнюють $z_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{e^2}$ і $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{e^2}$. Для виявлення

точок перегину знайдемо $z'' = y'''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$. Ця функція перетворюється в нуль лише при $x_0 = 0$. Причому при $x < 0$ похідна $y'''(x) > 0$ і функція направлена вилуклісто вгору, а при $x > 0$, $y'''(x) < 0$, - вилуклісто вниз. Точка $(0; 0)$ є точкою перегину. Графік функції $z = y' = -2xe^{-x^2}$ представлений на рис. 1.6, б.

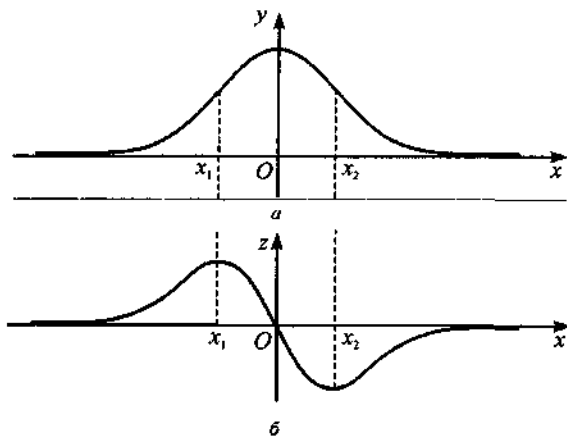


Рис. 1.6

У медицині широко використовуються методики, які базуються на дослідженні залежностей $y(x)$ та $y'(x)$, де y - деякий фізіологічний параметр, x - незалежна змінна.

3. Якщо на речовину діяти одночасно магнітним полем, індукція якого B , і електромагнітним полем, то можна спостерігати явище магнітного резонансу. При цьому має місце селективне поглинання речовиною енергії електромагнітних хвиль W_{em} певної частоти ν . Якщо речовина містить парамагнітні частинки (часто їх вводять спеціально), то магнітний резонанс у ній називають електронним парамагнітним резонансом (ЕПР). ЕПР широко використовується у медико-біологічних дослідженнях з діагностичною метою, у санітарно-гігієнічних шлях, у генній інженерії.

Залежність поглинутої речовиною енергії електромагнітного поля від індукції магнітного поля наведено на рис. 1.7, а. Більш інформативним є дослідження функції $W(B)$, а її похідної dW/dB (рис. 1.7, б), сучасні ЕПР-спектрометри реєструють саме цю криву.

Аналіз графіків, поданих на рис. 1.7, дозволяє виявити особливості, характерні для графіка функції (а) та її похідної (б): відповідність між точками перегину для залежності $y(x)$ та точками екстремуму $y'(x)$; точками екстремуму для $y(x)$ та перетину з віссю Ox на $y'(x)$.

Наведені графіки дають можливість побачити ті характерні особливості, які спостерігаються при порівнянні графіка функції та її похідної.

4. Реографія - ще одна діагностична методика, що має широке використання. В її основі лежить лінійна залежність між змінами об'єму ділянки біологічної тканини ΔV та змінами її електричного опору: $\Delta V \sim \Delta R$. Сучасні реографи дозволяють отримувати як об'ємну реограму, так і диференціальну. На рис. 1.8 представлено графіки реоєсфорограми: а - об'ємної і б - диференціальної.

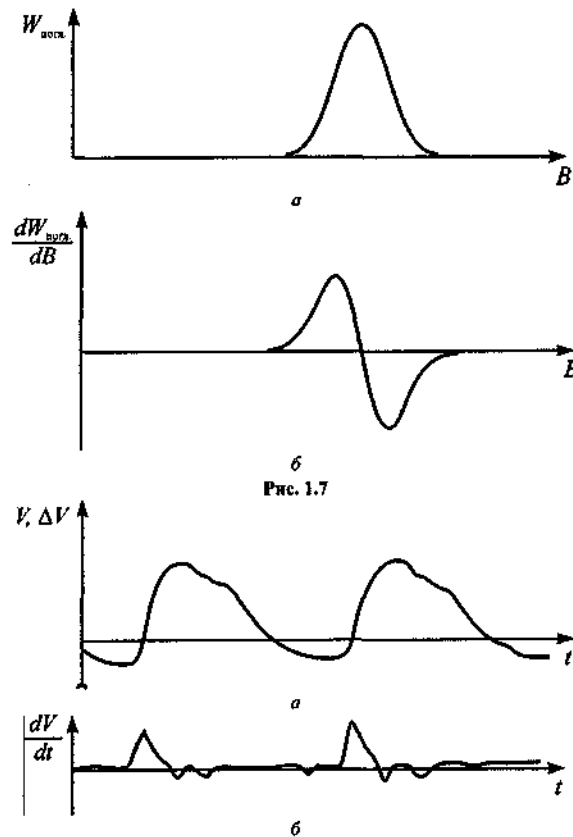


Рис. 1.7

Рис. 1.8

Як видно із цих графіків, точкам екстремуму на об'ємній реоенфрограмі відповідають точки перетину з віссю часу на диференціальній реоенфрограмі, аналогічно точкам перетину відповідають точки екстремуму на диференціальній реоенфрограмі.

1.1.10. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Знайти похідну функції $y = \sqrt{x}$.

Розв'язання. Запишемо функцію у вигляді $y = x^{\frac{1}{2}}$ і використаємо правило знаходження похідної степеневі функції

$$y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. Знайти похідну функції $y = (x^2 - 2x + 3)^5$.

Розв'язання. Вважаючи $y = u^5$, де $u = x^2 - 2x + 3$, а $u' = 2(x - 1)$, відповідно з правилом диференціювання складеної функції (1.1.6) будемо мати

$$y' = 5u^4 u' = 10(x^2 - 2x + 3)^4 (x - 1).$$

3. Знайти похідну функції $y = \sin^3 4x$.

Розв'язання. Позначивши $y = u^3$, $u = \sin v$, $v = 4x$, і, враховуючи, що $y' = 3u^2 u'$, а $u' = (\sin v)' v'$, де $v' = 4$, знаходимо $y' = 12 \sin^2 4x \cos 4x$.

Примітка: маючи достатні навички, проміжні змінні u та v не записують, вводячи їх лише в уяві (подумки).

4. Розчинення лікарської речовини з таблетки описується рівнянням $m = m_0 e^{-rt}$, де m_0 – початкова маса таблетки; m – нерозчинена маса в момент часу t ; r – стала розчинення. Записати рівняння для швидкості розчинення.

Розв'язання. Оскільки похідна дорівнює швидкості зміни функції, то швидкість розчинення: $m' = -rm_0 e^{-rt} = -rm$.

Отже, швидкість розчинення пропорційна масі таблетки, яка залишилася.

5. Знайти похідну першого, другого та третього порядку від функції $f(x) = e^x \sin x$.

Розв'язання.

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x);$$

$$f''(x) = [e^x (\sin x + \cos x)]' = e^x (\sin x + \cos x) + (\cos x - \sin x) e^x = 2e^x \cos x;$$

$$f'''(x) = (2e^x \cos x)' = 2(e^x \cos x - e^x \sin x) = 2e^x (\cos x - \sin x).$$

6. Знайти диференціал функції $y = \ln x^2$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції $y' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$. Скориставшись

формулою $dy = y' dx$, отримуємо $dy = \frac{2dx}{x}$.

7. Чисельність популяції бактерій з часом t змінюється за законом

$$N = N_0 + \frac{N_0 t}{c + t^2},$$

де N_0 – початкова кількість бактерій в популяції; c – деяка константа. Знайти максимальний розмір популяції, якщо $N_0 = 10^3$; $c = 400$.

Розв'язання. Обчислимо похідну

$$N' = N_0 \frac{c + t^2 - 2t^2}{(c + t^2)^2} = N_0 \frac{c - t^2}{(c + t^2)^2}.$$

З умови $c - t^2 = 0$ ($N' = 0$) знайдемо критичні точки. Змісту задачі відповідає лише точка $t = \sqrt{c}$, у ній функція має максимум, оскільки при $t < \sqrt{c}$ (наприклад, при $t = 0$) $N' > 0$, – функція зростаюча, а при $t > \sqrt{c}$ $N' < 0$, – функція спадає. Максимальна чисельність популяції $N = N_0 + \frac{N_0 \sqrt{c}}{2c} = 1025$.

8. Вміст глюкози в крові хворого при вливанні краплями визначається рівнянням: $c(t) = a - b e^{-t}$, де a і b – константи; t – час. Побудувати графік $c(t)$, знайти рівноважний вміст глюкози.

Розв'язання. Функція визначена і неперервна на всій числовій прямій, однак, фізичний зміст вона має лише при $t > 0$. Проведемо дослідження у цій області. Якщо $t = 0$, то $c(0) = a - b$. Пряма $c = a$ є горизонтальною асимптотою, оскільки при $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} b e^{-t} = a$. Похідна $c'(t) = b e^{-t}$ не

може бути рівною нулю і при всіх можливих значеннях $t \in$ додатною $c'(t) > 0$, тобто досліджувана функція монотонно зростає у всій області визначення. Для всіх $t \in (0; \infty)$ – функція додатна.

Друга похідна $c''(t) = -be^{-t}$ є від'ємною для всіх значень t і прямує до нуля, лише якщо $t \rightarrow \infty$. Отже, досліджувана функція направлена випуклістю вгору і не має точок перегину. Графік її подано на рис. 1.9. Рівноважний вміст глюкози дорівнює a і досягається при $t \rightarrow \infty$.

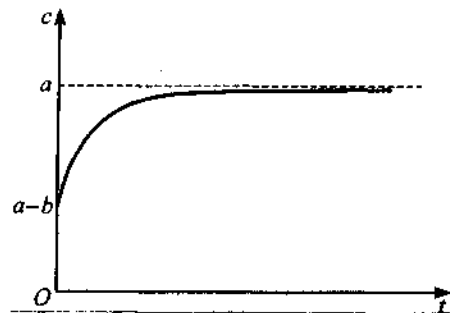


Рис. 1.9

9. Дослідити на екстремум функцію, яка описує зміну маси лікарського препарату в крові пацієнта при пероральному та внутрішньом'язовому введенні:

$$m(t) = \frac{M_0 r}{r-k} (e^{-kt} - e^{-rt}),$$

де M_0 – початкова маса препарату в депо; k – постійна елімінації; r – деяка константа, яка характеризує швидкість усмоктування.

Розв'язання. Похідна $m'(t) = -\frac{M_0 r}{r-k} (k e^{-kt} - r e^{-rt})$ перетворюється в нуль, якщо $k e^{-kt} - r e^{-rt} = 0$. Злогарифмувавши цей вираз, бачимо, що критичною точкою є $t = \frac{\ln \frac{k}{r}}{k-r}$. Перевіряючи зміну знаку похідної, враховуємо, що $k > r$. Надаючи k та r будь-яких додатних значень, переконуємось, що в даній точці функція має максимум.

10. Дослідити на екстремум функцію $y = x^3 - 3x + 3$. Знайти точки перегину. Побудувати графік $y(x)$ та $y'(x)$.

Розв'язання. Обчислимо похідну функції $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Розв'язавши рівняння $3(x^2 - 1) = 0$, знайдемо критичні точки $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$. Ці точки розбивають числову вісь $-\infty < x < +\infty$ на три інтервали. Оскільки досліджувана функція неперервна, то в кожному з інтервалів $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$ похідна має постійний знак. Щоб з'ясувати знак похідної в певному інтервалі, досить знати знак у будь-якій точці цього інтервалу. Наприклад, прийнявши $x = -2$, отримуємо $y' = 9 > 0$, а це зна-

чить, що в інтервалі $(-\infty; -1)$ $y' > 0$ – функція зростає. Аналогічно в інтервалі $(-1; 1)$ $y' < 0$ – функція спадає; в інтервалі $(1; +\infty)$ $y' > 0$ – зростає. Отже, точка $A(-1; 5)$ є точкою максимуму, а точка $B(1; 1)$ – точка мінімуму (рис. 1.10, а).

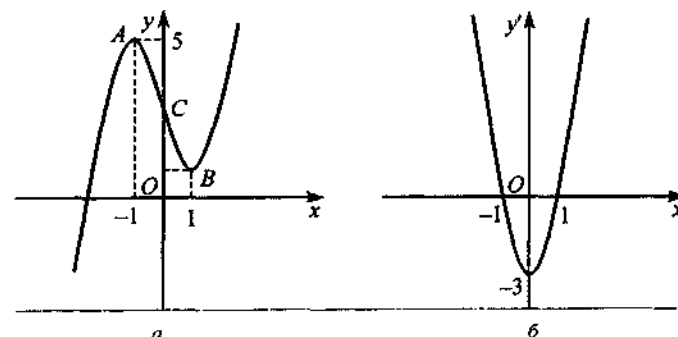


Рис. 1.10

Знайдемо другу похідну функції $y'' = 6x$ і прирівняємо її до нуля. Рівняння має один розв'язок $x = 0$. Підставивши в другу похідну значення з інтервалу $(-\infty; 0)$, бачимо, що в цьому проміжку $y'' < 0$. Аналогічно встановимо, що в інтервалі $(0; \infty)$ $y'' > 0$. Тобто точка $C(0; 3)$ є точкою перегину. Крива $y = x^3 - 3x + 3$ опукла в інтервалі $(-\infty; 0)$ і вгнута в інтервалі $(0; +\infty)$ (рис. 1.10, б).

Побудуємо графік функції $y' = f'(x)$. Застосувавши ту ж саму методику дослідження, бачимо, що $y' = 3(x^2 - 1)$ матиме екстремум при тому ж значенні незалежної змінної x , при якому графік функції $y = x^3 - 3x + 3$ має перегили. Точка з координатами $(0; -3)$ є точкою мінімуму, тому що y'' змінює знак з “-” на “+”. Точкам екстремуму на графіку $y = f(x)$ відповідають точки перетину з віссю Ox на графіку $y' = f'(x)$. Крива $y' = 3(x^2 - 1)$ не має точок перегину, бо її друга похідна є величиною стала, $(y')'' = 6$. Графік подано на рис. 1.10, б.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти похідні функцій.

1. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$.

3. $y = ax^2 + bx + c$.

5. $y = \frac{-5x^3}{a}$.

7. $y = \frac{\pi}{x} + \ln x$.

9. $y = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$.

11. $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$.

13. $y = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$.

15. $y = 5 \sin x + 3 \cos x$.

17. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

19. $y = \arctg x + \operatorname{arctg} x$.

21. $y = x \arcsin x$.

23. $y = x^7 e^x$.

25. $y = \frac{e^x}{x^2}$.

27. $f(x) = e^x \cos x$.

29. $y = e^x \arcsin x$.

31. $y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$.

33. $y = \ln x \lg x - \ln a \log_a x$.

35. $y = \sqrt{1-x^2}$.

37. $y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}}$.

39. $y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + \frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x$.

2. $y = \frac{1}{4} - \frac{x}{3} + x^2 - 0,5x^4$.

4. $y = \frac{x+2}{x}$.

6. $y = \frac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

8. $y = \frac{a+bx}{c+bx}$.

10. $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x^5} - \frac{1}{x^3}$.

12. $y = \sqrt{x}(x-1)$.

14. $y = \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}$.

16. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$.

18. $y = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$.

20. $y = x \operatorname{ctg} x$.

22. $y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$.

24. $y = (x-1)e^x$.

26. $y = \frac{x^5}{e^x}$.

28. $y = (x-1)e^{x^2}$.

30. $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

32. $y = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$.

34. $y = (3+2x^2)^4$.

36. $y = \sqrt[3]{a+bx^3}$.

38. $y = (3-2 \sin x)^5$.

40. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha}$.

41. $y = 2x + 5 \cos^3 x$.

43. $f(x) = (1 - 3 \cos 2x)^2$.

45. $y = \sqrt{3 \sin x - 2 \cos x}$.

47. $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x} - \arcsin^3 x$.

49. $y = \sqrt{e^2 + x}$.

51. $y = \sin 3x + \cos \frac{x}{5} + \operatorname{tg} \sqrt{x}$.

53. $f(x) = \cos(\alpha x + \beta)$.

55. $y = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$.

57. $y = \cos 5x^2 - 4 \cos x^2$.

59. $y = \arcsin \frac{1}{x^2}$.

61. $f(t) = t \sin 2t$.

63. $y = \arccos e^x$.

65. $y = \ln(2x+7)$.

Знайти похідні другого порядку від функцій.

67. $y = x^3 + 7x^6 - 5x + 4$.

69. $y = \sin x^2$.

71. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

73. $y = \arcsin^2 x$.

Знайти диференціали функцій.

75. $y = \ln(e^x + 5 \sin x - 4 \arcsin x)$.

77. $y = \ln(\arcsin 5x)$.

79. $y = \ln \sin x + x^3$.

42. $y = e^{\sin x^2}$.

44. $y = \frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{1}{\cos x}$.

46. $y = \sqrt{1 + \arcsin x}$.

48. $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

50. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$.

52. $y = \sin(x^2 - 5x + 1) + \operatorname{tg} \frac{a}{x}$.

54. $f(t) = \sin \omega t + \sin(\omega t + \varphi)$.

56. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

58. $y = \arcsin 2x$.

60. $y = \ln^2 x^2$.

62. $f(x) = \arccos x^3$.

64. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

66. $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$.

68. $y = e^{x^2}$.

70. $y = \ln \sqrt[3]{1+x^2}$.

72. $f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$.

74. $y = a \ln \frac{x}{a}$.

76. $y = \sqrt{\ln(x+1)} + \ln \sqrt{x+1}$.

78. $y = \frac{x^3}{x^2+1}$.

80. $y = \sin^2 3x + \ln x^2$.

81. $y = \frac{x^3}{\sin^2 3x}$.

83. $y = \arctg(\ln x) + \ln(\arctg x)$.

85. $y = \arcsin(\ln x)$.

87. $y = e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2}$.

89. $y = \operatorname{cose}^x$.

82. $y = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$.

84. $y = \sin^3 5x \cos^2 \frac{x}{3}$.

86. $y = \ln^2 \cos x$.

88. $y = e^{\sin x} \sin x$.

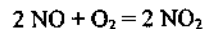
90. $y = \ln^3 x^2$.

91. Рівняння руху точки вздовж осі Ox має вигляд

$$x = 100 + 5t - 0,001t^2.$$

Знайти швидкість і прискорення в моменти часу $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 10$.

92. При якій концентрації кисню реакція окислення

відбувається з найбільшою швидкістю? Швидкість реакції визначається за формулою $u = hx(100 - x)^2$, де x – концентрація кисню в %, h – константа.93. Психофізичний закон Вебера–Фехнера відображає залежність гучності L від інтенсивності звуку I : $L = k \lg \frac{I}{I_0}$. Побудувати графік залежності $L(I)$ та $L'(I)$.

Дослідити функції на екстремум.

94. $y = 2 + x - x^2$.

96. $y = \frac{e^x}{x}$.

98. $y = (x - 2) \frac{8 - x}{x^2}$.

95. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

97. $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\sigma)^2}{2\sigma^2}}$.

99. $y = \frac{16(4 - x^2)}{x}$.

1.2. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

1.2.1. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ І ЧАСТИННІ ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Поняття функції однієї змінної не охоплює всі функціональні залежності, що існують у природі. У багатьох прикладних задачах доводиться мати справу з функціями багатьох змінних. Наприклад, рівень радіоактивного забруднення є функцією координат і часу, тиск газу є функцією об'єму і температури.

Нехай G – множина точок координатної площини. Розглянемо функцію $f(M)$, $M \in G$, яка кожній точці M множини G ставить у відповідність деяке дійсне число $u = f(M)$. Оскільки точка M однозначно визначається своїми координатами (x, y) , то кажуть, що u є функцією двох змінних x та y , і записують

$$u = f(x, y), (x, y) \in G.$$

Таким чином, функцією двох змінних $f(x, y)$ називається функція, яка кожній парі чисел $(x, y) \in G$ ставить у відповідність деяке число $u = f(x, y)$.

Наприклад, $f(x, y) = e^{-xy} + \sin y - x^2$; $f(2, 0) = e^0 + \sin 0 - 2^2 = -3$.

Аналогічно визначаються функції трьох і більшої кількості змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Наприклад, $f(x, y, z) = \frac{\cos z - x^3}{2^y + x^4}$; $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \operatorname{tg} 7x_1 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$.

Областю визначення D функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається множина всіх наборів (x_1, x_2, \dots, x_n) , при яких функція, має зміст. Наприклад, областю визначення функції $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ є множина пар (x, y) , при яких $x + y \geq 0$.

Запишемо приріст функції $z = f(x, y)$, який відповідає приросту Δx аргументу x при фіксованому $y = y_0$:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Утворимо відношення приросту функції Δz до приросту аргументу Δx :

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Якщо існує границя цього відношення при умові, що $\Delta x \rightarrow 0$, то вона називається *частинною похідною функції* $z = f(x, y)$ за змінною x у точці (x_0, y_0) .

Це символічно записується

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z'_x(x, y).$$

Аналогічно вводиться *частинна похідна по y* і позначається $\frac{\partial z}{\partial y}$, z'_y , f'_y .

Частинною похідною функції багатьох змінних називається похідна функції, яка обчислена на основі припущення, що змінюється лише один із аргументів, а решта постійні.

Будемо вважати, що функція $z = f(x, y)$ має частинну похідну $\frac{\partial f}{\partial y}$ в околі деякої точки M . Якщо при цьому існує частинна похідна по x від $\frac{\partial f}{\partial y}$, то її називають *змішаною частинною похідною в точці M* :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Якщо похідну беруть двічі по одній і тій самій змінній, то її позначають:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Справедливе співвідношення

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Це твердження носить назву *теорема Шварца*, яку без доведення сформулюємо для функцій n незалежних змінних.

Теорема. Якщо функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначена разом із своїми частинними похідними в деякому околі точки $A(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$, причому змішані похідні другого порядку неперервні в цій точці, то значення цих похідних не залежать від порядку диференціювання:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}.$$

Приклад. Нехай $u = x^2 + y^2 + 3xy$. Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y \quad \text{та} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 3x.$$

Змішані частинні похідні будуть такими:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 3 \quad \text{та} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 3.$$

Ми переконалися на прикладі в рівності змішаних частинних похідних другого порядку.

1.2.2. ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ

Розглянемо $u = f(x, y, z)$ – функцію трьох незалежних змінних, яка є визначеною і диференційовною у деякій області. Головна, лінійна відносно Δx , Δy , Δz , частина приросту функції називається *повним диференціалом du* функції трьох змінних x, y, z :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz. \quad (1.2.1)$$

Добуток частинної похідної функції на диференціал відповідної незалежної змінної називають *частинним диференціалом функції n незалежних змінних*.

Таким чином, *повний диференціал функції* дорівнює сумі частинних її диференціалів.

При вивченні поведінки функції у даній точці простору особливий інтерес у фізиці викликає питання про напрям максимального зростання функції у даній точці. Вектор, модуль якого дорівнює найбільшій швидкості зростання функції $u = f(x, y, z)$ у даній точці P , а напрям співпадає з напрямом максимального зростання, називається *градієнтом функції*. Градієнт має своїм початком точку P , а проєкціями – значення частинних похідних функції $u(x, y, z)$ в точці P

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}, \quad (1.2.2)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори осей Ox, Oy і Oz відповідно.

Поняттям градієнта користуються при знаходженні екстремумів функцій багатьох змінних.

1.2.3. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛУ ФУНКЦІЇ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПОХИБОК

Коротко нагадаємо, що вимірювання бувають прямі і непрямі (опосередковані). У прямих вимірюваннях визначається сама шукана величина: температура – термометром, маса – терезами, час – секундоміром тощо. У непрямих вимірюваннях шукана величина знаходиться за допомогою розрахунку за іншими вимірюваними величинами. Наприклад, густина $\rho = \frac{m}{V}$

розраховується, маса m і об'єм V вимірюються. Прискорення $a = \frac{F}{m}$ розраховується за вимірними силою F і масою m .

Точність вимірювання характеризується похибкою. Абсолютна похибка – це різниця між вимірюваним x_i та точним значенням x_0 величини

$$\Delta x_i = |x_i - x_0|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

де n – номер вимірювання.

Відносна похибка – відношення абсолютної похибки до точного (істинного) значення вимірюваної величини:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0}.$$

Розрізняють три типи похибок: випадкові, систематичні, промахи. *Випадкові похибки* – це такі, які непередбачено змінюють свою величину та знак від досліду до досліду. *Систематичні похибки* – ті, які залишаються постійними або закономірно змінюються при повторному вимірюванні, зберігаючи свій знак, а, інколи, і значення. Причини: неточність мір та приладів, неправильне встановлення та градування приладів, недосконалість методів вимірювання. *Промахи* – грубі похибки, які значно перевищують очікувані за даних умов. Причини: недбалість підрахунок, неправильне увімкнення приладів тощо.

Обмежимося розглядом випадкових похибок. Оскільки точне значення x_0 невідоме (якщо воно відоме, то нічого вимірювати), то за x_0 найчастіше приймають середнє арифметичне значення x :

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Середня абсолютна похибка

$$\Delta x = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n}{n}$$

дорівнює середньому арифметичному значенню абсолютних похибок окремих вимірювань.

Для знаходження похибок приріст функції замінюють її диференціалом.

Приклад. Припустимо, що величина u , яка обчислюється, є добутком двох вимірюваних величин x та y : $u = xy$. Знайдемо вираз для обчислення відносної похибки ε_u . У цьому випадку повний диференціал $du = u'_x dx + u'_y dy$.

Скориставшись наближеною рівністю $du \approx \Delta u$, матимемо: $\Delta u \approx u'_x dx + u'_y dy$.

Розділивши ліву і праву частину на $u = xy$, матимемо:

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}, \quad \text{або} \quad \varepsilon_u = \varepsilon_x + \varepsilon_y.$$

Таким чином, для функції, яка є добутком двох (або більшої кількості) вимірюваних величин, максимальна відносна похибка дорівнює сумі максимальних відносних похибок.

На практиці при обчисленні похибок часто користуються готовими формулами. Деякі з них наведені в таблиці.

№	Обчислювана величина	Абсолютна похибка	Відносна похибка
1	$u = x \pm y$	$\Delta u = \Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{x \pm y}$
2	$u = xy$	$x\Delta y + y\Delta x$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
3	$u = \frac{x}{y}$	$\frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2}$	$\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}$
4	$u = x^n$	$nx^{n-1}\Delta x$	$n \frac{\Delta x}{x}$
5	$\ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\Delta x}{x \ln x}$

Як видно з таблиці, у ряді випадків (2–4) при розрахунках зручніше спочатку обчислювати відносну похибку, а потім абсолютну, користуючись співвідношенням, отриманим безпосередньо з означення відносної похибки:

$$\Delta u = u_0 \varepsilon_u.$$

Для знаходження похибок у випадках, які не представлені у таблиці, спочатку обчислюють повний диференціал функції, а, потім, скориставшись наближеною рівністю $du \approx \Delta u$, знаходять абсолютну похибку. Знаки в доданках при цьому вибирають таким чином, щоб межа похибки була максимальною.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Знайти частинні похідні функції $z = \ln \left(\frac{x}{y} \right)$.

Розв'язання. Розглядаючи u як постійну величину, знайдемо частинну похідну функції $z = f(x, y)$ за змінною x

$$z'_x = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y \cdot \sin\left(\frac{2x}{y}\right)}.$$

Аналогічно знайдемо частинну похідну функції $z = f(x, y)$ за змінною y , при цьому незалежну змінну x вважатимемо константою,

$$z'_y = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{2x}{y^2 \cdot \sin\left(\frac{2x}{y}\right)}$$

2. При лікуванні деякого захворювання одночасно використовують два препарати. Реакція u (подана у відповідних одиницях деякого фізіологічного параметра) на x одиниць першого препарату та y одиниць другого має залежність:

$$u(x, y) = x^2 y^2 (a - x)(b - y),$$

де a та b – додатні константи; $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$.

Яка кількість другого препарату y викликає максимальну реакцію при фіксованій дозі першого?

Розв'язання. Знайдемо частинну похідну

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2(a-x)(2y(b-y) - y^2) = x^2 y(a-x)(2b-3y).$$

Прирівнявши її до нуля, визначимо критичні точки: $x = 0$, $y = 0$, $x = a$, $y = \frac{2b}{3}$. Змісту даної задачі відповідає лише значення $y = \frac{2b}{3}$. Легко переконатись, що при вказаному значенні y функція має максимум, оскільки при переході через цю точку в напрямі зростання y , знак похідної змінюється з «+» на «-».

3. Знайти повний диференціал функції трьох незалежних змінних

$$u = x^3 y^2 z + 2x - 3y + z + 5.$$

Розв'язання. Вважаючи сталими y і z , знаходимо частинну похідну функції u за змінною x та аналогічним чином частинні похідні функції u за змінними y і z

$$u'_x = 3x^2 y^2 z + 2; \quad u'_y = 2x^3 yz - 3; \quad u'_z = x^3 y^2 + 1.$$

Повний диференціал функції визначаємо, користуючись формулою (1.2.1), тобто

$$du = (3x^2 y^2 z + 2)dx + (2x^3 yz - 3)dy + (x^3 y^2 + 1)dz.$$

4. Знайти градієнт функції $z = x^2 y$ у точці $A(1; 1)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції z за змінними x та y і обчислимо їх значення у точці $A(1; 1)$:

$$z'_x = 2xy, \quad \text{а} \quad z'_x(A) = 2xy = 2, \quad z'_y = x^2, \quad \text{а} \quad z'_y(A) = x^2 = 1.$$

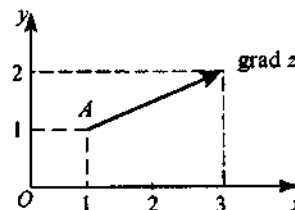


Рис. 1.11

Таким чином, згідно з (3.2) градієнт в т. $A(1; 1)$ дорівнює $\operatorname{grad} z = 2\vec{i} + \vec{j}$ (рис. 1.11).

5. Знайти формулу для обчислення відносної похибки при визначенні об'єму конуса, якщо вимірюються його лінійні розміри.

Розв'язання. Об'єм конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Абсолютна похибка ΔV може бути замінена повним диференціалом:

$$\Delta V \approx dV = \frac{1}{3}\pi(2RHdR + R^2 dH).$$

Враховуючи, що $\varepsilon_V \approx \frac{dV}{V}$, $dR = \Delta R$, а $dH = \Delta H$, знайдемо відносну похибку:

$$\varepsilon_V \approx \frac{dV}{V} = \frac{\frac{1}{3}\pi(2RHdH + R^2 dH)}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} = \frac{2dR}{R} + \frac{dH}{H} = 2\varepsilon_R + \varepsilon_H.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Реакція на ін'єкцію лікарського препарату масою x (мг) описується функцією

$$y = x^2(a-x)t e^{-t},$$

де y – деякий фізіологічний параметр; t – час, поданий у годинах; $a = \text{const}$. Знайти частинні похідні. Через який проміжок часу після ін'єкції, при заданій дозі препарату, реакція буде максимальною?

Знайти частинні похідні функцій.

$$2. z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

$$3. z = \frac{x-y}{x+y}.$$

$$4. z = \frac{y}{x}.$$

$$5. z = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

$$6. z = x^y.$$

$$7. u = e^x \ln y.$$

$$8. z = y \ln x.$$

$$9. u = x \operatorname{tg} y.$$

$$10. z = e^{\frac{\sin y}{x}}.$$

$$11. z = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}.$$

12. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

14. $u = z^y$.

16. $u = \ln(x^2y)$.

Знайти повні диференціали функцій.

18. $u = \ln(xy)$.

20. $z = x^2y^3$.

22. $u = \sin(x - y)$.

24. $z = \sin^2y + \cos^2x$.

26. $z = \arcsin \frac{x}{y}$.

28. $z = \frac{x}{y^2}$.

30. $z = \ln(x^2 + y^2)$.

32. $z = \ln \cos^3(x^2y^3)$.

Знайти градієнти функцій.

34. $\operatorname{grad} z$ в точці (5; 3), якщо $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

35. $\operatorname{grad} z$ в точці (1; 1), якщо $z = \ln x^2y$.

36. Показати, що відносна похибка в 1% при визначенні радіуса дає відносну похибку приблизно в 2% при обчисленні площі круга і поверхні кулі.

37. Знайти вираз для відносної похибки величини $z = x^2y^3$, якщо x і y знаходяться безпосередньо.

13. $u = (xy)^z$.

15. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

17. $u = \sin \frac{x}{y^2z}$.

19. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

21. $u = \cos \frac{x}{y}$.

23. $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

25. $z = yx^y$.

27. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

29. $u = z \cdot x \cdot y$.

31. $u = \operatorname{arctg} \frac{xy}{z^2}$.

33. $u = \frac{5x + 3y}{9x - 2y}$.

1.3. ЕЛЕМЕНТИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ**1.3.1. ПЕРВІСНА. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ**

У багатьох практичних задачах потрібно вміти знаходити функцію $f(x)$ за її похідною $f'(x)$, тобто виконувати операцію, обернену до диференціювання, наприклад:

1) знайти закон, за яким змінювалась швидкість $v(t)$, якщо залежність зміни прискорення від часу $a(t)$ відома. Шуканою функцією буде така $v(t)$, для якої $a = \frac{dv}{dt}$;

2) знайти закон руху $s(t)$ матеріальної точки за відомою залежністю зміни швидкості від часу; як відомо $v(t) = \frac{ds}{dt}$.

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, якщо $F(x)$ має своєю похідною функцію $f(x)$ або своїм диференціалом $f(x)dx$, тобто

$$F'(x) = f(x) \text{ або } dF(x) = f(x)dx.$$

Теорема про існування первісної. Кожна функція, що має первісну, має нескінченну кількість первісних, які відрізняються одна від одної на постійний доданок.

Доведення цієї теореми безпосередньо випливає з п. 5 правил диференціювання.

Сукупність усіх первісних $F(x) + C$ для даної функції $y = f(x)$ називають *невизначеним інтегралом* функції $f(x)$.

Символ невизначеного інтеграла: $\int f(x)dx$. Згідно з означенням

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція; $f(x)dx$ – підінтегральний вираз; \int – знак інтеграла, x – змінна інтегрування.

1.3.2. ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

1. Постійний множник можна винести за знак інтеграла:

$$\int Af(x)dx = A \int f(x)dx.$$

2. Інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа інтегрованих функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів цих функцій:

$$\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx.$$

3. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$(\int f(x)dx)' = f(x).$$

Ця властивість дозволяє перевіряти правильність виконання операції інтегрування.

4. Невизначений інтеграл від диференціала неперервної диференційовної функції дорівнює, з точністю до сталого доданка, самій цій функції:

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C.$$

5. Якщо дві функції (або два диференціали) тотожно рівні, то їхні первічні можуть відрізнятися лише постійним доданком.

1.3.3. ТАБЛИЦЯ НАЙПРОСТІШИХ ІНТЕГРАЛІВ

Відомі нам формули для похідних дають таблицю невизначених інтегралів. Щоб перевірити будь-яку з наведених в таблиці формул, досить знайти похідну правої частини.

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a^2} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

$$14. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C = \ln |\operatorname{tg} x + \sec x| + C.$$

1.3.4. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

1. **Безпосереднє інтегрування** – інтегрування, котре проводиться за допомогою таблиць без додаткових перетворень. В окремих випадках використовують *метод розкладання*, який базується на поданні підінтегральної функції через суму функцій, кожна з яких є табличною.

$$\text{Приклад. } \int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx - 2 \int \frac{dx}{x^2+1} = x - 2\operatorname{arctg} x + C.$$

2. **Інтегрування підстановкою** (заміна змінної). Зміст цього методу полягає в тому, що в інтегралі $\int f(x)dx$ виконується заміна змінної $x = \varphi(t)$, тобто вводиться нова змінна t замість x . Дістають диференціал $dx = \varphi'(t)dt$. Тоді початковий інтеграл записується у вигляді:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Якщо підстановка (заміна змінної) вдала, то другий інтеграл легко визначається. Досить часто (у простих випадках) для введення нової змінної вибирають деяку функцію, що входить у підінтегральний вираз: $t = z(x)$. Це доцільно, якщо множник dt також входить у підінтегральний вираз.

Пройлюструємо таку заміну прикладом.

$$\text{Приклад. } \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C.$$

При цьому кажуть, що $\sin x$ підвели під знак диференціалу.

3. **Інтегрування частинами**. Розглянемо дві неперервні (диференційовні) функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$. Утворимо диференціал добутку цих функцій:

$$d(uv) = vdu + udv.$$

Звідси

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,$$

або

$$\int udv = uv - \int vdu. \quad (1.3.1)$$

Таким чином, інтеграл $\int udv$ зводиться до інтеграла $\int vdu$, який часто обчислюється більш просто.

$$\text{Приклад. } \int_x^a \frac{\cos x dx}{x} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

При інтегруванні *тригонометричних функцій* інтеграли виду $\int \cos^m x \sin^n x dx$, де m та n натуральні числа, обчислюють залежно від парнос-

ті чи непарності степеня. Якщо m та n парні, то користуються формулами зниження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Якщо n або m – непарне, то використовують заміну змінної

$$t = \sin x \text{ при } m \text{ непарному,}$$

$$t = \cos x \text{ при } n \text{ непарному.}$$

При інтегруванні ірраціональних функцій деякі інтеграли від ірраціональних функцій можна звести до інтегралів від раціональних функцій за допомогою таких підстановок:

$$1) \int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx \rightarrow ax+b=t^n;$$

$$2) \int R(x^m, \sqrt[n]{ax^m+b}) x^{m-1} dx \rightarrow ax^m+b=t^n;$$

$$3) \int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx \rightarrow x=a \sin t;$$

$$4) \int R(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx \rightarrow x=a \operatorname{tg} t.$$

1.3.5. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Розглянемо плоску фігуру (криволінійну трапецію), яка обмежена графіком додатної неперервної функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком $[a, b]$ осі Ox . Знайдемо площу цієї трапеції. Для цього розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n елементарних відрізків $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ (рис. 1.12). Розглянемо заштриховану фігуру (прямокутник з основою Δx), її площа:

$$S_i = f(\bar{x}_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\bar{x}_i)\Delta x,$$

де \bar{x}_i – довільна точка інтервалу Δx_i ;
 $f(\bar{x}_i)$ – значення функції у цій точці.

Загальна площа всіх прямокутників з основою Δx дорівнює сумі

$$\sum_{i=0}^n f(\bar{x}_i)\Delta x.$$

Ця величина буде тим точніше визначати площу криволінійної трапеції, чим менше Δx . Точне значення площі дається границею:

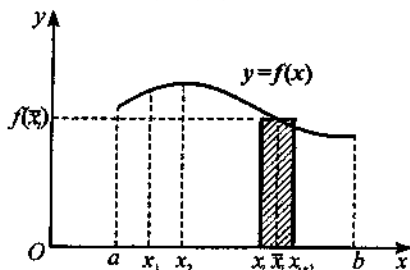


Рис. 1.12

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(\bar{x}_i)\Delta x.$$

Величина $\sum_{i=0}^n f(\bar{x}_i)\Delta x$ називається інтегральною сумою, або сумою Дарбу.

Наведемо визначення. Якщо границя інтегральної суми $\sum_{i=0}^n f(\bar{x}_i)\Delta x$ існує при всіх $\Delta x \rightarrow 0$, то ця границя називається визначенням інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається символом:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(\bar{x}_i)\Delta x,$$

де a – нижня межа; b – верхня межа; $f(x)$ – підінтегральна функція.

Якщо $f(x) < 0$, то $S = -\int_a^b f(x) dx$. Знак “-” стоїть тому, що $S \geq 0$.

1.3.6. ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

1. Постійний множник можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b Af(x) dx = A \int_a^b f(x) dx.$$

2. Інтеграл від алгебраїчної суми інтегрованих функцій дорівнює сумі визначених інтегралів кожного з доданків:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

3. Інтеграл по відрізку дорівнює сумі інтегралів по його частинах:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

де $a < c < b$.

4. Теорема про середнє. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то у межах $[a, b]$ існує точка c така, що

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Геометричний зміст цієї теореми: площу криволінійної трапеції можна визначити через площу прямокутника з тією ж основою, що й трапеція, і сторо-

ною, яка дорівнює значенню підінтегральної функції при деякому проміжному значенні аргументу.

Ця теорема дозволяє знаходити середнє значення будь-якої величини, що є функцією. Наприклад, як відомо, середня швидкість \bar{v} дорівнює відношенню шляху, пройденого тілом, до затраченого часу:

$$\bar{v} = \frac{s(t)}{\Delta t} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt}{t_2 - t_1}.$$

5. При перестановці меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Цю властивість легко зрозуміти, якщо скористатись теоремою про середнє та взяти до уваги, що: $(b - a) = -(a - b)$.

6. Похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею t по цій межі дорівнює підінтегральній функції при значенні змінної, рівному значенню верхньої межі ($x = t$):

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(x) dx = f(t).$$

Таким чином, інтеграл зі змінною верхньою межею є однією з первісних для підінтегральної функції.

1.3.7. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Означення визначеного інтеграла як границі суми, наведене в п. 4.5, дозволяє зрозуміти роль інтеграла при розв'язанні задач: на обчислення площі, обмеженої кривою $y = f(x)$; шляху, пройденого тілом; роботи змінної сили тощо. Але це означення не дає зручного способу знаходження інтеграла у вигляді функцій меж інтегрування.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на цьому відрізку, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ця формула називається *формулою Ньютона-Лейбніца* і встановлює зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралом.

Доведення. Знаючи, що $\int_a^t f(x) dx = F(t) + C$, знайдемо C . Приймаючи

$t = a$, матимемо $\int_a^a f(x) dx = 0$. Звідси $F(a) + C = 0$, $C = -F(a)$. Отже,

$$\int_a^t f(x) dx = F(t) - F(a).$$

Перейдемо до визначеного інтеграла, приймаючи $t = b$. Остаточно будемо мати

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a). \quad (1.3.2)$$

Таким чином, задача обчислення визначеного інтеграла зводиться до знаходження первісної (тобто невизначеного інтеграла); потім обчислюється значення первісної при $x = b$ і $x = a$ і знаходиться різниця цих значень.

Приклад. У деяких діагностичних методиках користуються препаратами з ізотопними індикаторами. Швидкість зміни концентрації C такого препарату в організмі з плином часу описується законом:

$$\frac{dC}{dt} = K e^{-t},$$

де K – константа в умовах експерименту. Знайти зміну концентрації препарату за час $t = 0,5$ год.

Розв'язання. Шукана зміна концентрації виразиться інтегралом:

$$C = K \int_0^{0,5} e^{-t} dt.$$

Знайдемо первісну і скористаємось формулою Ньютона-Лейбніца (1.3.2)

$$C = -K(e^{-0,5} - e^0) = K \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \right).$$

1.3.8. ДЕЯКІ ФІЗИЧНІ, БІОФІЗИЧНІ ТА ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Визначений інтеграл використовують не тільки в математиці, а й у різних прикладних науках. За його допомогою обчислюють площі фігур, довжини ліній, об'єми тіл довільної форми, роботу змінної сили, швидкість, шлях, знаходять центр мас, центр інерції.

Нижче наведені деякі приклади *фізичного, біофізичного та геометричного застосування визначеного інтеграла*.

Робота змінної сили. Відома з шкільного курсу формула роботи, яка виражається добутком проекції сили на переміщення, справедлива лише у

випадку дії постійної сили. Якщо сила є змінною, то потрібно розглядати настільки малі проміжки шляху, щоб силу можна було вважати постійною:

$$\Delta A_i = F_i \Delta x \quad \text{або} \quad dA = F(x) dx.$$

В загальному випадку робота змінної сили

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx.$$

Цю формулу можна подати іншим чином. Оскільки $dx = \frac{dx}{dt} dt = v dt$, то матимемо

$$A = \int_{t_1}^{t_2} Fv dt.$$

Добуток Fv , який входить в цю формулу, є потужністю W , тому можна формулу для роботи записати і так:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} W dt.$$

Зауважимо, що для того, щоб обчислити роботу по наведених вище формулах, потрібно знати залежність координати від часу $x(t)$ та вираз для сили, яка може бути подана як функція або часу, або координати, або швидкості.

Чисельність популяції. Якщо відома швидкість росту популяції $v(t) = \frac{dN}{dt}$, то можна знайти приріст чисельності популяції ΔN за певний проміжок часу $\Delta t = t - t_0$:

$$\Delta N = N(t) - N(t_0) = \int_{t_0}^t v(t) dt.$$

Наприклад, відомо, що швидкість росту популяції пеніцилінових грибків при необмеженості ресурсів живлення описується експоненціальним законом $v = ae^{kt}$. Знайдемо приріст такої популяції за деякий проміжок часу $\Delta t = t - t_0$:

$$\Delta N = \int_{t_0}^t a e^{kt} dt = \frac{a}{k} e^{kt} \Big|_{t_0}^t = \frac{a}{k} (e^{kt} - e^{kt_0}).$$

Очевидно, що $N_0 = \frac{a}{k} e^{kt_0}$ – чисельність популяції в момент часу t_0 .

Обчислення об'єму тіла. Розглянемо випадок, коли тіло утворене обертанням деякої кривої $y = f(x)$ навколо осі Ox в межах змін x від a до b (рис. 1.13). Розділимо тіло площинами, перпендикулярними до Ox , на достатньо

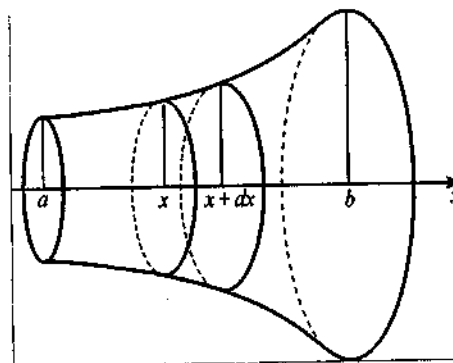


Рис. 1.13

велику кількість шарів n . Кожен із шарів можна розглядати як циліндр з основою S та висотою $\Delta x = dx$, тоді об'єм шару $dV = S dx$. Площу основи S можна подати як $S = \pi f^2(x)$. Об'єм тіла

$$V = \int_a^b S dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Як приклад, розглянемо тіло, утворене обертанням гілки параболу $x = y^2$ навколо осі Ox . Таке тіло назива-

ють параболоїдом обертання. Обчислимо об'єм сегмента параболоїда за умови, що $x \in (0; 2)$. Згідно з отриманою формулою

$$V = \pi \int_0^2 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^2 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2\pi.$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням кривої $x = \varphi(y)$, обмеженої прямими $y = c$, $y = d$ при $c < y < d$, навколо осі Oy :

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

Наведемо без доведення деякі інші застосування визначеного інтеграла в геометрії.

Довжина дуги плоскої неперервної кривої $y = f(x)$, яка обмежена прямими $x = a$, $x = b$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Площа поверхні, утвореної обертанням кривої $y = f(x)$, яка обмежена прямими $x = a$, $x = b$, навколо осі Ox :

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Площа поверхні, утвореної обертанням кривої $x = \varphi(y)$, яка обмежена прямими $y = c$, $y = d$, навколо осі Oy :

$$S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + (x')^2} dy.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Обчислити невизначений інтеграл

$$\int (6x^3 + x - 1) dx.$$

Розв'язання. Використовуючи властивості 1 і 2 невизначеного інтеграла, даний інтеграл можна записати у вигляді:

$$\int (6x^3 + x - 1) dx = 6 \int x^3 dx + \int x dx - \int 1 dx.$$

Використавши формулу 1 з таблиці невизначених інтегралів, отримаємо

$$\int (6x^3 + x - 1) dx = \frac{3}{2} x^4 + \frac{1}{2} x^2 - x + C.$$

2. Обчислити інтеграл $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Розв'язання. Припустивши, що $t = \sin x$, знайдемо $dt = \cos x dx$, тоді підінтегральний вираз набере вигляду: $\sin^2 x \cos x dx = t^2 dt$.

$$\text{Отже, } \int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

3. Обчислити інтеграл $\int x^3 \ln x dx$.

Розв'язання. Обчислимо цей інтеграл методом інтегрування по частинах. Запишемо підінтегральну функцію у вигляді добутку двох співмножників – функцій $u = \ln x$ і $dv = x^3 dx$. Тоді $du = \frac{dx}{x}$; $v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$. Використавши формулу (4.1), отримаємо:

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \int \frac{x^4}{4x} dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C.$$

4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$.

Розв'язання. Справедлива тотожність

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{a-b}{(x-a)(x-b)}.$$

За її допомогою отримаємо

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right).$$

Тому

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} &= \frac{1}{a-b} \left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x-b} \right) = \frac{1}{a-b} (\ln|x-a| - \ln|x-b|) + C = \\ &= \frac{1}{a-b} \ln \frac{x-a}{x-b} + C. \end{aligned}$$

5. Дослідити функцію $y = \int e^{-x^2} dx$.

Розв'язання. Цей інтеграл не може бути поданий через скінченне число елементарних функцій (доведення через складність наводити не будемо). Однак, цей інтеграл є функцією, властивості якої можна дослідити. З означення первісної видно, що

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}.$$

Оскільки $e^{-x^2} > 0$ для будь-яких x , то $y(x)$ – зростаюча функція. Друга

похідна $\frac{d^2 y}{dx^2} = -2x e^{-x^2}$ дорівнює нулю при $x = 0$. Легко переконатись, що ця точка є точкою перетину.

Графік функції $y = \int_0^x e^{-x^2} dx$ подано на

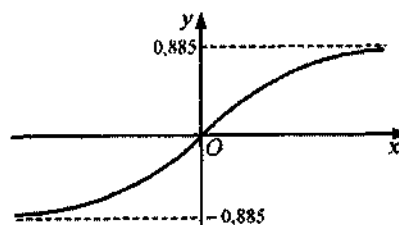


Рис. 1.14

рис. 1.14 (для визначеності нижня межа вибрана рівною нулю). Для знаходження значень цієї функції складені спеціальні таблиці. Більш докладно з цими таблицями ознайомимося в наступних розділах.

6. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$.

Розв'язання. Знаходимо первісну

$$\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x.$$

Використаємо формулу Ньютона–Лейбніца:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}.$$

Скориставшись властивістю 5 визначеного інтеграла поміняємо місцями нижню і верхню межі інтегрування і змінимо при цьому знак перед інтегралом

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^0 = \frac{1}{2} \left(\cos 0 - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}.$$

7. Обчислити $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$.

Розв'язання. Знайдемо первісну, використавши заміну змінної $\ln x = t$, $dt = \frac{dx}{x}$. При цьому доведеться змінити і межі інтегрування. Нижня межа $t_1 = \ln x_1 = \ln 1 = 0$. Верхня межа $t_2 = \ln x_2 = \ln e = 1$.

Отримаємо

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

8. Обчислити $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Розв'язання. Використаємо підстановку $x = \sin t$, тоді $dx = \cos t dt$. При заміні змінної у визначеному інтегралі потрібно замінити і межі інтегрування. Нижня межа $t_1 = \arcsin 0 = 0$, а верхня $t_2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Таким чином,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

9. Визначити роботу сил електричного поля, створеного точковим зарядом Q , по переміщенню іншого точкового заряду q з точки A , яка зна-

ходиться на відстані r_1 від Q , в точку B , яка знаходиться на відстані r_2 від Q .

Розв'язання. В даному випадку сила F визначається за законом Кулона і є функцією координати

$$F(r) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Для досить малого переміщення від r_1 до $r_1 + \Delta r$ можна записати

$$\Delta A_i = F(r_i) \Delta r_i.$$

Вся робота наближено обчислюється інтегральною сумою

$$A = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(r_i) \Delta r = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

де $\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1}$; $\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$.

10. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \operatorname{tg} x$, віссю Ox і прямою $x = \frac{\pi}{4}$ (рис. 1.15).

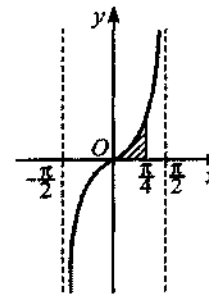


Рис. 1.15

Розв'язання. Площу шуканої фігури (на рис. 1.15 вона заштрихована) можна знайти як $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx$.

Обчислимо первісну методом заміни змінної, позначивши $t = \cos x$, тоді $dt = -\sin x dx$:

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln |t| = -\ln |\cos x|.$$

Скориставшись формулою Ньютона–Лейбніца, маємо

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln |\cos 0| - \ln \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| = 0 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Користуючись таблицею інтегралів і перетворенням підінтегральних виразів, знайти.

1. $\int (3x^2 + \frac{2}{x^5}) dx$.

2. $\int (4 \sin x + 4x - 2) dx$.

3. $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}) dx$.

4. $\int \frac{x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x}} dx$.

5. $\int (x^2 - 3)^3 dx$.

6. $\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx$.

7. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

8. $\int \frac{e^x + 1}{e^x} dx$.

9. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

10. $\int \cos 2x dx$.

11. $\int \cos 3x \cos 5x dx$.

12. $\int \frac{2x + 3}{2x + 1} dx$.

13. $\int \frac{1}{a - x} dx$.

14. $\int \frac{6x^3 + x^2 - 2x}{2x - 1} dx$.

15. $\int \frac{x^2 + 5x + 7}{x + 3} dx$.

16. $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx$.

Знайти інтеграли методом заміни змінної.

17. $\int \sin^3 x dx$.

18. $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx$.

19. $\int \frac{1}{\sqrt{8 - x^2}} dx$.

20. $\int \frac{x^2}{x^2 + 2} dx$.

21. $\int \frac{x}{\sqrt{2 + 3x^2}} dx$.

22. $\int \frac{1}{\sqrt{4 - 9x^2}} dx$.

23. $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 1} dx$.

24. $\int x^2 \sin 3x^3 dx$.

25. $\int \sin^5 x \cos x dx$.

26. $\int e^{\cos x} \sin x dx$.

27. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$.

28. $\int \frac{\operatorname{ctg} x dx}{\sin^2 x}$.

29. $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$.

30. $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

31. $\int \frac{x}{3 + 2x^2} dx$.

Знайти інтеграли методом інтегрування по частинах.

32. $\int x \ln x dx$.

33. $\int e^x \cos x dx$.

34. $\int \ln x dx$.

35. $\int x^2 \sin 2x dx$.

36. $\int x e^{-x} dx$.

37. $\int x \sin x dx$.

38. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$.

39. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$.

40. $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, знайти інтеграли.

41. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

42. $\int_1^{-2} \frac{dx}{x^3}$.

43. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx$.

44. $\int_2^3 \sqrt{x-2} dx$.

45. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$.

46. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^x}$.

47. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$.

48. $\int_1^2 \frac{x^3 dx}{3+x^4}$.

49. $\int_e^{2e} \frac{dx}{x \ln x}$.

50. $\int_1^2 \frac{x^2 - 4x^3 + x}{x^2} dx$.

51. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx$.

52. $\int_1^{10} \frac{\ln^3 x dx}{x}$.

53. $\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+3}}$.

54. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x dx$.

Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

55. $y = \frac{x^2}{2}$; $x = 1$; $x = 3$ і віссю абсцис. 56. $y = 4x - x^2$ і віссю абсцис.

57. $y = \sin x$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{4}$. 58. $y = \operatorname{tg} x$; $x = \frac{\pi}{3}$ і віссю абсцис.

59. $y = x^2$; $y = 2 - x^2$. 60. $y = \ln x$; $y = 0$; $x = 0$.

61. $y = e - x$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$. 62. $y = 2^x$; $y = 2$; $x = 0$.

63. $y = 2x - x^2$; $y = x$. 64. $y = x^2$; $x = 2$; $x = 3$.

65. Знайти приріст чисельності популяції за проміжок часу від t_1 до t_2 , якщо швидкість приросту визначається формулою $V(t) = C e^{kt}$, де C і k – величини сталі в умовах задачі.

66. Знайти об'єм рідини, яка протікає по трубі радіуса R за 1 с. Залежність швидкості рідини від відстані до осі труби r задається формулою:

$$V = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4l\eta}$$

Примітка. $\frac{P_1 - P_2}{4l\eta}$ – константа.

67. Знайти середні значення функцій:

а) $f(x) = \sin x$ на відрізку $[0; \pi]$;

б) $f(x) = \sin^2 x$ на відрізку $[0; \pi]$;

в) $f(x) = \ln x$ на відрізку $[1; e]$;

г) $f(x) = x^2$ на відрізку $[0; b]$.

68. В момент часу t швидкість зміни концентрації препарату з ізотопним індикатором $c' = e^{-t \ln 2}$. Знайти концентрацію в момент часу t .

69. Знайти роботу, затрачену на розтягування пружини еспандера на 60 см, якщо при зусиллі 15 Н еспандер розтягується на 2 см.

70. Знайти кількість теплоти, яка виділяється в провіднику опором 2 Ом за 1 хв при проходженні струму $I = 10 \sin 100\pi t$.

71. Знайти площу фігури між параболою $y = x^2 + 2$ та прямою $x + y = 4$.

1.4. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1.4.1. ПОНЯТТЯ ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Диференціальні рівняння є одним з головних інструментів сучасної теорії моделювання, керування, прийняття рішень. Їх використовують у найрізноманітніших задачах науки та техніки. Вперше в біології диференціальні рівняння з'явилися у XVIII ст. і були використані для моделювання процесів розвитку популяцій. На сьогодні теорія диференціальних рівнянь активно використовується в імунології, радіології, епідеміології, фармації та інших галузях медичної науки.

Диференціальним називається рівняння, в яке, крім функції y і незалежної змінної x , входять похідні функції $y', y'', \dots, y^{(n)}$ або її диференціали. Загальний вигляд диференціального рівняння у випадку функції однієї змінної:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Найвищий порядок похідної, яка входить до диференціального рівняння, називають порядком диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння називається *лінійним*, якщо невідома функція y та її похідні y', y'', \dots входять у рівняння тільки в першому степені.

У випадку функції однієї змінної ($y = f(x)$) рівняння називають *звичайним диференціальним рівнянням*. У випадку двох ($y = f(x_1, x_2)$) і більше змінних рівняння називають *диференціальним рівнянням у частинних похідних*.

Найбільш поширені у фізиці диференціальні рівняння в частинних похідних:

1. Рівняння дифузії (вважаємо, що концентрація речовини є функцією часу і координати $c = f(t, x)$):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

де D – коефіцієнт дифузії.

2. Рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

де χ – коефіцієнт температуропровідності; $T = f(x, t)$ – температура.

3. Рівняння гармонічних коливань:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2 s,$$

де ω – власна частота, s – зміщення від положення рівноваги.

4. Хвильове рівняння:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2},$$

де $s = f(x, t)$ – зміщення, v – швидкість поширення хвилі.

Надалі будемо розглядати звичайні лінійні диференціальні рівняння.

Розв'язком звичайного диференціального рівняння n -го порядку називається кожна функція $y = f(x)$, підстановка якої разом з її похідними перетворює це рівняння в тотожність. Процедура знаходження розв'язків диференціального рівняння називають інтегруванням цього рівняння.

1.4.2. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Лінійне диференціальне рівняння n -го порядку має вигляд:

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) \cdot y = b(x),$$

де y – шукана функція; $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ – відомі функції незалежної змінної, їх ще називають **коефіцієнтами** диференціального рівняння. Якщо коефіцієнти при невідомій функції y та її похідних не залежать від x , тобто є константами, то рівняння називається диференціальним рівнянням з **постійними коефіцієнтами**. У протилежному випадку – диференціальне рівняння зі **змінними коефіцієнтами**.

Рівняння, в якому $b(x) \neq 0$, називається **неоднорідним**, якщо ж $b(x) = 0$, то рівняння – **однорідне**.

У відповідність однорідному диференціальному рівнянню можна поставити рівняння відносно деякої невідомої λ

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (1.4.1)$$

яке називають **характеристичним** для даного диференціального рівняння. Якщо λ – корінь характеристичного рівняння, то $y = e^{\lambda x}$ – розв'язок диференціального рівняння.

Теорема. Якщо $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ – розв'язки однорідного рівняння, то будь-яка їхня лінійна комбінація

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

також є розв'язком цього однорідного рівняння, C_1, C_2, \dots, C_n – константи.

Сукупність лінійно незалежних розв'язків, кількість функцій в якій дорівнює порядку диференціального рівняння, називають **фундаментальним набором розв'язків лінійного диференціального рівняння**.

Нагадаємо, що система функцій називається лінійно незалежною, якщо ні одна з них не може бути подана у вигляді лінійної комбінації інших функцій.

Розв'язати диференціальне рівняння – означає знайти всі його розв'язки. Сукупність усіх розв'язків даного диференціального рівняння називають **загальним розв'язком** цього рівняння.

Загальний розв'язок диференціального рівняння – розв'язок, який є лінійною комбінацією фундаментального набору розв'язків:

$$y = \sum_{i=1}^n C_i y_i,$$

де C_1, C_2, \dots, C_n – довільні константи; y_i – лінійно незалежні розв'язки диференціального рівняння.

Отже, **загальний розв'язок диференціального рівняння n -го порядку** – це функція $y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, яка перетворює це рівняння в тотожність при будь-яких значеннях констант C_1, C_2, \dots, C_n .

Однак не завжди загальний розв'язок отримується в явному вигляді. Іноді він визначається рівнянням виду

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0. \quad (1.4.2)$$

У такому разі рівняння (1.4.2) називають загальним інтегралом диференціального рівняння. Розв'язати диференціальне рівняння – це значить знайти його загальний розв'язок у тому чи іншому вигляді.

Розв'язок, який отримується із загального при деяких фіксованих значеннях констант C_1, C_2, \dots, C_n , називають **частинним розв'язком**.

1.4.3. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Диференціальне рівняння першого порядку має загальний вигляд

$$y' = f(x, y) \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (1.4.3)$$

Його загальний розв'язок

$$y = \varphi(x, C), \quad (1.4.4)$$

де C – деяка константа.

Загальний інтеграл з визначеним числовим значенням константи C називається **частинним розв'язком** диференціального рівняння. Якщо функція $y = \varphi(x)$ є розв'язком диференціального рівняння першого порядку, то її графік називають інтегральною кривою даного диференціального рівняння. Рівність (1.4.4) можна розглядати як рівняння сім'ї інтегральних кривих диференціального рівняння першого порядку.

Справедлива теорема про існування єдиного частинного розв'язку диференціального рівняння $y' = f(x, y)$.

Теорема. Якщо функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ неперервні в деякій області, то існує в даній області єдиний розв'язок цього рівняння $y = \varphi(x)$, для якого справедливо: якщо $x = x_0$, то $y = y_0$.

Геометричний зміст цієї теореми полягає в тому, що існує, причому єдина, функція $y = \varphi(x, C)$, яка є розв'язком даного диференціального рівняння, така, що її графік проходить через точку (x_0, y_0) . Умова, згідно з якою при $x = x_0$ функція y набуває значення y_0 , називається *початковою умовою*. Початкова умова дозволяє визначити константу C і знайти частинний розв'язок диференціального рівняння.

Розглянемо методи розв'язання лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

Рівняння, якому можна надати вигляду

$$f_1(x)f_2(y) dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y) dy = 0, \quad (1.4.5)$$

називається *рівнянням з відокремлюваними змінними*.

Поділивши його почленно на добуток $f_2(y)\varphi_1(x)$ (вважаємо, що він не дорівнює нулю), одержимо:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx + \frac{f_2(y)}{\varphi_2(y)} dy = 0.$$

Змінні x і y відокремлені. Загальний інтеграл такого рівняння має вигляд:

$$F_2(y) + F_1(x) = C, \quad (1.4.6)$$

де F_1 та F_2 – первісні функцій $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$ та $\frac{f_2(y)}{\varphi_2(y)}$ відповідно. З використанням початкової умови $x = x_0, y = y_0$ можна отримати частинний розв'язок цього рівняння:

$$F_2(y) + F_1(x) = F_1(x_0) + F_2(y_0).$$

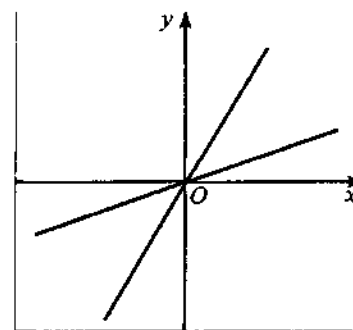


Рис. 1.16

Приклад. Розв'язати рівняння $xdy = ydx$.

Розділивши змінні, отримаємо:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи, матимемо $\ln y = \ln x + C_1$. Константу C_1 можна подати в логарифмічній формі $C_1 = \ln C$, звідки $C = e^{C_1}$. Таким чином, загальний розв'язок має вигляд

$$\ln y = \ln x + \ln C$$

або, виконавши потенціювання, $y = Cx$. Це сім'я прямих, що проходить через початок координат (рис. 1.16).

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння першого порядку мають вигляд

$$y' + p(x)y = q(x). \quad (1.4.7)$$

Будемо вважати, що функції $p(x)$ та $q(x)$ неперервні в деякому інтервалі $(a; b)$. Якщо $q(x) = 0$, то рівняння однорідне і є рівнянням з відокремлюваними змінними. Неважко перекоонатись, що його загальним розв'язком є функція:

$$y = C e^{-\int p(x) dx}.$$

Якщо ж $q(x) \neq 0$, то рівняння (1.4.7) неоднорідне. Для його розв'язування скористаємось підстановкою:

$$y = u(x) \cdot v(x). \quad (1.4.8)$$

де $u(x)$ і $v(x)$ – невідомі диференційовні функції в інтервалі $(a; b)$. На перший погляд здається, що, замінюючи одну невідому функцію $y(x)$ двома невідомими $u(x)$ та $v(x)$, тільки ускладнюємо задачу. Але це не так. Адже вибором однієї з функцій $u(x)$ або $v(x)$ можна розпорядитись так, як буде зручно. Справді, підставивши функцію (1.4.8) в (1.4.7), дістанемо

$$u'v + u(v' + pv) = q. \quad (1.4.9)$$

Візьмемо функцію v такою, щоб

$$v' + pv = 0. \quad (1.4.10)$$

Рівняння (1.4.10) є лінійним однорідним. Його загальний розв'язок має вигляд

$$v = C e^{-\int p(x) dx}.$$

Взявши в значенні функції v одну з таких функцій, наприклад, $v = e^{-\int p(x) dx}$, підставимо її в рівняння (1.4.9), яке може бути записане з урахуванням (1.4.10) у вигляді:

$$v \frac{du}{dx} = q. \quad (1.4.11)$$

Після відокремлення змінних дістанемо:

$$du = \frac{q}{v} dx.$$

Загальний розв'язок цього диференціального рівняння

$$u = \int \frac{q(x)}{v(x)} dx + C = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C.$$

Оскільки $y = u(x)v(x)$, то загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.4.7) має вигляд

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left(C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right). \quad (1.4.12)$$

Безумовно, загальним розв'язком неоднорідного рівняння (1.4.7), як і загальним розв'язком відповідного однорідного, є функції, визначені на всьому інтервалі $(a; b)$.

1.4.4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В БІОЛОГІ ТА МЕДИЦИНІ

Моделі розвитку популяцій. Однією з важливих проблем екології є динаміка чисельності популяції. Розглянемо колонію мікроорганізмів, яка існує в умовах необмежених ресурсів живлення. Швидкість зміни популяції $\frac{dN}{dt}$ є прямо пропорційною до її чисельності N :

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N.$$

Це рівняння в 1802 р. вперше отримав Мальтус. Загальний розв'язок цього однорідного рівняння має вигляд

$$N = C e^{\gamma t}.$$

З початкових умов: $t = t_0$, $N(t_0) = N_0$, матимемо

$$C = N_0 e^{-\gamma t_0}.$$

Частинний розв'язок має вигляд

$$N = N_0 e^{\gamma(t-t_0)}.$$

Отримане рівняння свідчить, що з часом N зростає необмежено за експоненціальним законом. В жодній з реально існуючих популяцій це не реалізується, оскільки в природних умовах не виконуються вихідні припущення: необмеженість ресурсів живлення, відсутність впливу інших видів. Таким чином, *рівняння Мальтуса* можна застосувати лише до штучно створених популяцій, наприклад, популяції пеніцилінових грибків, дріжджових бактерій.

Точніше описує розвиток популяцій *рівняння Ферхюльста-Перла*, отримане в 1845 р. Будемо, як і раніше, вважати, що середня народжуваність у розрахунку на одну особину є сталою γ , яка не залежить ні від часу, ні від розміру популяції. Рівняння Ферхюльста-Перла враховує також "фактор самоотруєння", який зменшує швидкість росту популяції: смертність є пропорційною до розміру популяції, тобто дорівнює δN (δ – коефіцієнт самоотруєння). Величина δ визначається багатьма факторами: поширенням інфекцій, конкурентною боротьбою за їжу тощо. Таким чином, швидкість росту популяції в розрахунку на одну особину $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ дорівнює різниці між народжуваністю γ і смертністю δN :

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \gamma - \delta N$$

або

$$\frac{dN}{dt} = (\gamma - \delta N)N.$$

Це і є *рівняння Ферхюльста-Перла*. Розв'яжемо його. Відокремивши змінні, матимемо

$$\int \frac{dN}{(\gamma - \delta N)N} = \int dt.$$

Подавши $\frac{1}{(\gamma - \delta N)N} = \frac{1}{\gamma N} + \frac{\delta}{\gamma(\gamma - \delta N)}$, знайдемо

$$\frac{1}{\gamma} \int \frac{dN}{N} + \frac{\delta}{\gamma} \int \frac{dN}{\gamma - \delta N} = \int dt$$

або

$$\frac{1}{\gamma} \ln N - \frac{1}{\gamma} \ln(\gamma - \delta N) = t + C.$$

Таким чином,

$$\frac{1}{\gamma} \ln \frac{N}{\gamma - \delta N} = t + C. \quad (1.4.13)$$

З початкової умови: $t = 0$, $N = N_0$ ($N_0 < \frac{\gamma}{\delta}$), знайдемо константу C

$$C = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{N_0}{\gamma - \delta N_0}.$$

Підставивши C в (1.4.13), маємо

$$\ln \frac{N(\gamma - \delta N_0)}{N_0(\gamma - \delta N)} = \gamma t \quad \text{або} \quad \frac{N(\gamma - \delta N_0)}{N_0(\gamma - \delta N)} = e^{\gamma t}.$$

Виразимо N з останнього рівняння

$$N = \frac{N_0 \gamma e^{\gamma t}}{\gamma - \delta N_0 + \delta N_0 e^{\gamma t}}.$$

Отримане рівняння називають логістичним (або рівнянням Ферхюльста-Перла). Чисельність популяції за даних умов з плином часу наближається до деякої константи:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_0 \gamma e^{\gamma t}}{\gamma - \delta N_0 + \delta N_0 e^{\gamma t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_0 \gamma}{\frac{\gamma}{e^{\gamma t}} - \frac{\delta N_0}{e^{\gamma t}} + \delta N_0} = \frac{\gamma N_0}{\delta N_0} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Величину $\mu = \frac{\gamma}{\delta}$ називають рівноважною чисельністю популяції, вона дорівнює максимальній чисельності, теоретично можливій за даних умов. Зауважимо, що розв'язок $N = \frac{\gamma}{\delta} = \mu$ також задовольняє дане диференціальне рівняння. Він не отримується із загального, оскільки у ході розв'язування ми виконували ділення на вираз $\gamma - \delta N$, вважаючи його не рівним нулю.

Графік $N(t)$ нагадує витягнуту літеру S (рис. 1.17). Тому його називають S -подібною кривою, яка досить добре описує динаміку чисельності багатьох популяцій, що існують в природних умовах.

Функція $N(t)$ має точку перегину при $N = \frac{\mu}{2} = \frac{\gamma}{2\delta}$, де з угнутої переходить в опуклу.

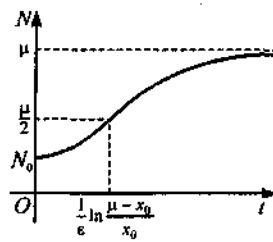


Рис. 1.17

Фармакокінетичні моделі. Для дослідження змін концентрації введеного в організм лікарського препарату з плином часу використовують *фармакокінетичні моделі*. Частина системи, у якій концентрацію препарату можна вважати постійною, називають фармакокінетичною камерою. Залежно від задачі, що розглядається, у ролі камери може виступати клітина, орган, певна тканина або увесь організм. Відповідно до кількості камер, фармакокінетичні моделі поділяють на одно-, дво- та багатокамерні. Реально зміна концентрації залежить від великої кількості різноманітних процесів. Однак, для отримання простої та наглядної моделі зробимо такі основні припущення:

- абстрагуємося від багатостадійності процесів уведення, переносу та виведення препарату;
- знехтуємо молекулярними механізмами процесів мембранного транспорту, зв'язування та руйнації речовини.

Розглянемо закономірності зміни маси лікарського препарату $m(t)$ при різних способах його введення.

1. *Однокамерна лінійна фармакокінетична модель* описує процес зменшення маси, а отже концентрації лікарського препарату в організмі за рахунок виведення його природним шляхом. Сукупність процесів, що обумовлюють зменшення концентрації препарату в організмі називається *елімінацією*. Вважають, що швидкість зміни лінійно залежить від наявної в даний момент часу t маси препарату m :

$$m' = -km \quad \text{або} \quad \frac{dm}{dt} = -km, \quad (1.4.14)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, який називають постійною елімінації.

Однокамерна лінійна модель адекватно описує процеси, які відбуваються при введенні багатьох лікарських препаратів ін'єкційно в кров. Циркуляція крові практично миттєво забезпечує рівномірний розподіл препарату в організмі: $c = m/V$. Об'єм V називають уявним об'ємом розподілу препарату, він не дорівнює реальному об'єму, а є лише коефіцієнтом пропорційності між m та c .

Розв'яжемо диференціальне рівняння (1.4.14). Відокремивши змінні, маємо

$$\frac{dm}{m} = -kdt.$$

Зінтегрувавши ліву і праву частини, дістанемо

$$\ln m = -kt + c_1$$

або

$$m = e^{-kt} = e^{-k} e^t.$$

Позначивши сталу e^t через C , отримаємо загальний розв'язок рівняння:

$$m = C e^{-kt}.$$

Щоб визначити константу C , досить задати початкові умови. Наприклад, якщо відомо, що в початковий момент часу $t = 0$ маса препарату дорівнювала m_0 , то константа C буде рівна:

$$C = m_0 e^{k \cdot 0} = m_0,$$

тобто частинний розв'язок рівняння (5.19) в такому випадку має вигляд

$$m(t) = m_0 e^{-kt}. \quad (1.4.15)$$

Рис. 1.18 показує, як з плином часу змінюється маса, а значить і концентрація лікарського препарату у двох суб'єктів (криві 1 і 2) з різними значеннями постійної елімінації ($k_2 = 2 k_1$), початкові маси m_0 в обох випадках однакові. Як видно з (1.4.15), постійна елімінації – величина, обернена до проміжку часу t , за який маса препарату в крові зменшується в $e \approx 2,7$ рази, і є важливою суб'єктивною характеристикою організму.

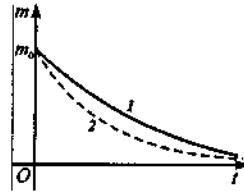


Рис. 1.18

2. *Однокамерна лінійна фармакокінетична модель із всмоктуванням* описує процеси, що відбуваються при внутрішньом'язовому та пероральному введенні препарату. При аналізі таких випадків зручно крім основної камери розглядати також підкамеру (депо). Депо моделює тканину, у яку введений препарат. Процес зміни маси (концентрації) препарату описується рівнянням

$$\frac{dm}{dt} = -km + \frac{dM}{dt}. \quad (1.4.16)$$

Другий доданок в правій частині характеризує поступове надходження препарату з депо (участок м'язової тканини, таблетка). Швидкість всмоктування препарату з депо прямо пропорційна його масі:

$$\frac{dM}{dt} = rM = rM_0 e^{-rt}, \quad (1.4.17)$$

Підставивши (1.4.17) в (1.4.16), отримаємо диференціальне рівняння, яке описує процес зміни маси лікарського препарату в однокамерній фармакокінетичній моделі зі всмоктуванням:

$$\frac{dm}{dt} = -km + rM_0 e^{-rt}$$

або

$$m' + km = rM_0 e^{-rt}.$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Щоб знайти його розв'язок, скористаємось (1.4.12).

$$m = e^{-kt} \left(\frac{rM_0}{k-r} e^{(k-r)t} + C \right)$$

або

$$m = e^{-kt} \left(C - \frac{rM_0}{r-k} e^{-(r-k)t} \right). \quad (1.4.18)$$

Враховуючи, що $m = 0$, при $t = 0$ знайдемо

$$C = \frac{rM_0}{r-k}.$$

Отже, частинний розв'язок рівняння (1.4.18) має вигляд:

$$m = e^{-kt} \cdot \frac{rM_0}{r-k} (1 - e^{-(r-k)t})$$

або більш зручно

$$m(t) = \frac{M_0 r}{r-k} (e^{-kt} - e^{-rt}), \quad (1.4.19)$$

де M_0 – початкова маса препарату у депо; k – постійна елімінації; r – константа, яка характеризує швидкість всмоктування.

З'ясуємо, який вигляд має графік залежності $m(t)$. Похідна $m'(t) = -\frac{M_0}{r-k} (k e^{-kt} - r e^{-rt})$ дорівнює нулю, якщо

$$k e^{-kt} - r e^{-rt} = 0.$$

Перетворивши цей вираз, бачимо, що

критичною точкою є $t = \frac{\ln \frac{k}{r}}{k-r}$. Перевіряючи зміну знаку похідної (враховуємо, що як правило $k < r$), переконуємось, що в даній точці функція має максимум. На рис. 1.19 графічно подано залежність $m(t)$

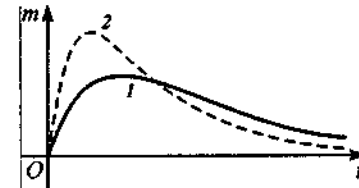


Рис. 1.19

для двох різних значень r ($r_2 > r_1$) при однакових значеннях k : крива 1 описує процес, який реалізується при поступовому надходженні препарату з депо; крива 2 – випадок швидкого надходження, така ситуація спостерігається, наприклад, під час прийому ліків з додаванням бікарбонату натрію (шпигучих таблеток). Порівняння графіків свідчить, що повільне всмоктування може забезпечити майже постійну концентрацію препарату в крові на тривалій проміжок часу.

3. Внутрішньовенне вливання за допомогою крапельниці дозволяє вводити лікарський препарат зі сталою швидкістю Q . Швидкість виведення, як і в попередніх випадках, прямо пропорційна масі препарату в крові. Диференціальне рівняння даної фармакокінетичної моделі має вигляд

$$\frac{dm}{dt} = Q - km.$$

Це неоднорідне лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Запишемо його у звичному вигляді:

$$\frac{dm}{dt} + km = Q. \quad (1.4.20)$$

Загальний розв'язок цього рівняння відповідно до (1.4.12)

$$m = e^{-\int k dt} \left(C + \int Q e^{\int k dt} dt \right) = e^{-kt} \left(\frac{Q}{k} e^{kt} + C \right).$$

За умови, що $t = 0$, $m = m_0$, знайдемо

$$C = m_0 - \frac{Q}{k}.$$

Отже, частинний розв'язок рівняння (1.4.20) має вигляд

$$m = e^{-kt} \left(\frac{Q}{k} e^{kt} + m_0 - \frac{Q}{k} \right)$$

або

$$m(t) = \frac{Q}{k} + \left(m_0 - \frac{Q}{k} \right) e^{-kt}. \quad (1.4.21)$$

Графік отриманої функції зображений на рис 1.9. Величина $\frac{Q}{k}$ має зміст рівноважної кількості лікарського препарату в крові, оскільки при $t \rightarrow \infty$ маса препарату $m(t)$ асимптотично наближається до значення $\frac{Q}{k}$.

У випадку, коли початкова маса препарату $m = 0$, рівняння (1.4.21) набуває вигляду

$$m(t) = \frac{Q}{k} (1 - e^{-kt}).$$

1.4.5. ЗВичайні лінійні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

Звичайне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Загальний вигляд неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

де $f(x)$ – доданок, вільний від невідомої функції, а p і q – сталі коефіцієнти. Однорідне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (1.4.22)$$

Поставимо згідно з (1.4.1) у відповідність цьому рівнянню характеристичне:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Знайдемо його корені

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

і відповідно до теореми, наведеної в п. 1.4.2, запишемо загальний розв'язок характеристичного рівняння.

Розглянемо три можливі випадки.

1. Підкореневий вираз $\frac{p^2}{4} - q > 0$. У цьому випадку обидва корені різні й існує два лінійно незалежних розв'язки

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad \text{і} \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

Загальний розв'язок (загальний інтеграл) має вигляд

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (1.4.23)$$

де C_1 і C_2 – довільні дійсні сталі.

2. Підкореневий вираз $\frac{p^2}{4} - q = 0$. У цьому випадку $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ – кратні корені.

Частинні розв'язки вибираються у вигляді: $y_1 = e^{\lambda x}$ та $y_2 = x e^{\lambda x}$.

Загальний розв'язок

$$y = C_1 e^{\lambda x} + x C_2 e^{\lambda x}. \quad (1.4.24)$$

3. Останній із розглянутих випадків більш складний і найбільш цікавий водночас. При $\frac{p^2}{4} - q < 0$ коренями є комплексно-спряжені числа:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} = \alpha \pm i\beta,$$

де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця; $\alpha = -\frac{p}{2}$ – дійсна частина; $i\beta = i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ – уявна частина комплексного числа.

Розв'язки диференціального рівняння мають вигляд:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x);$$

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

Ми скористалися формулою Ейлера $e^{\pm i\beta x} = \cos \beta x \pm i \sin \beta x$.

Складемо дві незалежні лінійні комбінації цих розв'язків таким чином:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Тоді загальний розв'язок можна подати у зручнішому вигляді

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (1.4.25)$$

Подавши, $C_1 = A \sin \varphi_0$, а $C_2 = A_0 \cos \varphi_0$, де A_0 та φ_0 стали величини, отримуємо $y = A_0 e^{\alpha x} \sin(\beta x + \varphi_0)$.

Отриманий розв'язок є рівнянням, яке описує коливальний процес, причому амплітуда коливань зростає при $\alpha > 0$, залишається постійною при $\alpha = 0$ і зменшується при $\alpha < 0$. Таким чином, задача розв'язання однорідного диференціального рівняння зводиться до розв'язання відповідного алгебраїчного характеристичного рівняння. Залежно від знаку дискримінанта характеристичного рівняння, загальний розв'язок набуває одного з трьох поданих вище видів.

1.4.6. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Розв'язати рівняння, яке описує процес радіоактивного розпаду:

$$N' = -rN.$$

Розв'язання. Враховуючи, що $N' = \frac{dN}{dt}$, дістанемо

$$\frac{dN}{dt} = -rN \quad \text{або} \quad \frac{dN}{N} = -r dt.$$

Зінтегрувавши ліву і праву частини, маємо загальний інтеграл:

$$\ln N = -rt + c,$$

звідси

$$N = e^{-rt+c} = e^c \cdot e^{-rt},$$

або, позначивши e^c через нову константу C , отримаємо загальний розв'язок рівняння:

$$N = C e^{-rt}.$$

Щоб знайти частинний розв'язок, потрібно визначити константу C . Для цього використаємо початкові умови. Наприклад, якщо відомо, що в початковий момент часу $t = 0$ кількість радіоактивних ядер дорівнювала N_0 , то константа C буде рівна:

$$C = N_0 e^0 = N_0,$$

тобто частинний розв'язок рівняння має вигляд

$$N(t) = N_0 e^{-rt}.$$

Часто замість величини r швидкості розпаду характеризують періодом напіврозпаду T_0 , тобто часом, протягом якого кількість радіоактивної речовини зменшується в 2 рази. Період напіврозпаду T_0 і коефіцієнт r зв'язані рівністю

$$T_0 = \frac{\ln 2}{r}.$$

2. Розв'язати рівняння $xy' + 1 = y$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{xy dy}{dx} = y - 1.$$

Помноживши обидві частини рівняння на dx і розділивши на $x(y-1)$, дістанемо

$$\frac{ydy}{y-1} = \frac{dx}{x}.$$

Змінні відокремлено. Зінтегруємо обидві частини рівняння, яке найзручніше записати у вигляді

$$\int dy + \int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x}.$$

Ми скористались тим, що y можна подати як $y = (y-1) + 1$. Результат інтегрування:

$$y + \ln |y-1| = \ln |x| + C.$$

Остання рівність, яка встановлює залежність між змінними x та y , і є загальним розв'язком заданого диференціального рівняння. Варто зауважити, що виконуючи ділення на вираз $x(y-1)$, ми припускали, що $x \neq 0$ і $y \neq 1$, і таким чином, могли втратити розв'язки $x = 0$ і $y = 1$. Підставляючи $x = 0$ і $y = 1$ у вихідне рівняння, переконуємось, що $y = 1$ є його розв'язком, а $x = 0$ – ні.

3. Система містить 100 л води, в якій розчинено 10 кг солі. У систему неперервно подається вода з об'ємною швидкістю $Q = 5$ л/хв. Скільки солі залишиться в системі через 1 годину, якщо об'єм системи незмінний (швидкість витікання розчину дорівнює швидкості подачі води Q)?

Розв'язання. Припустимо, $m(t)$ – кількість солі в момент часу t ; dm – зміна кількості солі за деякий достатньо малий проміжок часу dt , протягом якого можна вважати концентрацію солі $\frac{m}{V}$ незмінною. Тоді зміна кількості солі за час dt дорівнює $Q \frac{m}{V} dt$. Таким чином, отримаємо диференціальне рівняння

$$dm = -\frac{m}{V} Q dt$$

або

$$\int \frac{dm}{m} = -\frac{Q}{V} \int dt.$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$m = C e^{-\frac{Qt}{V}}.$$

Скориставшись початковими умовами: $m_0 = 10$ кг при $t_0 = 0$, знайдемо $C = 10$ кг. Отже,

$$m = 10 e^{-0,05t}.$$

Підставивши $t = 1$ год = 60 хв, матимемо $y = 10 e^{-3} \approx 0,5$ кг.

4. Розв'язати рівняння $y' - y = 2x + 3$.

Розв'язання. Записавши рівняння в вигляді $y' = y + 2x + 3$ і зробивши заміну $z = y + 2x$, матимемо $z' = y' + 2$ або $y' = z' - 2$. В результаті підстановки дістанемо

$$z' = z + 5$$

або

$$\frac{dz}{z+5} = dx.$$

Зінтегрувавши це рівняння, отримаємо загальний розв'язок:

$$\ln |z+5| = x + C$$

або, повернувшись до змінної x ,

$$\ln |y + 2x + 5| = x + C.$$

5. До пружини жорсткістю k , яка знаходиться на горизонтальній поверхні, прикріпили вантаж масою m . Вантаж виводиться з положення рівноваги і відпускається. Записати диференціальне рівняння коливань.

Розв'язання. Позначимо відхилення від положення рівноваги через $x(t)$, де t – час. На вантаж діє сила пружності $F = -kx$ і сила опору середовища, величина якої прямо пропорційна швидкості $F_{\text{оп}} = -r \frac{dx}{dt}$.

Обидві ці сили напрямлені протилежно до напрямку руху вантажу. Використовуючи другий закон Ньютона, отримаємо рівняння коливань:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}$$

або

$$x'' + 2\beta x' + \omega^2 x = 0,$$

де $2\beta = r/m$, $\omega^2 = k/m$.

6. Знайти розв'язок рівняння гармонічних коливань $y'' + \omega^2 y = 0$, де $y = f(t)$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Рівняння має два комплексно-спряжені корені: $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$. Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Якщо прийняти $C_1 = A \sin \phi_0$, а $C_2 = A \cos \phi_0$, дану функцію можна записати у вигляді

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$. Його корені: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Отже, розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x.$$

8. Розв'язати рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ з коренями:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

Розв'язок диференціального рівняння у відповідності з (1.4.24) дістанемо у вигляді:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} = e^{3x} (C_1 + x C_2).$$

9. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ має комплексні корені $\lambda_1 = 1 - i$, $\lambda_2 = 1 + i$. Значить, загальним розв'язком є:

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

1.4.7. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь.

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1. $y' = 2y^2$. | 2. $y' = 6x^5 + 1$. |
| 3. $xyy' = 0,5$. | 4. $xyy' = 1 - x^2$. |
| 5. $xy' = 2y$. | 6. $(x + a) dx = x dy$. |
| 7. $y' = -x^2 + 4$. | 8. $y' = \frac{1}{\sqrt{5 - x^2}}$. |
| 9. $y' = -\frac{y}{1+x}$. | 10. $\frac{dx}{dt} = x \cos t$. |
| 11. $y \operatorname{tg} x = y$. | 12. $y' = -\frac{y}{x}$. |
| 13. $x(1 - y^2) dx + y(1 - x^2) dy = 0$. | 14. $3y^2 y' = 2x(y^3 + 1)$. |

$$15. y' = -y^2 \sin x. \quad 16. y' = -x + 2^x.$$

$$17. xyy' = 1 - x. \quad 18. e^y y' = 4x^3.$$

$$19. \operatorname{tg} x \sin^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy = 0. \quad 20. \frac{dx}{dt} = x^2(1 + t^2).$$

Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь.

$$21. (1 + e^x) yy' = e^x, \quad \text{якщо } y = 1 \text{ при } x = 0.$$

$$22. y' \operatorname{tg} x = y \ln y, \quad \text{якщо } y = e \text{ при } x = \pi/4.$$

$$23. \sin x dx = -dy, \quad \text{якщо } y = 2 \text{ при } x = 0.$$

$$24. (x + 1) dy = y dx, \quad \text{якщо } y = 8 \text{ при } x = 1.$$

$$25. y dy - x dx = dx, \quad \text{якщо } y = 0 \text{ при } x = 2.$$

Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь другого порядку.

$$26. y'' - 5y' + 6y = 0. \quad 27. y'' - y = 0.$$

$$28. y'' - y' = 0. \quad 29. y'' + y = 0.$$

$$30. 3y'' - 2y' - 8y = 0. \quad 31. y'' + 49y = 0.$$

$$32. y'' - 4y' + 10y = 0. \quad 33. 3y'' + 2\sqrt{3}y' + 7y = 0.$$

$$34. y'' + 4y' + 13y = 0. \quad 35. y'' + 2y' + y = 0.$$

$$36. y'' - 4y' + 2y = 0. \quad 37. y'' - hy' = 0 \quad (h \neq 0).$$

$$38. \frac{y' + 2y}{y^2} = 3. \quad 39. y'' + \pi^2 y = 0.$$

$$40. y'' + 2y' + 5 = 0. \quad 41. y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Знайти загальні розв'язки однорідних диференціальних рівнянь.

$$42. xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}. \quad 43. xdy - ydx = xdx.$$

$$44. x^2 - y^2 + 2xyy' = 0. \quad 45. (x + y)y' = 1.$$

$$46. y' + 2xy = 0. \quad 47. y' - \frac{y}{x} = x.$$

48. Швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і оточуючого середовища. До якої температури охолонує тіло за 30 хвилин, якщо за 10 хвилин воно охолонуло від 100 до 60 °С. Температура оточуючого середовища незмінна.

49. Знайти закон зменшення маси лікувального препарату в організмі людини, якщо через 1 годину після введення 10 мг препарату його маса зменшиться вдвоє. Вважати, що швидкість розчинення прямо пропорційна часу.

50. Скорочення м'яза $x(t)$ описується рівнянням:

$$x' = A(x_0 - x),$$

де x_0 – повне скорочення м'яза; A – константа, яка залежить від навантаження. Знайти розв'язок цього рівняння, якщо в момент часу $t = 0$ $x = 0$.

51. Кінетика хімічних реакцій першого порядку описується рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x),$$

де k – константа реакції. Одержати розв'язок за умови: $a = 10$, $k = 0,2$.

52. Тіло рухається з прискоренням a і початковою швидкістю v_0 . Знайти закон руху цього тіла і шлях, пройдений за перші 10 хвилин руху.

Знайти загальні розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь.

53. $y' + 2y = e^{-x}$.

54. $xy' - 2y = x^3 \cos x$.

55. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

56. $y'x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$.

57. $(2x - y^2)y' = 2y$.

58. $y' - ye^x = 2xe^{e^x}$.

Встановити, до якого типу відносяться диференціальні рівняння і розв'язати їх.

59. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

60. $y'' = e^{2x}$.

61. $2x^2y' = y + 5x^2$.

62. $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

63. $\sqrt{x}dy + \frac{dx}{\sin y} = 0$.

64. $y'' + 4y' + 5y = 0$.

1.5. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.5.1. ЧАСТОТА ТА ЙМОВІРНІСТЬ ПОДІЇ

Історично теорія ймовірностей виникла в XVI–XVII ст. як наука, що математичними методами аналізує азартні ігри (Кардано, Гюйгенс, Паскаль, Ферма). Однак, не тільки результат гри, а й більшість природних та соціальних явищ є стохастичними, тобто такими, що їх кінцевий результат неможливо передбачити однозначно. Такі явища, їх в теорії ймовірностей називають *подіями*, часто зустрічаються в повсякденному житті й у макро- і мікросвіті, їх роль чимала і в медико-біологічних системах. Події можна поділити на три типи:

достовірні – ті, які відбуваються завжди;

неможливі – ті, які ніколи не мають місця;

випадкові (стохастичні) – ті, які можуть виникати або не виникати при виконанні певного комплексу умов.

Теорія ймовірностей займається вивченням закономірностей випадкових подій при їх масовій появі.

Для випадкових подій вводиться поняття частоти події – це відношення числа випробувань (дослідів, спостережень), в яких дана подія реалізується, до повного числа випробувань:

$$v(A) = \frac{m(A)}{n},$$

де $m(A)$ – число дослідів, в яких подія A реалізується; n – повне число дослідів.

Якщо число випробувань велике, то, як правило, частоти появи подій A в різних серіях дослідів мало відрізняються одна від одної і їх відмінність тим менша, чим більше випробувань в серії. Тобто частота події при великому числі випробувань перестає носити випадковий характер.

Наприклад, французький природознавець Ж. Бюфон досліджував частоту появи герба при киданні монети. При 4040 дослідях герб випав 2048 разів.

Отже частота появи герба $\frac{2048}{4040} = 0,50693$. Англійський математик К. Пірсон повторив цей експеримент 24 000 разів – герб випав 12012 разів. Таким чином, частота появи герба в цьому досліді становить 0,5005. Можна зробити висновок, що при дуже великій кількості дослідів частота появи герба приблизно дорівнює 0,5.

Аналіз статистичних даних, зібраних у Швеції в 1935 р., свідчить, що відносна частота народження дівчаток має значення, близьке до 0,482. Статистичні дані інших країн і за інші роки дають приблизно такі ж результати.

Ймовірністю $P(A)$ випадкової події A називається границя, до якої наближається частота події A при необмеженому зростанні повного числа випробувань, тобто

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(A)}{n}.$$

В теорії ймовірностей існує теорема (теорема Бернуллі), яка доводить, що при великому числі випробувань n частота події $\nu(A)$ наближається до ймовірності $P(A)$.

Наведене означення ймовірності називають *статистичним*. Однак, може трапитись ситуація, коли ви не маєте змоги (або не бажаєте) провести дослід. Як оцінити ймовірність в такому випадку? Наведемо ще одне означення, яке носить назву *класичного*.

Ймовірністю події A називають відношення кількості сприятливих для цієї події випадків до загального числа випадків, що можуть реалізуватися:

$$P(A) = \frac{m(A)}{n}.$$

Приклади.

1. Розглянемо колоду з 36 гральних карт. Нехай подія A полягає в тому, що довільно взята карта виявиться тузом. Сприятливими є 4 випадки із 36 можливих, тому

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Ймовірність події B , яка полягає в тому, що взята навздогад карта буде пікової масті,

$$P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

2. На трьох картках написані цифри 1, 2, 3. Яка ймовірність того, що, розташувавши їх довільним чином, отримаємо число 321?

Можливими є шість випадків: 123, 132, 231, 213, 321 та 312. Сприятливий – один. Тому шукана ймовірність $P = \frac{1}{6}$.

3. Кидаємо гральний кубик (однорідний кубик, грані якого пронумеровані). Яка ймовірність, що випаде парне число? Сприятливими є появи цифр 2, 4, 6, тому $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Події A_1, A_2, \dots, A_n називаються *рівноможливими*, якщо кожна із них має однакову ймовірність відбутися чи не відбутися.

У прикладі 3 рівноможливими подіями є поява парного або непарного числа. Рівноможливими подіями в цьому прикладі також є поява будь-якої цифри від 1 до 6: $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$.

Ймовірність будь-якої події задовольняє подвійну нерівність

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad (1.5.1)$$

причому ймовірність неможливої події дорівнює нулю, а достовірної – одиниці.

1.5.2. ОБ'ЄДНАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ

Введемо поняття *об'єднання (суми)* двох і більше випадкових подій. Об'єднання двох випадкових подій A_1 і A_2 – це така подія A , при якій відбувається хоча б одна з цих подій, тобто A_1 або A_2 . Символічно позначають: $A_1 \cup A_2$. Ймовірність об'єднання подій залежить від їхньої сумісності.

Події називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу іншої в одному і тому ж досліді; в протилежному випадку – події *сумісні*.

Як приклад, розглянемо однократне кидання грального кубика. Подія A – поява чотирьох очок; подія B – поява трьох очок; подія C – поява непарного числа. Події A та B в цьому прикладі є несумісними, B і C – сумісними.

Теорема додавання ймовірностей для несумісних подій. Ймовірність об'єднання двох випадкових несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей кожної події окремо, тобто

$$P(A_1 \text{ або } A_2) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2). \quad (6.2)$$

Доведення. Припустимо, що в n дослідів подія A_1 реалізується m разів, а подія A_2 – k разів. З урахуванням їхньої несумісності загальне число сприятливих випадків $m+k$. Відповідно до класичного означення

$$P(A_1 \text{ або } A_2) = P(A_1 \cup A_2) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A_1) + P(A_2).$$

Графічною ілюстрацією даного випадку є рис. 1.20, об'єднанню подій відповідає заштрихована область.

Якщо в результаті досліді обов'язково реалізується одна з подій A_1, A_2, \dots, A_n і ніяка інша подія реалізуватися не може, то говорять, що ці події утворюють *повну групу*.

Якщо для деякої події A сприятливими є всі n випадків, котрі утворюють повну групу несумісних подій, то ймовірність такої події

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Іншими словами, поява хоч однієї з подій,

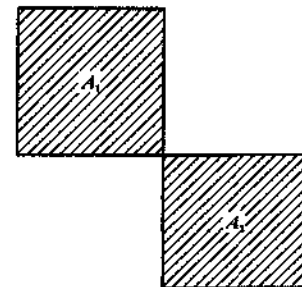


Рис. 1.20

що утворюють повну групу, є достовірною подією. Останню рівність часто записують у вигляді

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1 \quad (1.5.3)$$

і називають умовою нормування.

Дві події A і \bar{A} називаються **протилежними**, якщо вони несумісні і утворюють повну групу. Згідно з теоремою додавання ймовірностей

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

або

$$p + q = 1,$$

де $q = P(\bar{A})$, а $p = P(A)$. Тобто сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці.

Припустимо, що події A_1 та A_2 сумісні, тоді **теорема додавання ймовірностей** має вигляд:

$$P(A_1 \text{ або } A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \text{ і } A_2). \quad (1.5.4)$$

де $P(A_1 \text{ і } A_2)$ – ймовірність суміщення подій A_1 і A_2 . Зміст цього виразу пояснюється нижче.

Справедливість наведеної формули проілюструємо графічно (рис. 1.21). Об'єднанню подій відповідає заштрихована область. Зауважимо, що наведено не формулювання теореми є загальним, оскільки для несумісних подій A_1 та A_2 ймовірність $P(A_1 \text{ і } A_2) = 0$.

1.5.3. ПЕРЕТИН ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ

Перетином (добутком) подій A і B називається така подія, при якій одночасно реалізується випадкова подія A і випадкова подія B . Символічно позначають: $A \cap B$.

Подія A називається **незалежною** від події B , якщо ймовірність появи події A не залежить від того, реалізувалась подія B чи ні. В протилежному випадку подія називається **залежною**. Для залежних подій користуються поняттям умовної ймовірності $P_A(B)$ – ймовірності реалізації події B , за умови, що подія A відбулася.

Пояснимо це на прикладах.

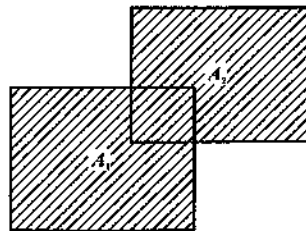


Рис. 1.21

Приклади.

1. Кидають гральний кубик. Ймовірність появи одиниці $P(A) = \frac{1}{6}$. Яка ймовірність того, що при повторному випробуванні знову випаде 1?

Подія B – поява 1 при повторному випробуванні – також має ймовірність $P(B) = \frac{1}{6}$. Події A та B в цьому прикладі незалежні.

2. В урні 2 білі та 2 чорні кульки. Подія A – витягти білу кульку. Очевидно, $P(A) = \frac{1}{2}$. Витягнута кулька не повертається в урну. Якою є ймовірність події B – вибрати білу кульку при повторному випробуванні?

Очевидно, результат суттєво залежить від того, яка кулька була витягнута першою:

$$P_A(B) = \frac{1}{3} \text{ – якщо реалізувалась подія } A;$$

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{2}{3} \text{ – якщо подія } A \text{ не реалізувалась.}$$

Події A та B в цьому прикладі є залежними.

Теорема множення ймовірностей для залежних подій. Ймовірність перетину двох залежних подій дорівнює добутку умовної ймовірності $P_A(B)$ на ймовірність $P(A)$ реалізації події A .

Математичний запис теореми множення ймовірностей для двох залежних подій:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \quad (1.5.5)$$

Доведення. Припустимо, що з усіх n випадків для події A сприятливими є k , а з цих k випадків події B сприяє m . Це означає, що події B сприяє m випадків з n , тобто

$$P(A \text{ і } B) = P(A \cap B) = \frac{m}{n} = \frac{k}{n} \cdot \frac{m}{k} = P(A) \cdot P_A(B).$$

Зауважимо, що у випадку незалежних подій A і B

$$P_A(B) = P(B).$$

Таким чином, **теорему множення ймовірностей для незалежних подій** можна сформулювати так:

Ймовірність перетину двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто

$$P(A \text{ і } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Графічний приклад перетину двох незалежних подій подано на рис. 1.22 (перетин подій – заштрихована область).

Припустимо, що в результаті випробування може з'явитися n незалежних в сукупності подій, ймовірність кожної з яких відома. Як знайти ймовірність того, що наступить хоча б одна з цих подій? Відповідь на це запитання дає теорема.

Теорема. Ймовірність реалізації події A , сприятливою для якої є поява хоча б однієї із незалежних в сукупності подій A_1, A_2, \dots, A_n , дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей $q_1 q_2 \dots q_n$ протилежних подій $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n.$$

Якщо події A_1, A_2, \dots, A_n мають однакову ймовірність, то остання формула набуває вигляду

$$P(A) = 1 - q^n. \quad (1.5.6)$$

Приклад. У відділенні три операційні. Для кожної з них ймовірність бути зайнятою (не бути вільною) в даний момент часу $q = 0,3$. Яка ймовірність, що хоча б одна операційна вільна в даний момент?

Згідно з (6.6) шукана ймовірність

$$P = 1 - (0,3)^3 = 1 - 0,027 = 0,973.$$

Зуважимо, що $(0,3)^3$ – ймовірність того, що всі три операційні зайняті. Події “всі операційні зайняті” та “хоча б одна вільна” є протилежними й, безумовно, утворюють повну групу.

1.5.4. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Теорема. Якщо подія A може реалізуватись тільки при виконанні однієї з подій B_1, B_2, \dots, B_n , які несумісні і утворюють повну групу, то ймовірність події A обчислюється за формулою

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A). \quad (1.5.7)$$

Ця формула носить назву **формули повної ймовірності**.

Розглянемо її застосування на прикладі.

Приклад. У діагностичний центр в рівних кількостях потрапляють пацієнти з трьох консультативних пунктів. Ймовірність, що діагноз буде підтверджено для пацієнтів з направленням першого пункту, становить 90 %, другого – 87 %, третього – 75 %. Яка ймовірність, що діагноз підтвердиться у взятого намання пацієнта?

Оскільки пацієнт вибирався довільним чином, то ймовірності, що він направлений одним певним консультативним пунктом із трьох можливих, однакові і дорівнюють $\frac{1}{3}$. Згідно з теоремою повної ймовірності

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 0,9 + \frac{1}{3} \cdot 0,87 + \frac{1}{3} \cdot 0,75 = 0,84.$$

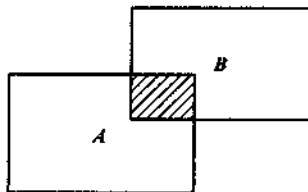


Рис. 1.22

Отже, ймовірність події A (підтвердження діагнозу у взятого намання пацієнта) становить 84 %.

Припустимо, що в рамках міркувань формули повної ймовірності проведено випробування, в результаті якого реалізувалась подія A . Як зміниться в зв'язку з цим ймовірність гіпотези (величини $P_A(B_i)$)? Відповідь на це запитання дає **формула Байєса**:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}. \quad (1.5.8)$$

Формула Байєса (її ще називають теоремою гіпотез) дозволяє переоцінити ймовірності гіпотез після того, як результат випробування став відомим.

Пояснимо застосування формули Байєса на попередньому прикладі.

Приклад. Припустимо, що у взятого намання пацієнта діагноз підтвердився. Яка ймовірність того, що він був направлений першим консультативним пунктом? Відповідно до формули (6.8), враховуючи, що знаменник був обчислений за теоремою повної ймовірності в попередньому прикладі, матимемо

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)} = \frac{0,9 \cdot \frac{1}{3}}{0,84} = 0,36.$$

Отже, у випадку відомого результату випробування (діагноз підтвердився) ймовірність того, що пацієнт був направлений першим консультативним пунктом, становить 36 %.

Сучасна медицина широко використовує різні методи комп'ютерної діагностики, більшість із яких послуговується формулою Байєса. На основі статистичної обробки великої кількості історій хвороб з підтвердженим діагнозом встановлюються ймовірності проявів певних симптомів при різних захворюваннях. За формулою Байєса розраховують ймовірності появи хвороб за наявної сукупності симптомів.

1.5.5. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ КОМБІНАТОРИКИ

В подальшому нам знадобляться формули для обчислення кількості комбінацій певного типу, які можуть бути складені з даних предметів. Найчастіше ця проблема виникає при розв'язуванні задач на основі класичного означення ймовірності. Розділ математики, що розглядає ці питання, називають **комбінаторикою**.

Розміщеннями з n різних елементів по m елементів ($m \leq n$) A_n^m називають комбінації, складені з даних n елементів по m , які відрізняються або самими елементами, або порядком розташування цих елементів.

Приклад. Телефонуючи приятелю, абонент забув дві останні цифри. Він пам'ятає лише, що ними можуть бути 3, 5, 7 і що ці цифри різні. Скільки існує варіантів набору даного номера?

З даних чисел по два можна скласти такі розміщення: 35, 37, 53, 57, 73, 75. Тобто $A_3^2 = 6$.

Число різних розміщень з n елементів по m обчислюється за формулою:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).$$

Окремий випадок розміщень, що має місце при $m = n$, називають *перестановками*. Число всіх перестановок

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!,$$

де $n!$ дорівнює добутку всіх чисел від 1 до n .

Сполученнями із n різних елементів по m елементів C_n^m називають комбінації, що складені із даних n елементів по m елементів, які відрізняються хоча б одним елементом.

Зауваження. В розміщеннях враховується порядок розташування елементів, а в сполученнях ні.

Число сполучень з n елементів по m обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!},$$

або

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Зазначимо корисну особливість

$$C_n^m = C_n^{n-m},$$

якою зручно користуватись, якщо $m > \frac{n}{2}$.

Приклад. Скількома способами із групи, в якій 10 студентів-фармацевтів, можна вибрати двох, щоб направити на практику в дану аптеку?

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45.$$

Уявімо собі, що ці студенти займатимуть різні посади. Кількість способів при цьому зросте (можна сказати, що тут відіграє роль порядок розташування елементів) і буде дорівнювати

$$A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90.$$

1.5.6. ПОВТОРНІ ВИПРОБУВАННЯ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ

Припустимо, що проводиться серія випробувань n , причому:

1) ймовірність події A в кожному випробуванні не залежить від результату інших випробувань;

2) у кожному з випробувань можливі два варіанти – подія A реалізувалася; подія A не реалізувалася;

3) всі випробування незалежні;

4) кількість дослідів n скінченна.

Потрібно знайти ймовірність того, що подія A реалізується рівно m разів у серії з n випробувань. Ця ймовірність визначається формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (1.5.9)$$

де p – ймовірність появи події A в одному досліді; $q = 1 - p$ – ймовірність того, що подія A не з'явиться в одному досліді; C_n^m – число можливих сполучень із n елементів по m :

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пояснимо застосування формули Бернуллі на прикладі.

Приклад. Припустимо, що схожість насіння $p = 0,8$. У розпорядженні експериментатора 5 насінин. Яка ймовірність, що проросте рівно три із них? Відповідно до (6.9) матимемо:

$$P_5(3) = \frac{5!}{3!2!} \cdot (0,8)^3 (0,2)^2 = 10 \cdot 0,512 \cdot 0,04 = 0,2.$$

Аналогічним чином можуть бути розраховані ймовірності проростання 0, 1, 2, 4, 5 насінин.

1.5.7. ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА.

ДИСКРЕТНІ ТА НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Випадковими називаються величини, які в результаті випробувань (вимірювань, спостережень) можуть набувати різних числових значень при однакових умовах випробувань.

Випадкові величини бувають:

1) *дискретними*, тобто такими, які набувають зліченної множини значень і їх можна пронумерувати;

2) *неперервними*, тобто такими, які набувають будь-яких значень в заданому скінченному або нескінченному інтервалі.

Наприклад, число народжених хлопчиків із 50 новонароджених є дискретною випадковою величиною, яка може набувати значень 0, 1, 2, ..., 50. Безумовно, ймовірності кожного з можливих значень P_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 50$) відрізнятимуться.

Неперервними випадковими величинами є: тривалість життя, температура повітря, біомаса тощо.

Розподілом дискретної випадкової величини X називається множина її можливих значень $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ і ймовірностей $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, які відповідають цим значенням. Як правило, розподіл випадкової дискретної величини задають таблицею.

X_1	X_2	X_3	...	X_{n-1}	X_n
P_1	P_2	P_3	...	P_{n-1}	P_n

Зрозуміло, що сума всіх ймовірностей повинна дорівнювати одиниці.

Неперервні випадкові величини неможливо задати таблицею розподілу, їх задають графічно або аналітично (інтегральною і диференціальною функціями розподілу). Інтегральною функцією розподілу описують і дискретні випадкові величини.

1.5.8. ІНТЕГРАЛЬНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ

Інтегральною функцією розподілу (інтегральним законом розподілу) випадкової величини X називається функція $F(x)$, яка дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X набуде значення менше, ніж x :

$$F(x) = P(X < x),$$

де x – дійсне число.

Основні властивості інтегральної функції розподілу.

$$1. 0 \leq F(x) \leq 1.$$

$$2. F(x) \text{ – неспадна функція, тобто, якщо } x_1 < x_2, \text{ то } F(x_1) \leq F(x_2).$$

3. Ймовірність попадання випадкової величини в напівінтервал $[a; b)$ дорівнює різниці значень інтегральної функції розподілу на кінцях цього інтервалу:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

4. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде будь-якого наперед заданого значення, дорівнює нулю:

$$P(X = x_0) = 0.$$

5. Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервал, сегмент і напівінтервал з одними і тими ж значеннями кінців однакова:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b).$$

6. Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать деякому інтервалу $(a; b)$, то:

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leq a;$$

$$F(x) = 1 \text{ при } x \geq b.$$

Відзначимо, що інтегральна функція розподілу однакою чином визначається для дискретних і неперервних випадкових величин. Для неперервної випадкової величини функція розподілу є неперервною і має вигляд, подібний до зображеного на рис. 1.23. Графік функції розподілу дискретної випадкової величини, всі значення якої належать $[a; b]$, подано на рис. 1.24.

Для дискретної випадкової величини функція розподілу в деякій точці x дорівнює сумі ймовірностей тих її значень, які менші від x :

$$F(x) = \sum_{X_i < x} P(X_i).$$

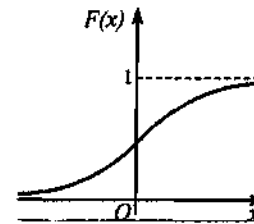


Рис. 1.23

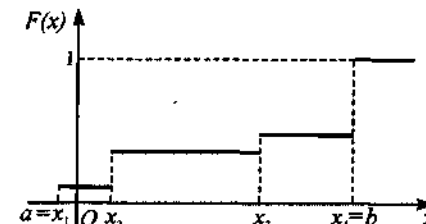


Рис. 1.24

Диференціальною функцією розподілу (щільністю або густиною розподілу) називається функція $f(x)$, яка дорівнює похідній інтегральної функції розподілу:

$$f(x) = F'(x).$$

Оскільки $F(x)$ – неспадна функція, то $f(x) \geq 0$. Очевидно, що поняття диференціальної функції розподілу можна ввести лише для неперервних випадкових величин.

Теорема. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде значення з деякого інтервалу $(a; b)$, дорівнює визначеному інтегралу від її щільності розподілу $f(x)$ з межами інтегрування a і b :

$$\int_a^b f(x) dx = P(a < X < b). \quad (1.5.10)$$

Доведення. Згідно з (6.10)

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

Відповідно до формули Ньютона–Лейбніца

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (1.5.11)$$

Теорему доведено.

Геометричний зміст цієї формули очевидний. Імовірність попадання значень випадкової величини X в даний інтервал дорівнює площі фігури, обмеженої кривою, яка задає щільність розподілу, віссю абсцис і прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 1.25). Безумовно, що

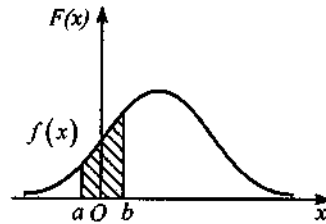


Рис. 1.25

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Знаючи щільність розподілу, можна знайти функцію розподілу

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (1.5.12)$$

Дійсно, замінюючи в (6.11) a на $-\infty$, b на x , матимемо (1.5.12).

1.5.9. ОСНОВНІ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називається сума добутків всіх можливих значень величини X на відповідні ймовірності:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n P_i X_i = P_1 X_1 + P_2 X_2 + \dots + P_n X_n. \quad (1.5.13)$$

Якщо всі випадкові події рівноймовірні, то

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n = \frac{1}{n},$$

де n – число випадкових подій, що утворюють повну групу.

В цьому окремому випадку математичне сподівання

$$M(X) = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

Математичне сподівання (МС) дискретної випадкової величини X при достатньо великому числі випробувань приблизно дорівнює середньому її значенню.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини обчислюється за формулою

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (1.5.14)$$

Не варто ототожнювати МС з найімовірнішим значенням випадкової величини, яке називають *модой*. МС може не співпадати з жодним значенням випадкової величини. Наприклад, МС кількості очок, що випадають при киданні грального кубика:

$$M(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5.$$

Імовірність появи такого числа дорівнює 0.

Фізичною аналогією МС є поняття центра мас.

Властивості математичного сподівання.

1. МС постійної величини C дорівнює цій величині:

$$M(C) = C.$$

2. Постійний множник можна виносити за знак МС:

$$M(CX) = CM(X).$$

3. МС суми двох незалежних випадкових величин X та Y дорівнює сумі їхніх МС:

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

4. МС добутку двох незалежних величин дорівнює добутку їхніх МС:

$$M(XY) = M(X) M(Y).$$

Математичне сподівання неповно характеризує розподіл випадкової величини. Важливо знати як "розкидані" можливі значення випадкової величини відносно свого МС. Наприклад, при однаковій середній величині річних опадів один регіон може бути засушливим і несприятливим для землеробства (відсутні опади весною та літом), а інший – цілком сприятливим. Інший приклад, чи може бути інформативним середнє значення температури пацієнта у деякому відділенні клініки? Очевидною стає необхідність введення числової характеристики, за якою можна було б робити висновок про розкид можливих значень випадкової величини відносно МС.

Дисперсією $D(X)$ випадкової величини X називається МС квадрата відхилення випадкової величини X від її МС:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2].$$

Інший вираз для дисперсії:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X), \quad (1.5.15)$$

тобто дисперсія – це різниця МС квадрата випадкової величини і квадрата МС цієї величини. Зрозуміло, що дисперсія характеризує відхилення випадкових величин відносно їх середнього значення (математичного сподівання).

Дисперсія неперервної випадкової величини з математичним сподіванням $M(X) = a$ обчислюється за формулою

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 f(x) dx.$$

Властивості дисперсії.

1. Дисперсія сталої величини C дорівнює нулю:

$$D(C) = M(C^2) - M^2(C) = 0.$$

2. Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрата:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3. Дисперсія алгебраїчної суми двох незалежних випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі дисперсій цих величин:

$$D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y).$$

Розмірність дисперсії збігається з розмірністю квадрата величини, яка досліджується. Тому для характеристики відхилення не середнього квадрата, а самої випадкової величини, вводиться поняття середнього квадратичного відхилення σ . Середнє квадратичне відхилення пов'язане з дисперсією формулою

$$\sigma = \sqrt{D(X)}. \quad (1.5.16)$$

Видно, що розмірність σ співпадає з розмірністю самої випадкової величини X .

1.5.10. ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Біномний розподіл. Припустимо, що проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких може реалізуватись подія A , імовірність появи якої p постійна у всіх випробуваннях (значить, імовірність не появи $q = 1 - p$). Розглянемо як дискретну випадкову величину X число появ події A в цих випробуваннях. Оскільки подія A в випробуваннях може не з'явитись, з'явитись один або два рази, ..., або n разів, то можливими значеннями X є: 0, 1, 2, 3, ..., n . Імовірності цих значень визначаються формулою Бернуллі (1.5.9):

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

де p – імовірність появи події A в одному досліді; $q = 1 - p$ – імовірність того, що подія A не з'явиться в одному досліді; C_n^m – число можливих сполучень із n елементів по m :

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Отже, біномним називають розподіл імовірностей, які визначаються формулою Бернуллі. Подамо його у вигляді таблиці.

X	0	1	...	m	...	n
P	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$...	$C_n^m p^m q^{n-m}$...	p^n

Математичне сподівання випадкової величини X , розподіленої за біномним законом:

$$M(X) = np. \quad (1.5.17)$$

Дисперсія

$$D(X) = npq,$$

а значить, середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}. \quad (1.5.18)$$

Біномному розподілу підпорядковуються такі випадкові події, як виклик швидкої допомоги, число операцій, ріст бактерій, деякі характеристики епідемій тощо. Якщо число дослідів велике, то обчислення ймовірностей за формулою Бернуллі громіздкі, тоді використовують пуассонівське наближення.

Розподіл Пуассона. Для визначення ймовірності того, що подія, ймовірність якої мала ($p < 0,1$), відбудеться m разів у серії з n випробувань (n достатньо велике), використовують формулу Пуассона

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad (1.5.19)$$

де $\lambda = np$ – середнє значення числа випадків, в яких реалізується дана подія.

Це наближення є особливо вдалим, коли ймовірність події A невелика, тому формулу Пуассона часто називають законом рідкісних подій. Говорять, що випадкова величина X розподілена за законом Пуассона, якщо ця величина задана таблицею.

X	0	1	2	3	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda}$...

Розподіл Пуассона використовується в теорії масового обслуговування, теорії надійності, при вирішуванні проблем, пов'язаних з використанням медичної апаратури тощо. Математичне сподівання дискретної величини X , розподіленої за законом Пуассона:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n P_i X_i = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

Дисперсія

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Використання апроксимаційної формули Пуассона коректне, якщо n не менш декількох десятків, а λ при цьому не перевищує 10. Якщо ж $\lambda \geq 10$, доцільніше користуватись формулою Муавра–Лапласа (див. п. 1.5.15).

1.5.11. ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Рівномірний розподіл. Розподіл ймовірностей називають рівномірним, якщо на проміжку (a, b) , до якого належать всі можливі значення випадкової величини X , щільність розподілу має постійне значення c , тобто

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ c & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Звідси

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b c dx = c(b-a).$$

Але, як відомо,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

З порівняння цих рівностей отримаємо

$$c = \frac{1}{b-a}.$$

Отже, щільність ймовірностей неперервної випадкової величини X , яка розподілена рівномірно на проміжку (a, b) , має вигляд (рис. 1.26, а):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Інтегральна функція розподілу $F(x)$ для рівномірно розподіленої величини на проміжку

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}.$$

Її графік подано на рис. 1.26, б.

Наведемо приклад деяких конкретних величин з рівномірним законом розподілу. При вимірюванні багатьох фізичних величин проводяться округ-

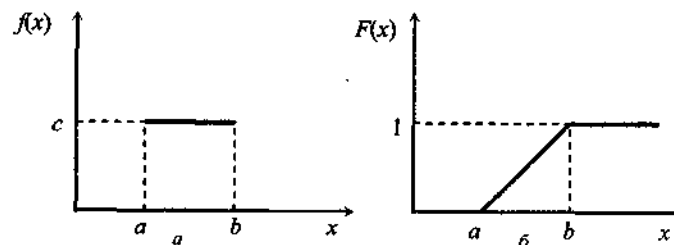


Рис. 1.26

лення до найближчої поділки шкали. Похибки (помилки) при округленні і є випадковою величиною, що має рівномірний закон розподілу. Симетричне колесо, яке обертається і зупиняється внаслідок тертя (рулетка в казино), утворює деякий кут між рухомих і нерухомих радіусом; значення цього кута – випадкова величина з рівномірним законом розподілу.

Експоненціальний розподіл. Показниковим (експоненціальним) називають розподіл імовірностей випадкової величини X , який описується функцією щільності:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

де λ – стала додатна величина.

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини дорівнюють:

$$M(X) = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Звідси видно, що показниковий розподіл визначається лише одним параметром λ .

Знайдемо інтегральну функцію розподілу показникового закону:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Отже, $F(x) = 0$ при $x < 0$ і $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$. Графіки інтегральної та диференціальної функцій розподілу подані на рис. 1.27 та 1.28.

Нормальний розподіл (розподіл Гаусса). Закон розподілу неперервної випадкової величини X називається нормальним, якщо щільність розподілу дорівнює

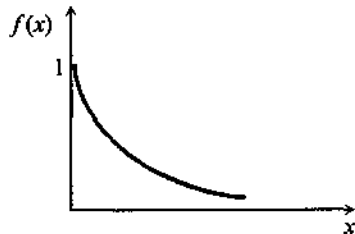


Рис. 1.27

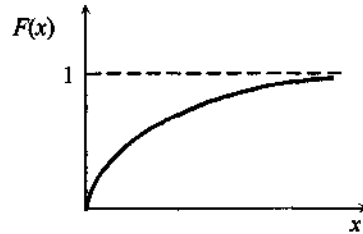


Рис. 1.28

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Графік розподілу Гаусса описується симетричною відносно $a = M(X)$ кривою (рис. 1.29), σ має зміст середнього квадратичного відхилення $\sigma = \sqrt{D(X)}$. При $x = a$ ордината кривої нормальної щільності ймовірності дорівнює

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

При збільшенні σ ця ордината зменшується. При цьому крива пропорційно сплющується вздовж осі ординат так, що обмежена графіком площа залишається рівною одиниці (рис. 1.30, криві 1 і 2). Іншими словами, розкид можливих значень випадкової величини збільшується при збільшенні σ . Форма кривої Гаусса не залежить від a : при різних a вона лише паралельно зміщується вздовж осі абсцис.

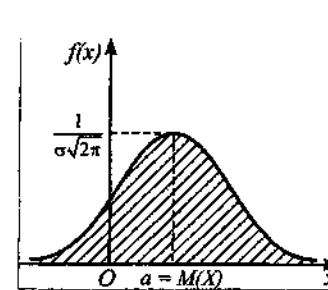


Рис. 1.29

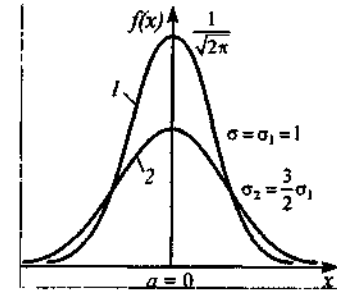


Рис. 1.30

Нормальний розподіл з параметрами $a = 0$ та $\sigma = 1$ називають *стандартним (нормованим)*. Щільність розподілу в такому випадку дорівнює

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Значення функції $\varphi(x)$ наведені в табл. 1 додатку, а графік подано на рис. 1.30 (крива 1). Інтегральна функція розподілу (див. рис. 1.23) має вигляд

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (1.5.20)$$

1.5.12. ІМОВІРНІСТЬ ПОПАДАННЯ ЗНАЧЕНЬ НОРМАЛЬНО РОЗПОДІЛЕНОЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ В ЗАДАНИЙ ІНТЕРВАЛ. ФУНКЦІЯ ЛАПЛАСА

Припустимо, що випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Тоді ймовірність того, що X набуде значення з інтервалу (α, β) , дорівнює:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Зробимо підстановку $\frac{x-a}{\sigma} = t$. Тоді: $x = a + \sigma t$, а $dx = \sigma dt$. Функція щільності нормально розподіленої величини набуде при цьому нормованого виду і ми матимемо:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Отриманий інтеграл не береться в елементарних функціях, тому для його обчислення вводять функцію

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (1.5.21)$$

яка називається функцією Лапласа (інтегралом ймовірностей).

Порівнюючи (1.5.20) та (1.5.21) з урахуванням того, що $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}$, бачимо, що у випадку нормованого нормального розподілу $\Phi(x) = F(x) - \frac{1}{2}$.

Для обчислення функції Лапласа складено таблицю, наведену в додатку (табл. 2).

Основні властивості функції Лапласа.

1. $\Phi(x)$ визначена при всіх значеннях $x \in \mathbb{R}$.
2. $\Phi(x)$ – непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
3. $\Phi(0) = 0$.
4. $\Phi(x)$ – монотонно зростаюча функція.

За допомогою функції Лапласа можна знайти ймовірність попадання значень нормально розподіленої випадкової величини в будь-який інтервал

(α, β) числової осі. Згідно з (6.10) та (6.21) з урахуванням виконаної раніше підстановки $t = \frac{x-a}{\sigma}$:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1). \quad (1.5.22)$$

Часто потрібно знайти ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від її математичного сподівання за абсолютною величиною не перевищуватиме заданого додатного числа δ . Враховуючи (6.22) і непарність функції $\Phi(X)$, матимемо:

$$P(|X - a| < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \quad (1.5.23)$$

Оскільки мірою розкиду значень випадкової величини є середнє квадратичне відхилення σ , то на практиці часто використовують значення δ , які кратні σ . Обчислимо:

$$P(|X - a| < \sigma) = P(a - \sigma < X < a + \sigma) = \Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(1) = 0,683;$$

$$P(|X - a| < 2\sigma) = P(a - 2\sigma < X < a + 2\sigma) = \Phi\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{2\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(2) = 0,954;$$

$$P(|X - a| < 3\sigma) = P(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) = \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 0,997.$$

Остання рівність свідчить, що майже достовірно ($P = 0,997$) випадкова величина (похибка) не відхилиться від математичного сподівання за модулем більше, ніж на 3σ . Це твердження називають правилом трьох сигм. Рис. 1.31 ілюструє проведені обчислення.

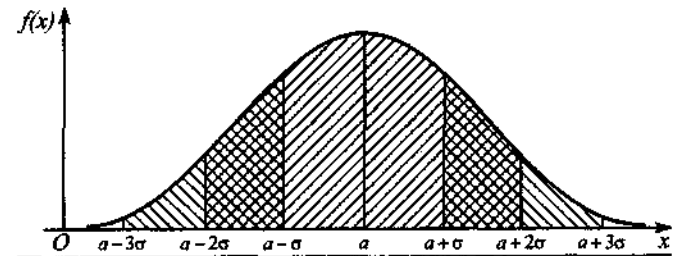


Рис. 1.31

Приклад. Маса таблетки, що виготовляється автоматом, – випадкова величина з нормальним законом розподілу, параметри якого $a = 100$ мг, $\sigma^2 = 1/900$ мг². Знайти ймовірність браку, якщо допустимі значення $(100 \pm 0,05)$ мг.

Використавши (1.5.22), знайдемо ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(100 - \delta; 100 + \delta)$, де $\delta = 0,05$:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{0,05}{1730}\right) = 2\Phi(1,5).$$

За табл. 2 додатку $\Phi(1,5) = 0,4332$. Тому $P(|X - a| < \delta) = 2 \cdot 0,4332 = 0,8664$. Шукає ймовірність

$$P(|X - a| > \delta) = 1 - 0,8664 = 0,1336.$$

1.5.13. ДЕЯКІ ІНШІ РОЗПОДІЛИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Розподіл "хі-квадрат". Припустимо, $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ – нормально розподілені незалежні випадкові величини, математичне сподівання кожної з яких дорівнює нулю, а середнє квадратичне відхилення – одиниці. Тоді сума квадратів цих величин

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

має розподіл χ^2 ("хі-квадрат") з $k = n$ ступенями вільності. Якщо ж ці величини пов'язані між собою декількома (наприклад, m) лінійними співвідношеннями, то число ступенів вільності $k = n - m$. На рис. 1.32 подано графік щільності розподілу χ^2 при $k = 4$ ступенях вільності (а)

та графік функції розподілу (б). При збільшенні числа ступенів вільності розподіл χ^2 наближується до нормального.

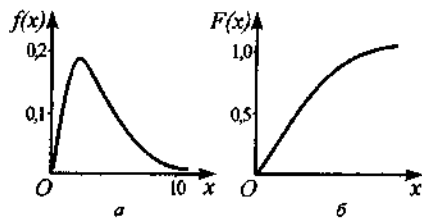


Рис. 1.32

Розподіл Стьюдента. Припустимо, що Z – нормально розподілена нормована випадкова величина ($\mu(Z) = 0, \sigma(Z) = 1$), а V – незалежна від Z величина, що має розподіл χ^2 з k ступенями вільності. Відношення нормованої нормальної величини до кореня квадратного з незалежної випадкової величини, розподіленої за законом χ^2 , поділеної на кількість ступенів вільності цього розподілу k , називають розподілом Стьюдента:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{k}}}.$$

Розподіл Стьюдента повністю визначається числом ступенів вільності і є парною функцією. Щільність ймовірності розподілу Стьюдента:

$$s(t, k) = B_k \left(1 + \frac{t^2}{k-1}\right)^{-\frac{k}{2}},$$

де B_k – коефіцієнт, який залежить від об'єму вибірки.

Графіки щільності розподілу (а) та функції розподілу (б) Стьюдента з одним ступенем вільності подано на рис. 1.33. При збільшенні числа ступенів вільності розподіл Стьюдента наближається до нормального.

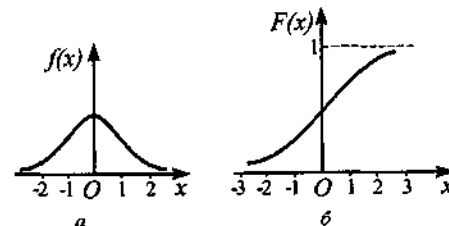


Рис. 1.33

Розподіл Фішера–Снедекора. Припустимо, U і V – незалежні випадкові величини, які мають розподіл χ^2 із ступенями вільності k_1 та k_2 . Закон розподілу величини $F = \frac{U/k_1}{V/k_2}$ називають розподілом Фішера–Снедекора зі ступенями вільності k_1 та k_2 . Графіки щільності розподілу (а) та функції розподілу (б) Фішера–Снедекора з числом ступенів вільності $k_1 = 4, k_2 = 4$ подано на рис. 1.34.

Той факт, що розподіли Стьюдента, χ^2 та Фішера–Снедекора повністю визначаються числом ступенів вільності, є їхньою значною перевагою і робить їх надзвичайно корисними при розв'язуванні задач математичної статистики.

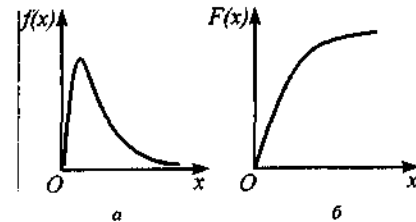


Рис. 1.34

1.5.14. ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

Відомо, що нормально розподілені величини досить часто зустрічаються на практиці. Такий розподіл має ймовірність влучення при стрільбі, похибки при вимірюваннях. Нормальному закону підпорядковується розподіл таких фізіологічних параметрів, як зріст, вага, артеріальний тиск, довжина судин, частота серцевих скорочень тощо. Чим це обумовлене? Пояснення причин широкого поширення нормального закону можна зробити на основі теореми Ляпунова (центральної граничної теореми).

Теорема. Якщо випадкова величина X може розглядатись як сума великого числа взаємно незалежних випадкових величин, вплив кожної з яких на всю суму нескінченно малий, то закон розподілу цієї випадкової величини X , близький до нормального, незалежно від того, які закони розподілу окремих доданків.

Припустимо, що вимірюється деяка величина. Різниця між результатом вимірювання X та істинним значенням величини a , яка вимірюється, називається похибкою. Внаслідок дії на вимірювання великої кількості факторів, які неможливо врахувати (коливання температури, механічні коливання приладу тощо), похибку вимірювань можна вважати сумою великої кількості незалежних випадкових величин, яка згідно з центральною граничною теоремою повинна мати нормальний розподіл. Якщо при цьому відсутні фактори, які призводять до систематичних похибок, то математичне сподівання випадкових похибок дорівнює нулю.

1.5.15. ЛОКАЛЬНА ТА ІНТЕГРАЛЬНА ТЕОРЕМИ ЛАПЛАСА

Використання функції Лапласа не вичерпується випадком неперервних нормально розподілених випадкових величин. Раніше розглядалась формула Бернуллі, яка дозволяє обчислити ймовірність того, що подія A з'явиться рівно k разів в n випробуваннях. При цьому ми вважали, що ймовірність появи події p в кожному випробуванні однакова. Легко побачити, що при великих n користуватись формулою Бернуллі досить складно, оскільки вона вимагає виконання дій над величезними числами. Локальна теорема Лапласа свідчить, що асимптотичною формулою для визначення такої ймовірності є (1.5.19) з урахуванням того, що математичне сподівання, згідно з (1.5.17), $a = M(X) = np$, а середнє квадратичне відхилення, відповідно до (1.5.18), $\sigma = \sqrt{npq}$.

Теорема. Якщо ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля та одиниці, то ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A з'явиться рівно k разів в n випробуваннях, приблизно дорівнює значенню функції

$$f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad (1.5.24)$$

де $x = \frac{k - np}{\sigma}$ – нормоване значення змінної.

Відзначимо, що для окремого випадку $p = \frac{1}{2}$ асимптотична формула була знайдена Муавром в 1730 р. В 1783 р. Лаплас узагальнив формулу Муавра

для довільного p , відмінного від 0 та 1. Тому інколи формулу (1.5.24) називають формулою Муавра–Лапласа. При розрахунках за цією формулою використовують табульовані значення $\varphi(x)$, наведені в табл. 1 додатку.

Припустимо, що проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події A постійна і рівна p . Як обчислити ймовірність того, що подія A з'явиться в n випробуваннях не менше k_1 і не більше k_2 разів? На це запитання дає відповідь інтегральна теорема Лапласа.

Теорема. Якщо ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна, то ймовірність того, що подія A з'явиться в n випробуваннях від k_1 до k_2 разів, приблизно дорівнює визначеному інтегралу

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k_1 - a}{\sigma}}^{\frac{k_2 - a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

де $a = np$, а $\sigma = \sqrt{npq}$.

Використавши прийняті позначення, запишемо що формулу в більш зручному для використання вигляді:

$$P(k_1 < X < k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1). \quad (1.5.25)$$

Для розрахунків за цією формулою користуються табл. 2 додатку. Отриманий результат тим точніший, чим більша дисперсія $D = npq$ (тобто чим більше n , оскільки максимальне значення добутку $pq = 0,25$ досягається при $q = p = 0,5$).

1.5.16. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ ЧЕБИШОВА

Теорема Чебишова. Якщо дисперсії незалежних випадкових величин обмежені однією і тією ж постійною C , то, яким малим не було б ϵ ($\epsilon > 0$), ймовірність виконання нерівності $|\bar{X} - M(\bar{X})| < \epsilon$ буде як завжди близькою до одиниці, якщо число випробувань достатньо велике:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \epsilon) = 1,$$

де $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$.

Таким чином, середнє арифметичне \bar{X} достатньо великого числа незалежних випадкових величин (дисперсії яких обмежені) втрачає характер

випадкової величини. Теорема Чебишова справедлива як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин і має неопінене практичне значення. Наприклад, при вимірюванні деякої фізичної величини за істинне значення приймають середнє арифметичне результатів декількох вимірювань. В якому випадку такий підхід можна вважати вірним? Відповідь на це питання дає теорема Чебишова. Для цього потрібно щоб: по-перше, результати вимірювань були попарно незалежними; по-друге, мали одне і те ж математичне сподівання (вимірювання проведені без систематичних похибок); по-третє, дисперсії їх були б рівномірно обмеженими (прилад повинен забезпечувати певну точність вимірювань).

На теоремі Чебишова базується також і широко вживаний у статистиці вибірковий метод, згідно з яким за порівняно невеликою випадковою вибіркою роблять висновок відносно всієї сукупності досліджуваних об'єктів.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Записати повну групу подій (множину генотипів), які можуть утворюватися при схрещуванні особин типу: 1) $Aa \times Aa$ – гетерозиготи; 2) $AA \times aa$ – гомозиготи. Знайти ймовірність появи кожного з генотипів.

Розв'язання. В даній задачі ми розглядаємо генотипи і успадкування лише для однієї пари генів (успадковуються колір очей, здатність бути лівшею тощо). Генотип нащадка залежить від випадкових процесів. За будь-яких умов кожен батьківський ген може передаватись з імовірністю 0,5. Послідовні випробування незалежні.

1) У цьому випадку можливі варіанти AA , Aa , aA , aa , імовірність появи кожного з них $\frac{1}{4}$. Але, якщо між парами Aa і aA відмінностей немає, то ймовірність появи генотипу Aa визначається за теоремою додавання ймовірностей:

$$P(Aa) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, отримаємо: $P(AA) = \frac{1}{4}$; $P(Aa) = \frac{1}{2}$; $P(aa) = \frac{1}{4}$.

2) Схрещування $AA \times aa$ може привести до появи лише особин Aa , тобто в цьому випадку $P(Aa) = 1$.

2. Багато генів, зчеплених зі статтю, є рецесивними і викликають дефекти (дальтонізм, гемофілія). Нехай a – такий ген. Тоді дефект мають всі чоловіки типу a та жінки aa (жінки типу Aa дефекту не мають, але можуть передавати його потомкам). Яка ймовірність дальтонізму у жінок, якщо в середньому на 100 осіб чоловічої статі один дальтонік?

Розв'язання. Відповідно до статистичного означення ймовірність дальтонізму у чоловіків $P(a) = \frac{1}{100}$. Це є ймовірність появи гену a в парі.

Ймовірність знайти пару, в якій два гени a , може бути знайдена за теоремою множення ймовірностей

$$P(aa) = P(a) \cdot P(a) = 10^{-4}.$$

Ймовірність дальтонізму у жінок 0,0001.

3. За статистичними даними групи крові A мають 36,9 % всіх європейців, групу B – 23,5 %, групу AB – 0,6 %, групу O – 39 %. Знайти ймовірність того, що у довільно взятого донора-європейця група крові A або B .

Розв'язання. Згідно до статистичного визначення ймовірностей $P(A) = 0,369$, $P(B) = 0,235$.

Використовуючи теорему додавання ймовірностей для несумісних подій, одержимо:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,369 + 0,235 = 0,604.$$

4. Ймовірність відмови певного елемента в системі $P_i = 0,05$. Для підвищення надійності замість одного елемента в систему введено $n = 5$ аналогічних елементів. Знайти ймовірність безвідмовної роботи системи за умови, що система виходить із ладу, якщо не спрацюють всі п'ять.

Розв'язання. Ймовірність відмови п'яти елементів визначається за теоремою множення ймовірностей

$$P = P_i^5 = 3,125 \cdot 10^{-7}.$$

Ймовірність безвідмовної роботи системи є протилежною подією і дорівнює:

$$Q = 1 - P = 1 - 3,125 \cdot 10^{-7} = 0,9999997.$$

5. На обстеження прибула група з 10 чоловік. Троє з них хворі. Лікар запрошує до кабінету по два пацієнти. Знайти ймовірність того, що вони обидва є: 1) хворі, 2) здорові.

Розв'язання. 1) Позначимо події: A – перша людина, яка заходить до лікаря, хвора; B – друга людина хвора.

Події залежні, тому теорему множення ймовірностей запишемо в вигляді

$$P(A \text{ і } B) = P(A) \cdot P_A(B),$$

де $P(A) = \frac{3}{10}$; $P_A(B) = \frac{2}{9}$.

$$\text{Отже, } P(A \cap B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}.$$

2) Аналогічно C – перший пацієнт здоровий, D – другий здоровий:

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}.$$

6. В сім'ї троє дітей. Враховуючи, що ймовірність народження хлопчика 0,52, знайти ймовірність того, що в сім'ї: 1) три хлопчики, 2) діти однієї та другої статі.

Розв'язання. Оскільки стать кожної наступної дитини не залежить від статі попередньої (це є припущення), то ми маємо справу з незалежними подіями.

1) Ймовірність того, що всі троє дітей – хлопчики, може бути визначена за теоремою множення ймовірностей

$$P(X \cap X \cap X) = 0,52 \cdot 0,52 \cdot 0,52 = (0,52)^3 = 0,14.$$

2) Подія, яка полягає в тому, що в сім'ї є діти двох статей, є протилежною до події, яка полягає в тому, що в сім'ї лише хлопчики або лише дівчатка. Тому шукана ймовірність P визначається

$$P = 1 - [P(X \cap X \cap X) + P(D \cap D \cap D)],$$

де $P(X \cap X \cap X)$ – ймовірність того, що в сім'ї лише хлопчики; $P(D \cap D \cap D) = (0,48)^3$ – ймовірність того, що в сім'ї лише дівчатка.

Шукана ймовірність $P = 1 - (0,52)^3 - (0,48)^3 = 0,75$.

7. Знайти ймовірність того, що в сім'ї з п'яти дітей двоє хлопчиків. Вважати, що ймовірність народження хлопчика 0,52 і стать наступної дитини не залежить від статі попередньої.

Розв'язання. Використаємо формулу Бернуллі (6.9):

$$P = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m},$$

де $q = 1 - p$; $n = 5$; $m = 2$. Тоді $q = 1 - p = 1 - 0,52 = 0,48$.

Отже

$$P = \frac{5!}{2!3!} \cdot (0,52)^2 \cdot (0,48)^3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} (0,52)^2 (0,48)^3 = 0,299.$$

8. Великій кількості людей N потрібно зробити аналіз крові на певне захворювання. Для цього утворюють групи по k осіб. Проби крові людей, що входять до однієї групи, змішуються і аналізуються суміш. Якщо результат негативний, то одного аналізу досить для k осіб. Якщо ж він позитивний, то кров кожного з k людей потрібно дослідити окремо і для k людей необхідно виконати $k+1$ аналіз.

Вважаючи, що ймовірність p позитивного аналізу одна і та ж, а результати аналізів для різних людей стохастично незалежні, знайти ймовірність того, що аналіз змішаної крові k осіб дасть позитивний результат.

Розв'язання. Знайдемо ймовірність того, що результат в групі буде негативний. Згідно з теоремою множення ймовірностей для незалежних подій

$$Q = (1 - p)^k = q^k,$$

де $q = 1 - p$ – ймовірність негативного результату для однієї особи.

Оскільки подія “результат позитивний” є протилежною до події “результат негативний”, то ймовірність позитивного результату в групі з k осіб

$$P = 1 - Q = 1 - q^k = 1 - (1 - p)^k.$$

9. Задати закон розподілу кількості аналізів (випадкова величина X) при способі обстеження з прикладу 8, якщо загальна кількість осіб, яких треба обстежити, $n = 50$, ймовірність захворювання $p = 0,02$.

Розв'язання. Припустимо, що утворено п'ять груп по $k = 10$ осіб в кожній. Ймовірність негативного результату аналізу в групі $Q = (1 - 0,02)^{10} = 0,8$. Ймовірність позитивного результату аналізу в групі

$$P = 1 - (1 - 0,02)^{10} = 1 - 0,8^{10} = 0,19.$$

Випадкова величина X може набувати таких значень: $X_0 = 5$ – серед обстежених 50 осіб хворих немає; $X_1 = 15$ – хворі є в одній з п'яти груп; $X_2 = 25$ – хворі є в двох; $X_3 = 35$ – хворі є в трьох; $X_4 = 45$ – хворі є в чотирьох із п'яти груп; $X_5 = 55$ – хворі є в усіх групах. Закон розподілу задамо табличним способом.

Кількість груп, де є хворі	0	1	2	3	4	5
X	5	15	25	35	45	55
P	0,364	0,4	0,18	0,04	0,02	0,0002

Ймовірності P_i обчислювались за формулою (1.5.9):

$$P_0 = q^{50} = (1 - p)^{50} = Q^5 = 0,364; P_1 = C_5^1 P Q^4 = 0,4; P_2 = C_5^2 P^2 Q^3 = 0,181;$$

$$P_3 = C_5^3 P^3 Q^2 = 0,04; P_4 = C_5^4 P^4 Q = 0,02; P_5 = P^5 = 0,0002,$$

$$\text{де } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

10. Знайти середню кількість аналізів, які необхідно зробити при обстеженні півмільйонного міста, використовуючи метод, вибраний у прикладах 8, 9.

Розв'язання. Середня кількість аналізів при достатньо великій кількості випробувань приблизно дорівнює математичному сподіванню випадкової величини. За формулою (1.5.19)

$$M(X) = 5 \cdot 0,364 + 15 \cdot 0,4 + 25 \cdot 0,18 + 35 \cdot 0,04 + 45 \cdot 0,02 + 55 \cdot 0,0002 \approx 14,6.$$

Обчислимо дисперсію $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$:

$$D(X) = 0,364 \cdot (14,6 - 5)^2 + 0,4 \cdot (14,6 - 15)^2 + 0,18 \cdot (14,6 - 25)^2 + 0,04 \cdot (14,6 - 35)^2 + 0,02 \cdot (14,6 - 45)^2 + 0,0002 \cdot (14,6 - 55)^2 \approx 156;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 12,5.$$

Проведені обчислення дозволяють стверджувати, що середня кількість аналізів крові, які треба виконати, щоб обстежити 500 000 жителів міста (нагадаємо, що в прикладах 8 і 9 $n = 50$, тобто в 10^4 разів менше), становить $(14,6 \pm 12,5) \cdot 10^4$ аналізів.

Примітка. Вказаний приклад базується на методиці, запропонованій Р. Дорфманом під час другої світової війни. Використовуючи свою методику в армійській практиці, Р. Дорфман добився економії на 80%. Можна показати (проте, ця задача виходить за рамки нашої програми), що математичне сподівання буде мінімальним, якщо

$$k = \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

В умові нашого прикладу $p = 0,02$, а значить $k \approx 7,14$. Тобто кількість аналізів при ймовірності захворювання $p = 0,02$ буде мінімальною, якщо спільні обстеження проводити в групах з 7 - 8 осіб.

11. Вакцина формує імунітет від захворювання з ймовірністю 0,999. Яка ймовірність, що імунітету не набуло двоє, якщо вакцину ввели 4000 дітям? Задати закон розподілу випадкової величини X , яка дорівнює кількості дітей, що не набули імунітету. Знайти моду цього розподілу.

Розв'язання. В даному прикладі зручно скористатись законом рідкісних подій (розподіл Пуассона), тому що ймовірність реалізації випадкової події в окремому випробуванні досить мала:

$$q = P(A) = 1 - 0,999 = 0,001.$$

Враховуючи, що в нашому випадку $\lambda = n \cdot q = 4000 \times 0,001 = 4$, згідно з розподілом Пуассона, шукана ймовірність

$$P = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \approx 0,147.$$

Аналогічно розрахуємо ймовірності інших значень випадкової величини X . Результати подамо у вигляді таблиці.

X	0	1	2	3	...
P	$e^{-\lambda} = 0,018$	$\lambda e^{-\lambda} = 0,073$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = 0,147$	$\frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = 0,196$...

Модую буде значення $X = 3$, оскільки ймовірності інших значень менші за 0,196, в чому можна легко переконатись продовживши розрахунки.

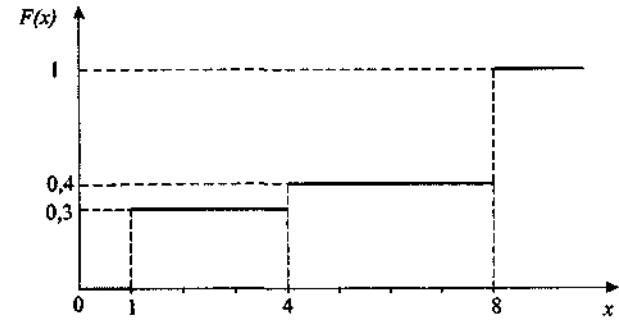


Рис. 1.35

12. Побудувати графік функції розподілу дискретної випадкової величини, яка задана таблицею.

X	1	4	8
P	0,3	0,1	0,6

Розв'язання. При $x \leq 1$ функція розподілу $F(x)$ згідно з властивістю 3 дорівнює нулю. Якщо $1 < x \leq 4$, то $F(x) = 0,3$, оскільки випадкова величина може набути значення $X = 1$ з ймовірністю 0,3. Якщо $4 < x \leq 8$, то $F(x) = 0,4$; в цьому випадку X може набувати значення або 1, або 4. За теоремою додавання ймовірностей: $0,1 + 0,3 = 0,4$.

Якщо $x > 8$, то $F(x) = 1$. Ця подія є достовірною. Отже

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ 0,3 & \text{при } 1 < x \leq 4; \\ 0,4 & \text{при } 4 < x \leq 8; \\ 1 & \text{при } x > 8. \end{cases}$$

Графік цієї функції подано на рис. 1.35.

13. Випадкова величина X має нормальний закон розподілу з параметрами $\mu = 2$, $\sigma = 4$. Визначити ймовірність того, що значення X лежить в межах інтервалу $(0; 8)$.

Розв'язання. Скористаємось (1.5.22) та табл. 2 додатку значень функції Лапласа. Для цього знайдемо t_1 та t_2 :

$$t_1 = (0 - 2) / 4 = -1/2; \quad t_2 = (8 - 2) / 4 = 3/2.$$

Враховуючи непарність функції Лапласа, за табл. 2 $\Phi(t_1) = -\Phi(0,5) = -0,191$, а $\Phi(t_2) = 0,433$. Тоді $P(0 < x < 8) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = 0,624$.

14. Ймовірність браку при виробництві деякого препарату $P = 0,01$. Знайти ймовірність того, що в партії з 1000 виробів виявиться бракованими не більше 20.

Розв'язання. В даному випадку використаємо інтегральну теорему Лапласа. Для цього спочатку обчислимо t_2 та t_1 :

$$t_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 0,01 \cdot 1000}{\sqrt{0,01 \cdot 1000 \cdot 0,99}} \approx 3,2;$$

$$t_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 0,01 \cdot 1000}{\sqrt{0,01 \cdot 1000 \cdot 0,99}} \approx -3,2.$$

За табл. 2 додатку знайдемо $\Phi(3,2) = 0,499$. Враховуючи непарність функції Лапласа, згідно з (1.5.25) маємо:

$$P(0 < x < 20) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = 2\Phi(3,2) = 0,998.$$

Отже, шукана ймовірність дорівнює 99,8 %.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. В ящику знаходиться 10 кульок: 3 білі та 7 чорних. З нього навздогад витягають одну кульку. Яка ймовірність того, що ця кулька буде білою? Чорною?

2. В умові задачі 1: витягують чорну кульку і не повертають в ящик. Яка ймовірність витягнути після цього чорну кульку? Білу?

3. В умові задачі 1: дістали білу кульку і не повернули в ящик. Яка ймовірність дістати після цього чорну кульку? Білу?

4. В ящику знаходиться 10 кульок: 2 білі, 4 чорних, 1 червона та 3 сині. Знайти ймовірність появи білої, або чорної, або червоної кульки при одноразовій операції витягування кульки з ящика. Вказати різні способи розв'язання. Використовуйте поняття «протилежні події».

5. Яка ймовірність того, що в сім'ї з двома дітьми будуть діти різної статі? Ймовірність народження хлопчика 0,52, стать наступної дитини не залежить від статі попередньої.

6. Яка ймовірність того, що в сім'ї з чотирма дітьми будуть діти різної статі?

7. Захворювання вдаєтьсявилікувати у 96% хворих, причому у 85% не спостерігається рецидивів. Яка ймовірність того, що у хворого, взятого навмання з даним діагнозом, не буде рецидивів?

8. Знайти ймовірність сумісної появи герба при одному киданні двох монет?

9. В ящику 8 кульок: 3 білі і 5 чорних. Знайти ймовірність того, що послідовно одна за одною буде витягнено дві чорні кульки? Дві білі кульки?

10. На кожні 10 000 білетів лотереї розігрується 150 речових і 350 грошових вигащів. Яка ймовірність вигащу, байдуже речового чи грошового, у власника одного лотерейного білета?

11. При лікуванні захворювання використовуються три лікарські препарати, кожен з яких дає алергічні реакції у 1% випадків. Яка ймовірність, що у хворого, вибраного довільним чином, не буде алергії при прийомі трьох препаратів одночасно?

12. В лікарню поступають пацієнти з чотирма видами хвороб. Багаторічні спостереження показують, що цим групам захворювань відповідають ймовірності: 0,1; 0,4; 0,3 та 0,2. Для лікування захворювань, які мають ймовірності 0,1 та 0,2, необхідно переливання крові. Яку приблизно кількість хворих слід забезпечити кров'ю, якщо протягом місяця постулило 1000 хворих?

13. В сім'ї двоє дітей. Враховуючи, що ймовірність народження хлопчика 0,52, визначити ймовірність того, що в сім'ї: а) двоє хлопчиків; б) хоча б одна дівчинка; в) старша дитина – дівчинка, а менша – хлопчик; д) один хлопчик.

14. Яка ймовірність того, що при випадковому сполученні літер Т, А та К одержимо "ТАК"? Не вийде слово "ТАК"?

15. У 97% пацієнтів при прийомі певного лікарського препарату спостерігається зниження кров'яного тиску, при цьому у 0,2% пацієнтів виникають алергічні реакції. Записати повну групу подій, які можуть спостерігатись при прийомі даного препарату. Яка ймовірність алергії за відсутності бажаних наслідків (зниження кров'яного тиску)?

16. Ймовірність влучення стрільком в десятку дорівнює 0,3, а в дев'ятку – 0,7. Визначити ймовірність того, що цей стрілок при трьох пострілах набере не менше 29 очок.

17. Медична сестра обслуговує в палаті чотирьох хворих. Ймовірність того, що протягом години перший хворий жадає уваги сестри 0,2, другий – 0,3, третій – 0,25, четвертий – 0,1. Знайти ймовірність того, що протягом години всі четверо хворих зажадають уваги.

18. В ящику знаходиться 7 чорних і декілька білих кульок. Яка ймовірність витягнути білу кульку, якщо ймовірність дістати чорну кульку дорівнює 1/6? Скільки білих кульок в ящику?

19. Під час епідемії в населеному пункті 60% мешканців виявились хворими. З кожних 100 хворих 10 потребують термінової медичної допомоги. Знайти ймовірність того, що будь-якому навмання взятому мешканцю необхідна термінова медична допомога.

20. Ймовірність влучення стріли в мішень $p = 0,9$. Знайти ймовірність трьох влучень при трьох пострілах?

21. Ймовірність влучення в мішень $p = 0,8$. Яка ймовірність, що при трьох пострілах не буде жодного влучення?

22. Ймовірність того, що стрілок при одному пострілі виб'є 10 очок дорівнює 0,1; ймовірність вибити 9 очок дорівнює 0,3. Яка ймовірність того, що при одному пострілі стрілок виб'є не менше 9 очок?

23. Першу групу крові має 37 % європейців. Скільки донорів потрібно, щоб з ймовірністю не меншою, ніж 0,9, отримати кров даної групи?

24. Для провізорської практики на 30 студентів виділено 15 місць в Києві, 8 – у Львові, 7 – у Харкові. Яка ймовірність того, що два довільним чином вибрані студенти попадуть на практику в одне місто?

25. Серед 18 пацієнтів у двох негативний резус-фактор. Знайти ймовірність того, що серед двох довільним чином вибраних виявиться негативний резус-фактор.

26. Студент вивчив 70 % екзаменаційних питань. Яка ймовірність отримати позитивну оцінку? В білеті три питання, оцінка позитивна, якщо відсоток правильних відповідей перевищує 60 %.

27. У відділенні 30 % хворих крім основних ліків призначили фізіотерапевтичні процедури. Ймовірність одужання в 10-денний термін хворих цієї групи 0,95, інші хворі одужують у цей термін з ймовірністю $p = 0,70$. Деякий пацієнт одужав у 10-денний термін. Яка ймовірність, що він проходив курс фізіотерапевтичних процедур?

28. В діагностичний центр в рівних кількостях потрапляють пацієнти з трьох консультативних пунктів. Ймовірність, що діагноз буде підтверджено для пацієнтів з направленням першого пункту 0,8, з другого – 0,5; третього – 0,4. В одного пацієнта діагноз підтвердився. Яка ймовірність, що він був направлений першим пунктом?

29. Хворому потрібне переливання крові. Ймовірність, що кров взятого навання донора виявиться придатною, $p = 0,2$. Яка ймовірність, що з 10 донорів хоча б у одного група крові буде придатною?

30. В аптеці є два лікарських препарати, які можуть бути використані при даному захворюванні. Ймовірність позитивного результату при використанні першого препарату 0,8; другого – 0,9. Яка ймовірність того, що взятий навання препарат дасть позитивний результат?

31. В сім'ї є п'ятеро дітей. Яка ймовірність того, що двоє з них хлопчики? Вважати ймовірності народження хлопчика і дівчинки рівними 0,52 та 0,48 відповідно.

32. Ймовірність витрат понад норму деякого компонента за добу 0,1. Яка ймовірність, що за тиждень перевитрат не буде протягом чотирьох днів?

33. Кожен із двох стрільців зробив по одному пострілу. Ймовірність враження цілі першим $p_1 = 0,8$; другим $p_2 = 0,3$. Об'єкт вражений одним влучанням. Яка ймовірність того, що влучив перший стрілок?

34. Серед донорів, які здають кров, 8 чоловік мають першу групу крові, 5 чоловік – другу, 5 чоловік – третю, 3 чоловіки – четверту. Чому дорівнює ймовірність того, що серед двох донорів, які першими здали кров: а) обидва донори були з четвертою групою крові; б) хоч би один донор був з третьою групою крові?

35. Показати, що ймовірність отримати хоча б одну одиницю при киданні 4 гральних кубиків більша, ніж ймовірність отримати хоча б одну пару одиниць при 24 киданнях двох кубиків.

36. Посилаючись на багаторічні спостереження, виклик лікаря в деякий будинок оцінюється ймовірністю 0,4. Знайти ймовірність того, що з п'яти викликів лікаря два виклики будуть в даний будинок.

37. 3 десятки облігацій виграє лише одна. Яка ймовірність того, що з двадцяти облігацій виграє лише одна?

38. Хворому необхідно зробити переливання крові. Ймовірність того, що група крові виявиться придатною $p(A) = 0,3$. Знайти ймовірність того, що з п'яти донорів у двох група виявиться придатною.

39. Стрілок при одному пострілі влучає в ціль з ймовірністю 0,8. Визначити ймовірність 7 влучень в серії з 10 пострілів.

40. Вважаючи всі комбінації статі дітей рівноімовірними, знайти, яку долю серед сімей з шістьма дітьми складають сім'ї з двома хлопчиками.

41. Яка ймовірність того, що дні народження шести людей припадають на 2 місяці, залишаючи рівно 10 місяців вільними? Вважати, що всі місяці народження рівноімовірні і незалежні.

42. Викладач університету був оштрафований 12 разів за стоянку автомобіля в забороненому місці. Всі 12 штрафів накладалися у вівторок та в четвер. Знайти ймовірність цієї події. Чи має сенс орендувати гараж на вівторок та четвер?

43. Знайти ймовірність того, що: а) дні народження 12 людей припадуть на 12 різних місяців року (вважати, що всі місяці рівноімовірні); б) дні народження 6 людей припадуть на 2 місяці року.

44. Встановлено, що особи з певної групи людей захворюють в середньому двічі на рік. Враховуючи, що кожне захворювання триває 10 днів, одержимо $365 - 2 \cdot 10 = 345$ днів, коли людина здорова. Таким чином, можна оцінити ймовірність захворювання однієї людини як $P = 2/345 = 0,0058$. Яка ймовірність того, що з 10 чоловік сьогодні захворюють троє? Захворювання в цій задачі розглядаються як незалежні події (без урахування інфекцій).

45. В сім'ї чотири сестри по черзі микють посуд. З чотирьох розбитих тарілок три було розбито найменшою, за що її називають незграбною. Чи можна її виправдати, вважаючи явище випадковим?

46. Лівші складають в середньому 1 % населення. Яка ймовірність, що в колективі з 200 чоловік буде 3 лівші?

47. Лікування певного захворювання приводить до повного одужання у 75 %. Лікувалось п'ять осіб. Яка ймовірність, що повністю одужають четверо? Записати закон розподілу випадкової величини X , яка визначає повне одужання певної кількості m ($m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) із вказаної групи пацієнтів.

48. Розв'язати задачу 8 (с. 131) за умови, що обстежується 70 чоловік, яких ділять на 10 груп по 7 осіб.

49. В грошовій лотереї випущено 100 білетів. Розігрується 1 виграш в 50 грн і 10 виграшів в 1 грн. Знайти закон розподілу випадкового виграшу для власника одного лотерейного білета. Обчислити математичне сподівання одержаної випадкової величини.

50. Знайти розподіл випадкової величини, яка одержується при киданні правильного однорідного кубика з пронумерованими гранями 1, 2, 3, 4, 5, 6. Перевірити, чи виконується умова нормування.

51. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини за умовою задачі 50.

52. Кидають два гральних кубики. Очки, які випадають, додаються. Записати закон розподілу випадкової величини X , яка дорівнює цій сумі. Знайти її математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення. Визначити ймовірність виграшу, якщо він виплачується при $X > 10$. Яка ймовірність $P(X > 5)$ чи $P(7 < X < 8)$ більша?

53. Закон розподілу випадкової величини X задано таблицею.

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

Знайти дисперсію та математичне сподівання.

54. Закон розподілу випадкової величини X задано таблицею.

X	2	4	6
P	0,7	0,2	0,1

Визначити математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення.

55. Неперервна випадкова величина X визначається щільністю ймовірності $f(x)$. Знайти константу a , $M(X)$, $D(X)$, якщо

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ ax & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

56. Дискретна випадкова величина має п'ять можливих значень. Чотири з них дорівнюють $-2; -1; 1; 2$, а відповідні їм ймовірності $0,1; 0,3; 0,2; 0,2$. Знайти закон розподілу та дисперсію, якщо $M(X) = 0,7$.

57. Випадкова величина X має функцію розподілу:

$$a) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 1 & \text{при } x > 1, \end{cases}$$

$$б) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1; \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{3} & \text{при } -1 < x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X набуде значення з інтервалу $(0; 1)$, а також $M(X)$, $D(X)$.

58. Випадкова величина X має функцію розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1; \\ \frac{3x}{4} + \frac{3}{4} & \text{при } -1 < x \leq \frac{1}{3}; \\ 1 & \text{при } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу, побудувати графік.

59. Ймовірність влучення при пострілі $p = 0,8$. Стрільба ведеться до першого влучення. Число витрачених снарядів – випадкова величина X . Скласти таблицю її розподілу, якщо в розпорядженні три снаряди.

60. Випадкова величина має функцію розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 2x & \text{при } 0 < x \leq \frac{1}{2}; \\ 1 & \text{при } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Знайти її математичне сподівання.

61. Випадкова величина має щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\frac{\pi}{2}; \\ a \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a . Побудувати графік щільності розподілу.

62. Випадкова величина X має функцію розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \frac{1 - \cos x}{2} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi; \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Визначити щільність розподілу, побудувати графік.

63. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, яка має щільність розподілу $f(x) = a \sin x$ в інтервалі $(0; \pi)$.

64. До випадкової величини додали константу C . Як при цьому зміняться математичне сподівання та дисперсія?

65. Ріст дорослої жінки є випадковою величиною, що має нормальний закон розподілу з параметрами: $a = 164$ см, $\sigma = 5,5$ см. Знайти щільність розподілу ймовірностей. Яка ймовірність того, що X набуде значення з інтервалу $(160-170$ см)?

66. Випадкова величина X описується нормальним законом розподілу з параметрами $a = 6$ і $\sigma = 2$. Знайти ймовірність того, що X набуде значення з інтервалу $(4; 8)$.

67. Випадкова величина X має нормальний закон розподілу з $a = 0,5$ і $D(X) = 1/8$. Визначити ймовірність того, що значення X випадкової величини попаде в інтервал $(0,4; 0,6)$.

68. Випадкова величина X описується нормальним законом розподілу з параметрами $a = 2$ і $\sigma = 1$. Знайти ймовірність того, що X набуде значення з інтервалу $(1,5; 3)$.

69. При зважуванні маса речовини є випадковою величиною, що має нормальний закон розподілу з параметрами $a = 10$ мг, $\sigma^2 = 1/400$ мг². Знайти ймовірність браку, якщо допустимі параметри $10 \pm 0,05$ мг.

70. Під час епідемії ймовірність того, що покуштує в аптеці знадобляться ліки від грипу, дорівнює 0,4. Знайти найімовірнішу кількість таких покупок серед 500 покупців в аптеці. Яка ймовірність, що буде продано більше 200 препаратів?

71. Серед насіння лікарської рослини 0,1 % насіння бур'яну. Яка ймовірність, що з 1000 насінин 5 – бур'яни; не більше 10 – бур'яни?

72. Випадкова величина розподілена рівномірно на відріжку $[-2; 8]$. Знайти щільність розподілу, математичне сподівання, дисперсію та ймовірність попадання в інтервал $[0; 2]$.

73. Випадкова величина має показниковий розподіл з дисперсією $D(X) = 0,25$. Знайти щільність розподілу та ймовірність попадання значень цієї величини в інтервал $[1; 10]$.

74. Випадкова величина має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 2$. Знайти ймовірність $P(X > M(X))$.

75. Ймовірність безвідмовної роботи технологічної лінії розподілена за показниковим законом з $\lambda = 0,001$. Знайти ймовірність безвідмовної роботи протягом перших 100 годин. Яка ймовірність, що лінія відмовить протягом перших 10 годин?

РОЗДІЛ 2

БІОМЕХАНІКА, БІОРЕОЛОГІЯ ТА
ГЕМОДИНАМІКА

“Механічний рух у тілі тварини підпорядковується тим самим законам, що і рух тіл неживих, і тому очевидно, що питання про те, яким саме чином і у якій мірі рух крові по судинах залежить від м'язових та пружних сил серця і судин, зводиться до проблем, які належать до вузько спеціальних розділів гідравліки”.

Томас Юнг

Біологічні тканини складні за своєю будовою, неоднорідні за своїм складом, їх структура і властивості визначаються тими функціями, які вони виконують в живих організмах. В морфології виділяють декілька типів тканин – епітеліальну, тканини внутрішнього середовища (кров і лімфу), сполучну, м'язову, нервову. Всі вони, як правило, мають клітинну будову, складну структуру, і всім цим тканинам притаманний механічний рух у тій чи іншій мірі, починаючи з внутрішньоклітинних мікрорухів скорочувальних білкових ниток до макро-рухів окремих органів та систем. Деякі з тканин призначені для виконання опорно-рухової функції і в процесі життєдіяльності підлягають значним механічним навантаженням. Різні форми механічного руху в живих системах вивчає біомеханіка, основи якої як науки про закони механічних рухів у біологічних системах започатковані за часів Аристотеля, Леонардо да Вінчі, Бореллі, Галілея, Декарта, Гука, Ейлера, Бернуллі, Юнга, Гельмгольца, Пуазейля та ін. (Зауважимо, що останні четверо були професорами медицини).

При вивченні деяких механічних властивостей біологічних тканин зручно уявляти їх у вигляді суцільних середовищ, не розглядаючи їх мікроструктуру і абстрагуючись від їх клітинної

будови. Середовище може розглядатися як суцільне, якщо відстані, на яких змінюються його усереднені властивості (наприклад, густина, в'язкість тощо), значно перевищують розміри частинок (у нашому випадку – клітин, формених елементів), з яких складається середовище. У цьому випадку реальну тканину можна поділити на ряд елементарних об'ємів, розміри яких значно перевищують розміри клітини, і до кожного з них застосовувати закони механіки з метою описання різних механічних явищ, таких як плин чи деформація середовища.

Розділ механіки, що вивчає плин і деформацію суцільних середовищ, зветься *реологією*. Вивчення цих рухів у біологічних системах становить задачу біореології. Розглянемо деякі важливі поняття реології.

Виділимо у суцільному середовищі елементарний об'єм ΔV з масою Δm . Сили F , що діють у суцільному середовищі, можна віднести до одиниці маси (об'єму) чи одиниці площі поверхні.

Позначимо силу, що діє на одиницю маси речовини, через $f = F/\Delta m$; аналогічним способом визначається і величина сили, що діє на одиницю об'єму $f = F/\Delta V$ – так звана об'ємна сила. Наприклад, об'ємні сили інерції і тяжіння відповідно дорівнюють $f = \Delta m \cdot a / \Delta V = \rho \cdot a$; $f = \Delta m \cdot g / \Delta V = \rho \cdot g$.

З цих виразів випливає, що величини об'ємних сил не залежать від розмірів і мас тіл, а визначаються лише усередненими властивостями тіл (густиною ρ) і характеристиками їх механічного руху (прискоренням a). Вони діють одночасно на всі елементарні об'єми речовини, їх зручно використовувати для опису плин у і деформації реальних суцільних середовищ. Так, наприклад, використання цих сил дозволяє в зручній формі записати рівняння руху різних рідин, в тому числі і крові. (Слід підкреслити, що описуючи рух суцільних середовищ, використовують не лише об'ємні сили, а й об'ємну густину енергії $w = \Delta W / \Delta V$, яка характеризує величину енергії, що припадає на одиницю об'єму).

Різні ділянки середовища можуть взаємодіяти між собою по поверхнях розділу, в цьому випадку зручно користуватися поверхневими силами, тобто силами, що діють на одиницю

площі поверхні. Нехай дві ділянки тіла I і II межують між собою поверхнею AB (рис. 2.1).

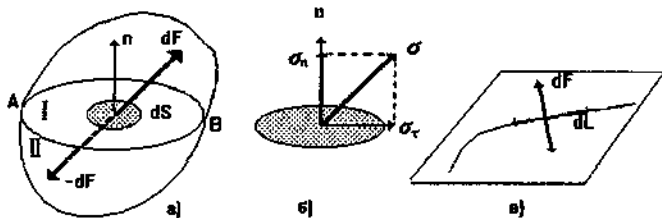


Рис. 2.1. Сили, які діють на поверхні розділу середовищ

Виділимо на поверхні AB малу площу dS , на яку під деяким кутом до нормалі діє сила dF (рис. 2.1, а). У цьому випадку характеристикою поверхневих сил є величина напруження σ , яка дорівнює силі, що діє на одиницю площі: $\sigma = dF/dS$ [H/m^2]. Зручно ввести дві складові σ по відношенню до вектора n нормалі до елемента поверхні dS : нормальну складову σ_n , що діє перпендикулярно до площини, і тангенціальну σ_t спрямовану по дотичній до поверхні dS (рис. 2.1, б). Саме перша складова містить в собі скалярну величину – тиск P , що дорівнює відношенню величини сили до величини площі поверхні: $P = F/S$.

Іншим прикладом дії поверхневих сил є явище поверхневого натягу, яке характеризується коефіцієнтом поверхневого натягу α . Цей коефіцієнт чисельно дорівнює силі dF , яка діє на одиницю довжини довільного контура dL на поверхні і спрямована по дотичній до поверхні (рис. 2.1, в): $\alpha = dF/dL$ [H/m].

Поверхневі сили використовують для опису явищ деформації, плинності в'язких середовищ, пластичності, повзучості, поверхневого натягу тощо, які спостерігаються при функціонуванні біологічних тканин.

2.1. МЕХАНІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ БІОЛОГІЧНИХ ТКАНИН

Розглянемо найважливіші механічні властивості біологічних тканин, завдяки яким здійснюються різноманітні механічні явища – такі як функціонування опорно-рухового апарата, процеси деформацій тканин і клітин, розповсюдження хвиль пружної деформації, скорочення і розслаблення м'язів, рух рідких і газоподібних біологічних середовищ. Серед цих властивостей виділяють:

- пружність – здатність тіл відновлювати розміри (форму чи об'єм) після зняття навантажень;
- жорсткість – здатність матеріалу протидіяти зовнішнім навантаженням;
- еластичність – здатність матеріалу змінювати розміри під дією зовнішніх навантажень;
- міцність – здатність тіл протидіяти руйнуванню під дією зовнішніх сил;
- пластичність – здатність тіл зберігати (повністю або частково) зміну розмірів після зняття навантажень;
- крихкість – здатність матеріалу руйнуватися без утворення помітних залишкових деформацій;
- в'язкість – динамічна властивість, яка характеризує здатність тіла протидіяти зміні його форми при дії тангенціальних напружень;
- плинність – динамічна властивість середовища, яка характеризує здатність окремих його шарів перемішуватись з деякою швидкістю у просторі відносно інших шарів цього середовища.

2.1.1. Пружні властивості тіл. Деформації

Усі реальні тіла здатні деформуватись. Зміну форми чи об'єму тіла під дією зовнішніх сил називають деформацією. Розрізняють пружні та пластичні деформації. Пружними називають деформації, які повністю зникають після припинення дії зовнішніх сил. Відновлення первинної форми тіла відбувається під дією внутрішніх сил – сил пружності, що

виникають у тілі при деформації. При пластичних деформаціях тіло залишається у деформованому стані після припинення дії зовнішніх сил.

Кількісною мірою деформації тіла є абсолютна та відносна деформації. Якщо при деформації тіла деяка величина, яка характеризує розміри чи форму тіла (наприклад, довжину чи об'єм), набуває значення X , то зміна цієї величини $\Delta X = X - X_0$ під дією прикладеної сили зветься абсолютною деформацією. Відношення абсолютної деформації до первісного значення X_0 зветься відносною деформацією:

$$\varepsilon = \frac{\Delta X}{X_0}. \quad (2.1)$$

Зовнішня сила, яка діє на ділянку тіла, врівноважується силою пружності, що діє на дану ділянку з боку сусідньої. Фізична величина, яка дорівнює пружній силі, що припадає на одиницю площі перерізу тіла, зветься, як вже вказувалося, напруженням:

$$\sigma = \frac{dF_{np}}{dS}.$$

Англійський фізик Р. Гук експериментально довів, що напруження в пружно деформованому тілі прямо пропорційне до його відносної деформації (закон Гука):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (2.2)$$

де E – модуль пружності; його величина визначається властивостями матеріалу, з якого виготовлено тіло. Залежно від типу деформації модуль пружності має різні назви, позначення та числові значення. Слід підкреслити, що закон Гука справедливий лише для достатньо малих відносних деформацій.

Будь-яка складна деформація тіла може бути подана як наслідок накладання більш простих деформацій: поздовжнього розтягування чи стиснення, всебічного розтягування чи стиснення та зсуву.

Деформація поздовжнього розтягування чи стиснення

Розглянемо деформацію тіла у випадку, коли один кінець його закріплений, а до другого прикладено зовнішню силу F , яка розтягує це тіло.

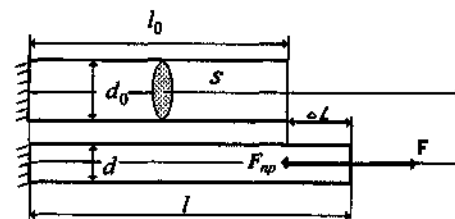


Рис. 2.2. Деформація розтягу бруска

Відносна деформація у цьому випадку дорівнюватиме

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0},$$

де Δl – зміна довжини зразка під дією зовнішньої сили, l_0 – первісна довжина зразка.

У статичному стані зовнішня сила F врівноважується силами пружності F_{np} , що виникають у тілі при деформації (рис. 2.2).

Закон Гука матиме вигляд:

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (2.3)$$

де $\sigma = F/S$ – нормальне напруження, оскільки діюча сила перпендикулярна до площі перерізу S зразка. Модуль пружності E зветься модулем Юнга. Із закону Гука випливає, що $E = \sigma$, якщо $\varepsilon = 1$, тобто якщо $\Delta l = l_0$. Інакше кажучи, модуль Юнга E дорівнює нормальному напруженню, яке виникло б у зразку при збільшенні його довжини вдвічі, якщо б для таких великих деформацій був справедливий закон Гука.

Зауважимо, що при стисненні зразка модуль Юнга відповідає такому напруженню, при якому довжина зразка прямує до нуля. Розтяг (або стиснення) зразків завжди супроводжується їх

поперечним звуженням (або розширенням), тобто зміною їх поперечних розмірів: $\Delta d = d - d_0$.

Відношення відносної зміни поперечного розміру до відносної зміни поздовжнього розміру називається коефіцієнтом Пуассона

$$\mu = -\frac{\Delta d/d_0}{\Delta l/l_0} \quad (2.4)$$

Оскільки $\Delta d < 0$ при $\Delta l > 0$, то $\mu > 0$. Для матеріалів, що погано стискаються, $\mu \approx 1/2$. Майже всі біологічні матеріали, в тому числі і стінки кровоносних судин, майже не стискаються, тому для них $\mu \approx 1/2$. Далі ми будемо розглядати тільки ізотропні середовища, реологічні властивості яких однакові у всіх напрямках.

Деформація всебічного розтягу або стиснення (об'ємна деформація)

Об'ємна деформація виникає при рівномірному розподілі стискуючих або розтягуючих сил по поверхні тіла (рис. 2.3, а).

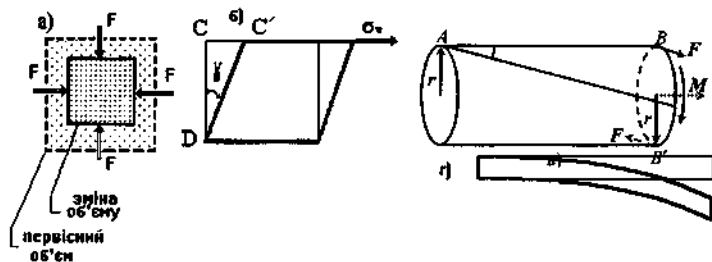


Рис. 2.3. Види деформацій: а) об'ємна деформація, б) деформація зсуву, в) кручення, г) згину

Закон Гука у цьому випадку матиме вигляд:

$$\sigma = \chi \frac{\Delta V}{V_0},$$

де χ – модуль об'ємної пружності, ΔV та V_0 – зміна об'єму тіла та первісний об'єм відповідно. Прикладом напруження, що викликає об'ємну деформацію, є трансмуральний тиск, що

дорівнює різниці тисків всередині і зовні судини $P_{mp} = P_0 - P_3$. Тоді закон Гука набуває вигляду

$$P_{mp} = \chi \frac{\Delta V}{V_0} \quad (2.5)$$

Деформація зсуву

Зсувом називають таку деформацію тіла, коли його плоскі шари зміщуються паралельно один одному (рис. 2.3, б). Зсув виникає під дією дотичного напруження:

$$\sigma_\tau = \frac{F_\tau}{S} \quad (2.6)$$

Відповідно до закону Гука $\sigma_\tau = G\gamma$, де G – модуль зсуву, $\gamma \approx \text{tg}\gamma = CC'/CD$ – кут зсуву, що зветься також відносним зсувом ($\Delta X = CC'$ – абсолютний зсув, який дорівнює зсуву одного шару відносно іншого, а CD – відстань між цими шарами).

Деформація кручення

Деформація кручення виникає у зразку, коли один його переріз нерухомий, а в іншому діє пара сил, момент якої спрямований вздовж осі зразка (рис. 2.3, в). Ця деформація використовується в крутильних терезах.

Для кожного з розглянутих типів деформацій спостерігаються у межах пружної реакції зразка прямо пропорційні залежності між напруженням та відносною деформацією. Коефіцієнти пропорційності – модулі пружності – можна виразити через модуль Юнга (E) та коефіцієнт Пуассона (μ) матеріалу, тобто для пружних деформацій ізотропних тіл E та μ повністю визначають реакцію зразка на прикладені напруження. Наприклад, модуль об'ємної пружності тонкої стінки судини можна подати у вигляді

$$\chi = 2hE/(1 - \mu^2)R, \quad (2.7)$$

де h і R – товщина стінки та радіус судини відповідно, $h \ll R$.

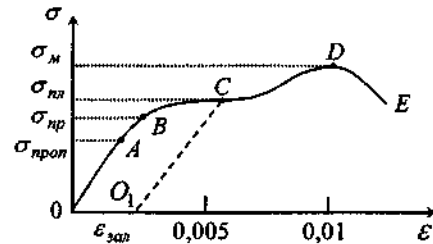


Рис. 2.4. Діаграма розтягу для сталі

Експериментально отриману при деформації залежність напруження, що виникає у зразку, від відносної деформації називають діаграмою деформації. Типовий вигляд діаграми розтягу металевого зразка подано на рис. 2.4.

Наведену криву можна умовно поділити на п'ять зон. Зона OA має назву зони пропорційності. У межах цієї зони виконується закон Гука. Зона OB – це зона пружності, де після зняття напруження тіло відновлює свої розміри і форму. Зона BC зветься зоною загальної плинності. У цій зоні подовження зразка відбувається без помітного збільшення напруження. Зона CD – це зона зміцнення, у цій зоні подовження зразка супроводжується зростанням напруження, на зразкові з'являється місце майбутнього розриву – шийка, формування якої (точка D) супроводжується процесом місцевої плинності в зоні DE і розривом зразка. Якщо зменшувати навантаження у зоні BC , то відповідний графік $\sigma = f(\epsilon)$ піде паралельно OA і перетне вісь абсцис у деякій точці O_1 . Відрізок OO_1 визначає залишкову деформацію $\epsilon_{зап}$, що характеризує пластичну деформацію зразка. Отримання діаграми деформації дозволяє визначити ряд найважливіших характерних точок і відповідних їм величин:

- межа пропорційності $\sigma_{проп}$ – найбільше напруження, при якому ще виконується закон Гука;
- межа пружності $\sigma_{пр}$ – найбільше напруження, при якому немає залишкових деформацій;
- межа плинності $\sigma_{пл}$ – найбільше напруження, при якому відбувається зростання деформації без помітного збільшення напруження;

- межа міцності σ_m – найбільше напруження, яке може витримати зразок.

При деформаціях тіл часто виявляються в'язко-пружні властивості, які полягають у тому, що напруження залежить не лише від деформації (ϵ), а й від швидкості її зміни з часом, тобто похідної ϵ' .

2.1.2. Деформації біологічних тканин

Розглянемо діаграми деформацій тих біологічних тканин і органів, які в процесі функціонування підлягають значним навантаженням – наприклад, кісткової, м'язової, сухожилля, стінок судин тощо. Експериментальні дослідження виявили, що для більшості цих тканин діаграми розтягу або стиснення суттєво відрізняються від діаграми, наведеної на рис. 2.4. Для біологічних матеріалів, як правило, не виражена зона загальної плинності, хоча ця властивість чітко проявляється у процесі їх функціонування. Руйнування матеріалу так само відбувається без помітного падіння напруження, яке характерне для зони DE .

Кісткова тканина

Ця тканина за своїми механічними властивостями близька до дерева, бетону, деяких металів, тобто матеріалів, що використовуються в будівельних роботах. Не розглядаючи будову кісткової тканини, відзначимо, що вона досить складна за конструкцією і являє собою композитний матеріал, що складається з органічних та неорганічних речовин і має анізотропні властивості.

На рис. 2.5, *a* наведено діаграми розтягу та стиснення вздовж повздовжньої осі зразків, вирізаних з кістки стегна.

Як бачимо, у порівнянні зі сталлю, деформація відбувається у значних межах – до 10% при стисненні і до 5% при розтязі. При незначних деформаціях (менших за 2%) кістка поводить себе як “гуківське тіло”, для якого залежність $\sigma = f(\epsilon)$ близька до лінійної. Зауважимо, що кістка краще “працює” на стиснення, ніж на розтяг – межа міцності та розміри деформацій при стисненні майже вдвічі перевищують ті, що спостерігаються при розтязі.

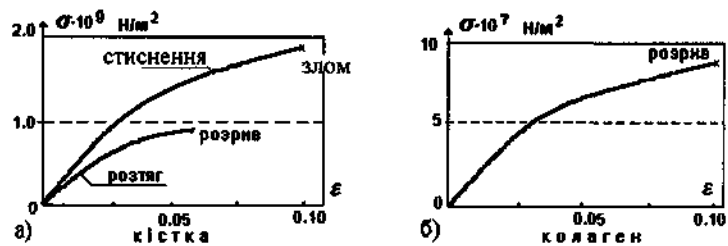


Рис. 2.5. Діаграми деформацій для кістки і колагену

Колагенові волокна

Колагенові нитки є важливою конструктивною частиною з'єднувальної тканини, входять до складу кісток, стінок судин, м'язових оболонок тощо. Ці міцні гнучкі білкові нитки утворені агрегацією потрійних спіралей, які стабілізуються водневими зв'язками, що забезпечує значну міцність ниток при роботі на розрив. Діаграму розтягу ниток колагену наведено на рис. 2.5, б. За своїм виглядом вона збігається з діаграмою для кісток. Вони мають близькі значення граничних деформацій, але межа міцності у колагену більш ніж на порядок менша за межу міцності кістки.

Еластинові волокна

Еластин являє собою гумоподібний матеріал, відрізняється значною розтяжністю та гнучкістю. Ці якості роблять його незамінним компонентом в структурах тих тканин, котрі в процесі функціонування значно змінюють свою форму та розміри (стінки судин, м'язи, покривні оболонки тощо). Гнучкість та розтяжність еластину пов'язані із властивостями його субодиноць – глобул, об'єднаних у сіткову структуру жорсткими хімічними зв'язками (сполуками, що звуться десмозинами). Сітка легко деформується без розривів цих зв'язків під впливом зовнішніх навантажень. Жорсткість ниток зростає по мірі розтягу, який супроводжується витягуванням глобул – субодиноць еластину. Саме це і знаходить відображення на діаграмі (рис. 2.6, а).

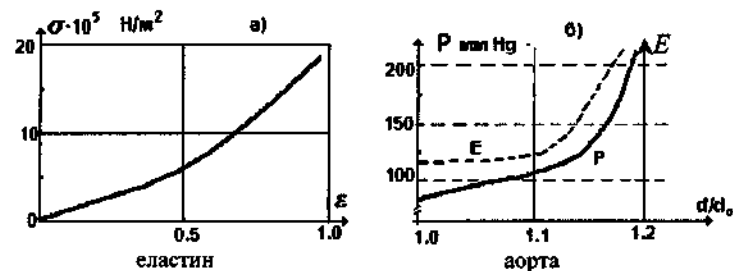


Рис. 2.6. Діаграми розтягу еластину і стінки судини (аорти)

Діаграма розтягу судин

Стінки судин мають складну будову. Спостерігаються суттєві відмінності в будові стінок аорти, артерій, вен, венул та капілярів. Їхні пружні властивості визначаються співвідношенням вмісту волокон трьох типів: еластинових, колагенових і м'язових. Колаген має більший модуль Юнга, ніж еластин та гладком'язові волокна, які мають приблизно однакову пружність. У великих судинах (аорті, венах) еластин та колаген становлять приблизно 50% сухої ваги, в еластом'язових судинах їх вміст зменшується до 40% і менше. Стінки судин неоднорідні за своєю будовою, відрізняються анізотропними механічними властивостями. До подібних тіл лише наближено можна застосовувати класичні методи дослідження пружних властивостей при визначенні модуля Юнга, межі пружності, межі міцності тощо.

На рис. 2.6, б наведено діаграму розтягу аорти під впливом трансмурального тиску P (різниці тисків всередині і зовні судини).

Таким чином, при зростанні тиску (при фізичних навантаженнях, різних патологіях) жорсткість судин або їх тонус різко зростає (див. пунктирну лінію на рис. 2.6, б). Фізіологічний зміст цього явища зрозумілий – зростаюча жорсткість судини запобігає надмірному зростанню його об'єму при збільшенні тиску, що, в свою чергу, запобігає надмірному стисненню внутрішніх тканин (наприклад, нервової тканини мозку) і дозволяє зменшити об'єм циркулюючої крові при навантаженнях.

Біофізичний механізм цього явища досить складний і досі недостатньо вивчений. Можна припустити, що він визначається пружними властивостями еластину (зростанням жорсткості при розтягуванні), а також активацією скорочуваності гладкої мускулатури судини при розтягуванні (гістомеханічна теорія). Зауважимо, що роль гладкої мускулатури надзвичайно велика у процесі деформації судин; без її участі неможливо пояснити в'язко-пружні властивості судин, а отже і такі явища, як дилатація та констрикція судин, зміна їх тонуусу, депонування та зігнання крові тощо.

2.2. ПЛИН В'ЯЗКИХ РІДИН У БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМАХ

Рух рідких середовищ (крові, лімфи, інтерстиціальних та клітинних рідин) у біологічних системах відіграє важливу роль, забезпечуючи умови нормальної життєдіяльності різних фізіологічних систем. Задача біофізики полягає у вивченні фізичних властивостей рідких середовищ і фізичних основ їх руху. Плин рідин відбувається під дією сил, з'ясування природи яких також є однією з важливих задач біофізики.

Рідкі середовища мають ряд специфічних властивостей, зумовлених особливостями їх молекулярної будови. Однією з найважливіших властивостей рідини є в'язкість.

2.2.1. В'язкість рідини

У реальних рідких середовищах на границях шарів, що рухаються, діють сили внутрішнього тертя. Можна навести чимало прикладів дії цих сил: вони є причиною падіння тиску вздовж судини при плинні крові, саме вони визначають поведінку рідини у судині, що обертається, перешкоджають рухові тіл у рідинах тощо.

Досліди свідчать про те, що сили тертя між шарами рідини, які рухаються з різними швидкостями, діють по дотичній до поверхонь цих шарів (рис. 2.7) і спрямовані таким чином, що прискорюють шар, що рухається більш повільно, і гальмують шар, який рухається швидше.

Розглянемо поведінку рідини, що знаходиться між двома пластинами, одна з яких нерухома, а інша під дією прикладеної до неї сили F рівномірно рухається зі швидкістю v_0 (рис. 2.8). Дія дотичного зсуваючого напруження $\sigma_\tau = F_\tau/S$ викликає деформацію зсуву, причому відносний зсув за одиницю часу $\gamma = dv/dy$, який називають градієнтом швидкості, виявляється пропорційним до прикладеного зсувного напруження:

$$\frac{F_\tau}{S} = \eta \frac{dv}{dy}, \text{ або } F_\tau = \eta S \frac{dv}{dy}. \quad (2.8)$$

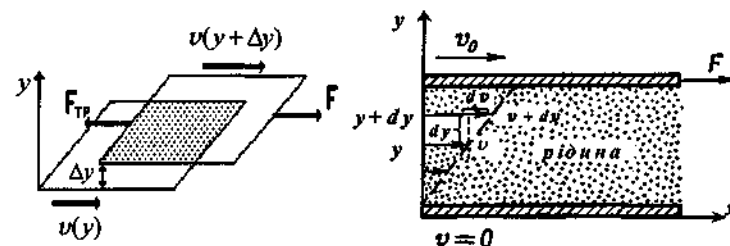


Рис. 2.7. Сила тертя між шарами рідини

Рис. 2.8. Профіль швидкостей

Рівняння (2.8), відоме як рівняння Ньютона, описує явище внутрішнього тертя. Таким чином, профіль швидкостей, який ми спостерігаємо у цьому випадку (рис. 2.8), обумовлений тим, що між шарами реальної рідини, що тече, діють сили внутрішнього тертя F , які пропорційні до площі S шарів, що дотикаються, та градієнта швидкості dv/dy у напрямку, перпендикулярному до напрямку плинні рідини. Коефіцієнт пропорційності η в рівнянні Ньютона зветься коефіцієнтом в'язкості (точніше кажучи, зсувної в'язкості) і дорівнює силі внутрішнього тертя, що діє на одиницю площі поверхні шару при градієнті швидкості, який дорівнює одиниці.

Розмірність коефіцієнта в'язкості η у системі СІ [Па·с]. Досить часто використовується ще й позасистемна одиниця в'язкості Пуаз (Π), яка зв'язана з Па·с співвідношенням $1 \Pi = 0,1 \text{ Па}\cdot\text{с}$. Так, в'язкість дистильованої води при кімнатній

температурі дорівнює приблизно $10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с} = 10^{-2} \text{ П}$, тобто $\eta_{\text{води}} \approx 1 \text{ мПа}\cdot\text{с} = 1 \text{ сП}$.

Зручно користуватися безрозмірним коефіцієнтом в'язкості, що зветься відносною в'язкістю $\eta_{\text{відн}}$. Відносна в'язкість дорівнює відношенню коефіцієнта в'язкості даної рідини до коефіцієнта в'язкості дистильованої води при одній і тій самій температурі:

$$\eta_{\text{відн}} = \frac{\eta}{\eta_{\text{в}}}. \quad (2.9)$$

У гідродинаміці користуються також і кінематичною в'язкістю ν рідини, що являє собою відношення коефіцієнта в'язкості до густини

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (2.10)$$

Кінематична в'язкість ν має розмірність $[\nu] = \text{м}^2/\text{с}$. В'язкість рідини є динамічною властивістю, яка залежить від природи рідини, температури, а для багатьох рідин також і від умов плинину.

Моделі рідин. Описуючи рух рідких середовищ, використовують різні моделі рідин. Найбільш простою є модель ідеальної рідини, яка не підлягає стисненню ($\rho = \text{const}$) і в ній відсутні сили внутрішнього тертя ($\eta = 0$). Ця модель використовується для отримання найбільш простих рівнянь руху рідини. Неідеальні рідини, в яких сили внутрішнього тертя описуються рівнянням Ньютона, зветься ньютонівськими. Для ньютонівських рідин коефіцієнт в'язкості η залежить лише від температури та природи рідини і не залежить від умов плинину. До ньютонівських рідин можна віднести воду, розчини електролітів, ртуть, гліцерин, спирти. Існують рідини, коефіцієнт в'язкості яких залежить від умов плинину, а саме, змінюється із зміною швидкості деформації зсуву dv/dy внаслідок перебудови внутрішньої структури, обумовленої напруженням зсуву при плинні рідини. Такі рідини зветься неньютонівськими. До них відносять розчини білків, полімерів, деякі суспензії.

Описуючи динаміку руху біологічних рідин, розглядають умови їх плинину і, залежно від них, обирають ту чи іншу модель рідини – від ідеальної до реальної.

2.2.2. В'язкість крові

Кров являє собою приклад складної за своїм вмістом рідини. Вона є суспензією формених елементів (еритроцитів, лейкоцитів, тромбоцитів) у водному колоїдному розчині – плазмі, сумарна концентрація білків у якій становить 6–9%. Експеримент виявив суттєву залежність в'язкості крові від її складу, що визначається показником гематокриту He (рис. 2.9, а), який дорівнює відношенню об'єму формених елементів V_{ϕ} до об'єму плазми крові $V_{\text{пл}}$:

$$He = \frac{V_{\phi}}{V_{\text{пл}}}. \quad (2.11)$$

Оскільки об'єм формених елементів, в основному, припадає на еритроцити, показник гематокриту характеризує вміст еритроцитів у крові.

Як свідчить наведена на малюнку залежність $\eta_{\text{відн}} = f(He)$, в'язкість крові змінюється у досить широкому діапазоні по відношенню до норми (N). Вона зростає при поліцитемії і зменшується при анемії.

Відомо декілька емпіричних формул, що зв'язують коефіцієнт в'язкості крові з показником гематокриту:

$$\eta = \eta_0 \cdot (1 + \alpha He)^{\beta} \quad \text{або} \quad \eta = \eta_0 \cdot e^{\gamma He}, \quad (2.12)$$

де η_0 – в'язкість плазми, α , β , γ – емпіричні константи, значення яких залежить від концентрації та форми суспензованих елементів.

Дослідження залежності в'язкості крові від швидкості деформації зсуву (градієнта швидкості) свідчать про те, що кров не є ньютонівською рідиною. При великих градієнтах швидкості (наприклад, в артеріальних судинах) в'язкість крові наближається до в'язкості води, у той час як при малих значеннях швидкості деформації зсуву в'язкість у п'ять і більше разів перевищує в'язкість води (рис. 2.9, б).

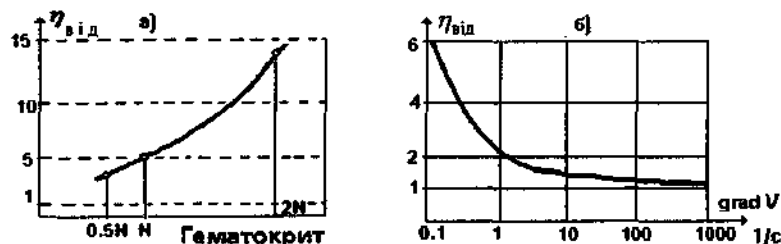


Рис. 2.9. Зміна в'язкості крові при зміні: а) форменного складу крові, б) швидкості деформації зсуву

Величина відносної в'язкості крові може бути використана у діагностиці захворювань (див. табл. 2.1). Залежність коефіцієнта в'язкості від градієнта швидкості dv/dy обумовлена здатністю еритроцитів до агрегації – утворенню “монетних стовпчиків” та їх конгломератів. Із збільшенням градієнта швидкості стовпчики руйнуються, і коефіцієнт в'язкості зменшується внаслідок дезагрегації та деформації еритроцитів.

Таблиця 2.1.

Відносна в'язкість крові $\eta_{відн}$	Результат
4,2–6,0	Норма
< 2,0	Анемія
> 10,0	Поліцитимія

Зменшення в'язкості крові при її переході з венозного русла в артеріальне фізіологічно виправдане. У цьому випадку значно зменшуються витрати м'язової енергії міокарду на просування крові вздовж артеріального русла, в якому величини швидкостей деформації зсуву (а отже і сили внутрішнього тертя) досить значні (вони у сотні разів перебільшують значення останніх у венозній ділянці судинної системи).

2.2.3. В'язко-пружні властивості біологічних тканин

Біологічні структури (м'язи, судини, сухожилля, тканини легенів, шкіра тощо) являють собою в'язко-пружні системи. Їх поведінка вивчається на моделях, що вміщують пружні (E) та

в'язкі (η) елементи, у деяких випадках до них додають і елементи зовнішнього тертя (K).

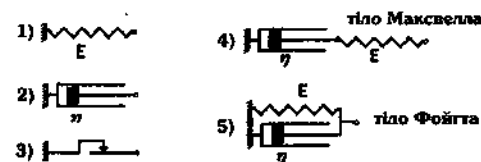


Рис. 2.10. Механічні моделі тканин: 1) пружний елемент; 2) в'язкий елемент; 3) елемент зовнішнього тертя; 4) послідовне з'єднання в'язкого та пружного елементів; 5) паралельне з'єднання в'язкого та пружного елементів

Пружний елемент являє собою ідеальну пружину, для якої виконується закон Гука. В'язкий елемент може бути поданий у вигляді циліндра, який заповнений в'язкою рідиною, з нещільним поршнем. Для витягування поршня необхідно прикласти деяку зовнішню силу, яка компенсує сили в'язкого тертя, що виникають при плинні рідини крізь зазор.

Напруження, що створюються цими елементами під дією зовнішніх сил, дорівнюють:

- $\sigma_n = E\varepsilon$ – для пружного елемента;
- $\sigma_\tau = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$ – для в'язкого елемента;
- $\sigma_\tau \sim KF_n$ – для елемента зовнішнього тертя при силі нормального тиску F_n і коефіцієнті тертя K .

Для відтворення механічних властивостей біологічних тканин використовують моделі, що складаються з цих елементів. Найпростішими моделями є тіло Максвелла і тіло Фойгта, що являють собою послідовне і паралельне з'єднання пружного та в'язкого елементів (див. рис. 2.10). Ці моделі дозволяють відтворити такі динамічні властивості тканин, як повзучість та релаксація напруження.

Повзучість – це явище зміни з часом розмірів зразка в умовах дії постійного напруження. Якщо у біологічних тканинах швидко створити, а потім підтримувати постійним деяке напруження, то з часом відбувається поступове подовження зразка аж до розриву тканин, навіть при умові, що постійне напруження має менше значення, ніж межа міцності матеріалу.

Динаміку повзучості подано на рис. 2.11, а. Зміна розмірів відбувається тим швидше, чим більше напруження, що підтримується у зразку (порівняйте криві 1, 2 та 3, для яких $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$).

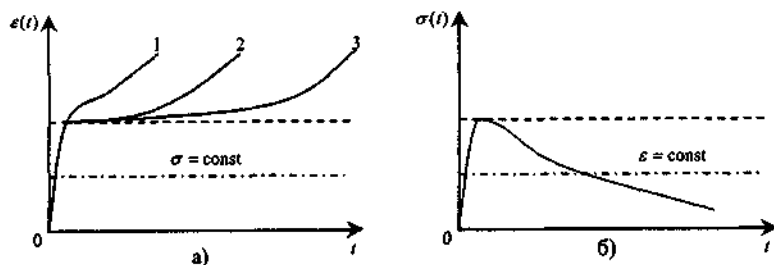


Рис. 2.11. Динамічні властивості біологічних тканин: а) повзучість – зміна деформації тіла за умови постійного напруження σ ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$); б) релаксація напруження – зменшення σ в умовах постійної деформації

Релаксація напруження – явище зменшення з часом величини напруження у зразку при підтримці постійної величини деформації. Якщо швидко розтягнути зразок і, підтримуючи постійною отриману деформацію, вимірювати напруження в ньому протягом деякого часу, помітним стане його зменшення з часом (рис. 2.11, б). Пунктирними лініями на обох рис. 2.11 відтворено поведінку чисто пружних тіл. Релаксація напруження і повзучість суто динамічні процеси – час їх існування вимірюється секундами або хвилинами. Наприклад, для м'язів час зменшення напруження на 40% становить близько 10 секунд.

Ці процеси легко пояснюються механічними моделями, наведеними на рис. 2.10 (позиція 4). Спочатку під дією зовнішніх сил деформується пружний елемент, а потім починається “плин” в'язкого елемента, змінюється його розмір, що викликає зміну як довжини, так і напруження. За допомогою моделі Максвелла легко отримати експоненціальний закон релаксації напруження

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-t/\alpha}, \quad (2.13)$$

де α – постійна часу релаксації, $\sigma_0 = E\varepsilon$ – початкове напруження.

Явище повзучості також можна описати експоненціальним законом

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 (1 - e^{-t/\tau}), \quad (2.14)$$

де $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ – початкова деформація, τ – характерний час процесу повзучості, що дорівнює відношенню коефіцієнта в'язкості і модуля Юнга. Формулу $\tau = \eta/E$ легко отримати з міркувань розмірності. Дійсно, розмірність η є Па·с, а розмірність E дорівнює $H/M^2 = Pa$. Тому єдина комбінація величин η і E , що має розмірність часу $[\tau] = c$, є їх відношення η/E .

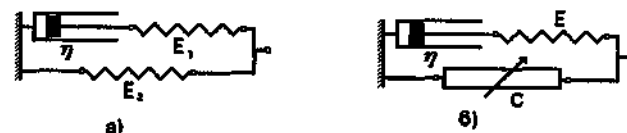


Рис. 2.12. Приклади механічних моделей біологічних тканин: а) трьохелементна модель для дослідження механічних властивостей в'язко-пружних тканин; б) трьохелементна модель м'язів, що включає скорочувальний елемент С

Модель Фойгта дозволяє пояснити поступове зменшення з часом напруження у зразку, якщо до тіла прикласти зусилля, що змінюється стрибкоподібно. Динаміка експоненціального зменшення напруження чи деформації відрізняється від експерименту. Кращих результатів можна досягти, якщо розглядати моделі, що включають до себе кілька пружних та в'язких елементів. Приклад однієї з таких моделей наведено на рис. 2.12. На цьому ж малюнку наведено одну з найпростіших моделей м'язів, що включає скорочувальний елемент С, котрий являє собою механохімічний конвертор, який перетворює енергію хімічних реакцій на механічну енергію. Ця механічна енергія витрачається на створення напруження і здійснення роботи по скороченню м'язів.

Наявність в'язко-пружних елементів, з'єднаних зі скорочувальними елементами, забезпечують ті гнучкі функціональні властивості, які притаманні цілому ряду фізіологічних систем (наприклад, серцево-судинній, м'язовій і ряду інших) для

виконання призначених їм функцій в умовах зміни як властивостей самої системи, так і зовнішніх навантажень. Це явище притаманне системам, які адаптуються. Так, зміна тонуусу судин еласто-м'язового типу дозволяє реалізувати таке явище, як депонування крові, при якому значне збільшення об'єму судини можливе лише при повній релаксації стінки судини і зменшенні її пружності. Навпаки, при необхідності вигнання крові з депо об'єм судин зменшується, релаксація напруження відбувається при інших розмірах судини, у цьому випадку зростає і модуль об'ємної пружності судин (їх тонуус).

2.2.4. Основні рівняння руху рідини

Рух рідких середовищ підпорядковується тим самим законам механіки, що і рух твердих тіл та газів. У суцільному середовищі можна виділити елементарний об'єм рідини dV (чи елемент маси $dm = \rho dV$, ρ – густина середовища), розглянути сили, що діють на нього і записати рівняння статки (рівноваги) чи динаміки. При русі у просторі кожний такий елементарний об'єм рухається вздовж деякої траєкторії – лінії течії (рис. 2.13, а, б). Дотична до будь-якої точки лінії течії збігається з напрямком вектора швидкості частинки у цій точці. Виділимо у просторі замкнений контур S . Всі лінії течії, що проходять крізь цей контур, утворюють трубку течії. Таким чином, трубка течії являє собою частину потоку рідини, обмежену лініями течії (рис. 2.13, в).

Описуючи потік рідини, часто використовують терміни – *поле швидкостей* і *профіль швидкостей*, що являють собою відповідно значення швидкостей у всіх точках простору і точках перерізу трубки течії у фіксований момент часу. Якщо лінії течії і поле швидкостей не змінюються з часом, то рух рідини називається *стаціонарним*. При стаціонарному плинні траєкторії частинок залишаються незмінними. Швидкість частинки може змінюватися при її русі вздовж лінії течії, але у кожній точці лінії течії вона зберігається за величиною і напрямком. Якщо поле швидкостей і лінії течії змінюються з часом, то такий плин зветься *нестационарним*. У цьому випадку лінії течії під час плину зникають і знову з'являються, у деяких випадках за формою

вони нагадують вихори (рис. 2.13, б), такий плин рідини називається *турбулентним* або *вихровим*.

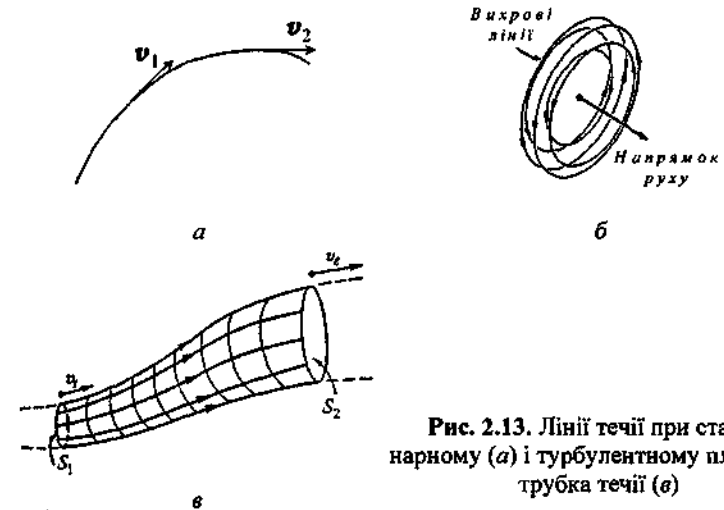


Рис. 2.13. Лінії течії при стаціонарному (а) і турбулентному плинні (б), трубка течії (в)

Рівняння нерозривності струменя. Розглянемо стаціонарний плин рідини. Позначимо через v середню швидкість плину рідини для довільно вибраного перерізу S трубки течії. Маса рідини, що протікає через цей переріз за одиницю часу, залишається постійною через те, що рідина не розривається і не стискається в звичайних умовах, тобто

$$dm/dt = \text{const.} \quad (2.15)$$

(Якщо б ця умова не виконувалася, то трубка течії не зберігалася б постійною у просторі). Оскільки $dm = \rho S dl = \rho S v \cdot dt$, з рівняння (2.15) отримаємо:

$$\rho \cdot S \cdot v = \text{const.} \quad (2.16)$$

Для нестисливої рідини ($\rho = \text{const}$) рівняння нерозривності течії дає зв'язок між площиною перерізу трубки течії і середньою швидкістю плину рідини:

$$S \cdot v = \text{const.}$$

або для різних перерізів трубки течії (див. рис. 2.14)

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2. \quad (2.17)$$

Величина $Q = dV/dt = S \cdot v$ [$\text{м}^3/\text{с}$], що дорівнює об'єму рідини, який протікає через переріз трубки течії за одиницю часу, зветься *об'ємною швидкістю плинину рідини*. При стаціонарному плинні вона залишається величиною сталою. Аналогами цієї величини у фізіології є *витрата крові* або *хвилинний об'єм крові (ХОК)*. Виходячи з означення об'ємної швидкості плинину рідини, хвилинний об'єм крові можна обчислити як відношення *ударного об'єму крові* V_{yo} до періоду скорочення серця T , або добутку V_{yo} на частоту серцевих скорочень $\text{ЧСС} = 1/T$:

$$\text{ХОК} = V_{yo}/T = V_{yo} \cdot \text{ЧСС}.$$

Коли кров рухається по еластичних судинах, внаслідок їх деформації при зміні тиску лінії течії не залишаються постійними. У цьому випадку рівняння нерозривності течії може бути подано таким чином:

$$dV/dt = Q_1(t) - Q_2(t), \text{ або } \Delta V = \int [Q_1(t) - Q_2(t)] dt, \quad (2.18)$$

де $Q_1(t)$ та $Q_2(t)$ – відповідно приплив та відток крові для ділянки судини. Ці рівняння будуть в подальшому використані при вивченні фізичних основ *реографії* (див. пункт 4.5 в розділі “Електронна медична апаратура”).

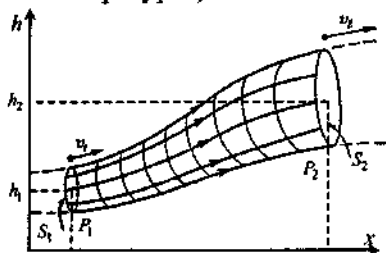


Рис. 2.14. Трубка течії

Рівняння Бернуллі. Розглянемо стаціонарний плин ідеальної рідини. Виділимо у просторі трубку течії (рис. 2.14) і розглянемо енергію малого елемента об'єму рідини з масою $\Delta m = \rho \Delta V$, що протікає через переріз трубки течії за деякий час. Оскільки рідина є ідеальною і робота сил тертя дорівнює нулю, то повна

енергія деякого елемента об'єму рідини у цьому випадку буде залишатися величиною сталою при русі вздовж трубки течії:

$$E = E_k + E_n + E_{cm} = \text{const}, \quad (2.19)$$

де $E_k = \Delta m \cdot v^2/2$ – кінетична енергія, $E_n = \Delta mgh$ – потенціальна енергія, а $E_{cm} = P \cdot \Delta V$ – внутрішня енергія ідеальної рідини. Підставляючи ці вирази у формулу (2.19) і вводячи об'ємну густину енергії $w = E/\Delta V$, отримаємо рівняння Бернуллі, котре являє собою закон збереження енергії для одиниці об'єму рідини, що рухається

$$w = \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + P = \text{const}. \quad (2.20)$$

Таким чином, фізичний зміст рівняння Бернуллі полягає в тому, що об'ємна густина енергії w ідеальної рідини при її стаціонарному плинні залишається величиною сталою. Зауважимо, що розмірність об'ємної густини енергії дорівнює $[w] = [E]/[\Delta V] = \text{Дж}/\text{м}^3 = \text{Н}/\text{м}^2$, тобто вона збігається з розмірністю тиску $[p] = \text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$. Тому в гідравліці компоненти об'ємної густини енергії w називають: $\rho v^2/2$ – *динамічним*, ρgh – *гідростатичним* та P – *статичним* тисками. У цьому випадку рівняння Бернуллі свідчить про те, що сумарний тиск залишається постійним вздовж трубки течії при стаціонарному плинні ідеальної рідини.

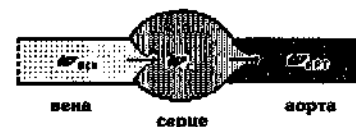


Рис. 2.15. Об'ємна енергія крові: $w_{\text{вен}}$ – у венозному руслі; $w_{\text{арт}}$ – у артеріальному руслі; їх різниця $w_c = w_{\text{арт}} - w_{\text{вен}}$

Коли кров рухається по судинному руслу, величина об'ємної густини енергії різко змінюється при переході з венозного русла до артеріального (рис. 2.15). Ця зміна обумовлена діяльністю серця як насоса. *Насосна функція серця полягає у зміні об'ємної густини енергії крові.* Насосну функцію серця можна

характеризувати різницею об'ємних густин енергії на вході та виході серця, тобто величиною

$$w_c = w_{\text{арм}} - w_{\text{вен}}$$

Розрахунок цих величин за формулою (2.20) свідчить про те, що більш як 95% від величини w_c припадає на потенціальну енергію стисненої рідини в аорті, яка, в свою чергу, визначається величиною середнього артеріального тиску. Отже, величина артеріального тиску дозволяє судити про насосну функцію серця й енергію крові на виході серця, за рахунок якої відбувається її подальший рух по судинному руслу. Зауважимо, що у всіх теплокровних середнє значення артеріального тиску одне і те ж, порядку 90–100 мм Hg, у той час як інші найважливіші показники системи кровообігу (такі, як хвилинний об'єм, частота серцевих скорочень) значно відрізняються. Більш того, в організмі існує спеціальна система слідкування за артеріальним тиском, а точніше – за об'ємною густиною енергії крові. Саме її підтримка на певному рівні дозволяє забезпечити рух крові крізь капіляри з оптимальною швидкістю, при якій відбувається рівномірна віддача кисню оточуючим тканинам (незалежно від того, яка їх кількість включена до роботи і який хвилинний об'єм протікає крізь них).

З наведеного вище можна зробити висновок, що кількість енергії, що її передає серце одиниці об'єму крові, є однією з найважливіших констант організму. Спеціальні регуляторні механізми серця забезпечують саме такий режим скорочення міокарда, за якого при різних навантаженнях серце було б здатне підтримувати на певному рівні об'ємну густину енергії потоку крові, витрачаючи при цьому мінімум хімічної енергії при скороченні міокарда.

Рівняння руху і рівноваги рідини. Виділимо у рідині елементарний об'єм ΔV циліндричної форми з перерізом S і довжиною Δx (рис. 2.16). За другим законом Ньютона:

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i,$$

або для об'ємних сил:

$$\frac{d(\rho \cdot \mathbf{v})}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i / \Delta V = \sum_i \mathbf{f}_i. \quad (2.21)$$

Розглянемо сили, що діють на елемент об'єму рідини. Результуюча сила тиску дорівнює

$$F = S[P(x) - P(x + dx)] = -SdP,$$

тоді як об'ємна сила тиску (сила, що діє на одиницю об'єму) є

$$f = \frac{-SdP(x)}{dV} = \frac{-SdP(x)}{S \cdot dx} = -\frac{dP(x)}{dx}.$$

Проводячи аналогічний розгляд для y, z -компонент сил, отримаємо:

$$f = -\text{grad}P = -\nabla P, \quad (2.22)$$

де ∇ – символ градієнта (так званий “оператор набла”). З рівняння (2.22) випливає, що об'ємна результуюча сила тиску за модулем дорівнює градієнту тиску.

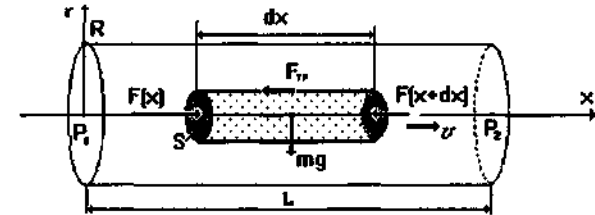


Рис. 2.16. Сили, що діють на елемент об'єму рідини

Рівняння руху рідини (2.4) з урахуванням інших об'ємних сил, а саме, сили тертя $f_{\text{тр}}$, сили тяжіння ρg , інших зовнішніх сил $f_{\text{зовн}}$, можна записати у вигляді:

$$\rho \cdot dv/dt = -\nabla P + f_{\text{тр}} + \rho g + f_{\text{зовн}}. \quad (2.23)$$

Якщо сила тиску зрівноважується іншими силами за умови, що $dv/dt = 0$, то

$$\nabla P + f_{\text{тр}} + \rho g + f_{\text{зовн}} = 0. \quad (2.24)$$

Аналогічним рівнянням описують і рівноважний стан рідини, коли рідина знаходиться у спокої, тобто швидкість $v = 0$.

Плин ньютонівської рідини по горизонтальній трубці

Формула Пуазейля. Плин в'язких рідин по циліндричних трубках має для медицини особливий інтерес. Судинна система може бути представлена сіткою циліндричних трубок різного діаметра, лінійна й об'ємна швидкості плинну рідини по яких залежать не лише від властивостей рідини, а й від геометричних розмірів судин. Визначимо лінійну й об'ємну швидкості плинну для стаціонарного потоку в'язкої рідини крізь судину радіусом R , довжиною L , з перепадом тиску на його кінцях $P_1 - P_2$ (рис. 2.16).

Запишемо рівняння руху (2.24) для стаціонарного плинну ньютонівської рідини, коли зовнішні сили дорівнюють нулеві, і сила тяжіння не впливає на плин рідини:

$$-\nabla P + f_{mp} = 0 \text{ або } \nabla P = f_{mp}. \quad (2.25)$$

Припустимо, що градієнт тиску вздовж трубки струму є постійна величина: $\nabla P = (P_2 - P_1)/L$. Об'ємна сила тертя f_{mp} дорівнює (2.8):

$$f_{mp} = \frac{F_{mp}}{\Delta V} = \eta S_1 \frac{dv}{dr} \frac{1}{S_2 dx},$$

де $S_1 = 2\pi r dx$ – площа бічної поверхні циліндра, $S_2 = \pi^2$ – площа перерізу циліндра радіуса r . Підставивши ці вирази у рівняння (2.25), отримаємо диференціальне рівняння, що визначає зміну швидкості рідини вздовж радіуса трубки:

$$dv = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta L} \cdot r dr.$$

Проінтегруємо це рівняння

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta L} \cdot r^2 + C,$$

де сталу інтегрування C знаходимо з умови $v = 0$ на границі судини, тобто при $r = R$. Це дає $C = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} \cdot R^2$. В результаті

отримаємо *формулу Пуазейля*, яка визначає профіль швидкості ньютонівської рідини в циліндричній трубці

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} \cdot (R^2 - r^2). \quad (2.26)$$

З цієї формули випливає, що профіль швидкостей ньютонівської рідини в циліндричній трубці описується параболічним законом (рис. 2.17, а).

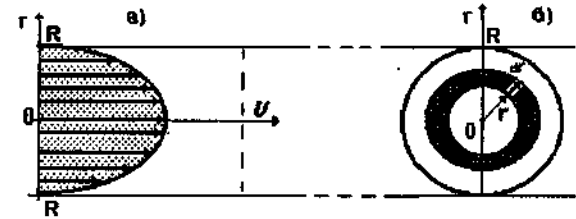


Рис. 2.17. Розподіл швидкостей плинну ньютонівської рідини по перерізу трубки (а); переріз трубки течії (б)

Формула Пуазейля дозволяє визначити об'ємну швидкість плинну ньютонівської рідини. Виділимо у перерізі трубки шар рідини товщиною dr і площею $dS = 2\pi r dr$ (рис. 2.17, б). Об'єм рідини, що протікає крізь цю площу за одиницю часу, дорівнює

$$dQ = v(r)dS = v(r) \cdot 2\pi r dr.$$

Підставивши в цю формулу вираз (2.26) для швидкості і інтегруючи отримане рівняння, дістанемо формулу, що дозволяє визначити об'ємну швидкість рідини:

$$Q = \int_0^R \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{P_1 - P_2}{L}. \quad (2.27)$$

Помноживши об'ємну швидкість рідини на час плинну, отримаємо формулу для визначення об'єму рідини V , що протікає через переріз судини за час t :

$$V = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{P_1 - P_2}{L} \cdot t. \quad (2.28)$$

З формул (2.27) та (2.28), які зветься формулами Гагена-Пуазейля, випливає, що кількість рідини, яка протікає крізь

судину, найбільш суттєво залежить від його радіуса і зменшується із зростанням в'язкості рідини.

Формула (2.27), що зв'язує між собою об'ємну швидкість рідини і різницю тисків на кінцях судини, має вигляд, аналогічний закону Ома:

$$Q = (P_1 - P_2)/W, \quad (2.29)$$

тому величину $W = 8\eta L/(\pi R^4)$ називають *гидравлічним опором*.

Графічні зображення зв'язку $Q-\Delta P$ називають діаграмами "витрата-тиск". Їх вигляд для ньютонівської рідини і рідини, в'язкість якої залежить від градієнта швидкості (наприклад, для крові), подані на рис. 2.18.

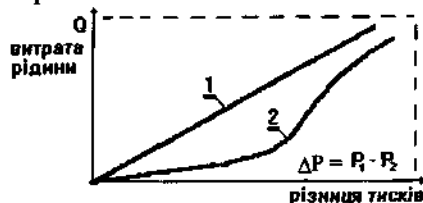


Рис. 2.18. Діаграми "витрата-тиск" для ньютонівської (1) та неньютонівської (2) рідин

2.2.5. Критерії механічної подібності рідин, що рухаються

Незважаючи на різноманітність рухів рідин у природі, можна поставити питання: яким умовам повинні відповідати параметри потоку і параметри рідин (густина, в'язкість тощо), щоб рухи рідин були механічно подібні? Якщо подібність має місце, то, знаючи картину плинності рідини в одній системі, можна передбачити і характер плинності рідини в іншій, геометрично подібній системі. Це має важливе значення не лише у техніці (випробування моделей літаків, кораблів тощо), а й в експериментальній медицині (наприклад, при дослідженні процесів обтікання кров'ю різних моделей серцевих клапанів, особливостей плинності рідин по штучних судинах, криволінійному ложеві насоса апарату штучного кровообігу тощо).

Розглядаючи будь-який плин рідин і рівняння його руху, можна виділити деякі важливі параметри рідини (η – в'язкість, ρ

– густина, χ – модуль об'ємної пружності) і характеристики її руху (v – швидкість, L – характерні розміри, τ – деякий характерний час, протягом якого відбуваються помітні зміни плинності тощо). У гідродинаміці відомі декілька безрозмірних величин, що являють собою комбінацію цих параметрів. Це числа Рейнольдса (Re), Фруда (F), Маха (M), Струхалія (S). Кожне з цих чисел має певний фізичний зміст. Так, число Маха є відношенням швидкостей руху тіла і звука у даному середовищі ($M = v/c$). Число Струхалія – відношення деякого характерного розміру потоку рідини і розмірів тіла ($S = v\tau/L$). Число Фруда ($F = v^2/gL$) визначає відношення кінетичної енергії рідин до її приросту, обумовленого роботою сили тяжіння на деякій характерній відстані (чим більше число Фруда, тим більша роль інерції у порівнянні з дією сили тяжіння).

Одним з найважливіших критеріїв подібності є число Рейнольдса. За порядком величини воно дорівнює відношенню кінетичної енергії рідини до витрати її, обумовленої роботою сил в'язкого тертя на характерній довжині. Дійсно, кінетична енергія рідини $E_k \sim \rho L^3 v^2$, робота сил в'язкості $A = F_m \cdot L$. Силу в'язкого тертя знайдемо за формулою Ньютона $F_m \sim \eta L^2 \cdot \frac{v}{L}$.

Відношення кінетичної енергії E_k до роботи A і становить число Рейнольдса:

$$Re = \frac{\rho L v}{\eta}. \quad (2.30)$$

Число Рейнольдса, таким чином, визначає відносну роль інерції і в'язкості рідини при її плинності. При великих числах Рейнольдса головну роль відіграє інерція, при малих – в'язкість. При плинності рідини по циліндричних трубках у ролі характерного розміру L часто використовують радіус чи діаметр судини. Потоки рідин вважаються подібними, якщо для них числа Рейнольдса і Фруда збігаються. При малих числах Рейнольдса плин в'язких рідин є *ламінарним*, при зростанні швидкості ламінарний плин стає нестійким і перетворюється в *турбулентний*. Турбулентний плин – це такий плин, гідродинамічні характеристики якого (швидкість, тиск) різко та

нерегулярно змінюються з часом і у просторі. Частинки рідини рухаються по складних траєкторіях, рідина інтенсивно перемішується. Прикладом такого руху є рух крові при її вигнанні з шлуночків серця, її плинні по аорті тощо.

Слід зауважити, що при турбулентному русі рідини не діють звичайні формули гідродинаміки (гемодинаміки). Так, на відміну від закону Гагена–Пуазейля і формули Пуазейля, згідно з якими при ламінарному плинні об'ємна швидкість Q чи лінійна швидкість v пропорційні різниці тисків $v \sim P_1 - P_2$ у першому степені, при турбулентній течії рідини за певними умовами має місце закон Шезі, згідно з яким лінійна швидкість $v \sim \sqrt{P_1 - P_2}$. Для рідини, що тече по певній судині, можна визначити значення швидкості $v_{кр}$, при якій рух із ламінарного перетворюється у турбулентний. Число Рейнольдса, при якому відбувається це явище, зветься критичним:

$$Re_{кр} = \frac{\rho L v_{кр}}{\eta} \quad (2.31)$$

В геометрично подібних системах перехід від ламінарного до турбулентного плинну відбувається завжди при одних і тих самих значеннях числа Рейнольдса. Так, згідно (2.31) критичне значення числа $Re_{кр}$ для в'язкої рідини, що тече по довгій циліндричній трубці, становить 2300. Значення чисел Рейнольдса для крові в різних ділянках судинного русла подані у табл. 2.2.

Зауважимо, що зміна величини в'язкості крові (наприклад, при анемії) може діагностуватися завдяки виникненню турбулентних шумів. Це пояснюється тим фактом, що при анемії коефіцієнт в'язкості зменшується у 2–3 і більше разів. Відповідно число Рейнольдса збільшується, оскільки $Re \sim 1/\eta$. Як наслідок, число Рейнольдса стає більшим за своє критичне значення і виникає перехід від ламінарного плинну крові до турбулентного.

Ще одне медичне застосування переходу між ламінарною і турбулентною течією крові пов'язане з вимірюванням кров'яного тиску методом Короткова. У цьому методі систолічний (верхній) тиск вимірюється у момент, коли кров починає

протискуватися через отвір в артерії, стисненій за допомогою манжети. Саме у цей момент виникають шуми, обумовлені появою турбулентної течії крові. Діастолічний (нижній) тиск фіксується у момент, коли ці шуми зникають внаслідок послаблення манжети і переходу течії від турбулентної до ламінарної.

2.2.6. Пульсові хвилі

Існування пульсових хвиль легко виявити. Для цього достатньо притиснути пальцем променеву або сонну артерії і відчуті "биття" стінки артеріальної судини. Чутливі пристрої можуть зареєструвати коливання стінок і венозних судин, які значно слабкіші за коливання артеріальних судин. Як виникають пульсові коливання, у чому полягає їх фізична природа? Проблема ця досить складна і вирішена лише частково. Плин крові по судинному руслу супроводжується різноманітними коливаннями: це і поздовжні хвилі тиску, що поширюються у рідкому середовищі зі швидкістю звуку, це і періодичні зміни швидкості руху рідини, пов'язані з переривчастим викидом крові серцем в судинне русло, це і періодична зміна просвіту судини при зміні її кровонаповнення. Всі ці процеси взаємопов'язані, вони характеризують єдине явище – рух крові по складному дереву судинного русла.

Розглянемо спрощену модель виникнення пульсових хвиль в еластичній судині. Зрозуміло, що їх походження пов'язане з діяльністю серця. Коли б на виході серця плин крові був сталим, то ніяких пульсацій не виникало б. З іншого боку, коли б стінки судин були дуже жорсткими, то навіть при пульсуючому кровотоці рух стінок був би практично непомітним. Отже, *походження пульсових хвиль пов'язане з реакцією пружних стінок судини на пульсуючий плин крові, що виникає при періодичній роботі серця.*

Виділимо невелику ділянку еластичної судини (рис. 2.19), на одному з кінців якого знаходиться поршень. На поршень короткочасно діє сила F . Рідина біля поршня внаслідок її інерції не встигає переміститися вздовж судини, дія сили викликає зростання тиску на стінки – ділянка розширюється доти, доки

напруження стінки не компенсує зростання тиску всередині судини. Оскільки натяг стінки у цій області буде більшим, ніж у сусідніх, рідина буде переміщуватися далі по судині. Переміщення рідини приведе до зменшення тиску на цій ділянці, судина почне відновлювати первісний об'єм у той час, як об'єм сусідньої ділянки буде зростати. Процес повторюється після нового поштовху поршня. По еластичній стінці буде поширюватися пульсова хвиля.

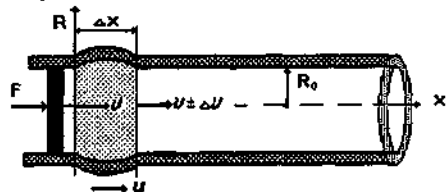


Рис. 2.19. Модель ділянки еластичної судини

Запишемо рівняння пульсової хвилі. Для цього розглянемо рух ідеальної рідини по еластичній трубці під дією одних лише сил тиску. Виділимо ділянку завдовжки Δx і об'ємом V . Позначимо зміну радіуса ділянки трубки при розширенні через ε , тоді поточне значення радіуса дорівнюватиме

$$R(x,t) = R_0 + \varepsilon(x,t). \quad (2.32)$$

Рівняння пульсової хвилі, яке характеризує процес розповсюдження зміни радіуса судини ε вздовж її осі, має такий вигляд:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}, \quad (2.33)$$

де $u = \sqrt{\frac{\chi}{\rho}}$ – швидкість поширення пульсової хвилі.

За умови відсутності поздовжнього натягу (так, що трубка не буде скорочуватись при розширенні) модуль об'ємної пружності χ для тонкої циліндричної судини радіусом R і товщиною стінки h визначається за формулою (2.7) без множника $1 - \mu^2$. Після підстановки маємо формулу Моенса-Кортевега для швидкості:

$$u = \sqrt{\frac{2hE}{\rho R}}. \quad (2.34)$$

Таким чином, швидкість поширення пульсової хвилі залежить як від геометричних параметрів судини (радіуса і товщини), так і від пружних властивостей судинної стінки.

Модуль Юнга, як було показано вище, не залишається величиною сталою для судини, тому швидкість поширення пульсових хвиль може значно змінюватися. Деякі приклади зміни швидкостей розповсюдження пульсових хвиль наведено на рис. 2.20. Швидкість пульсової хвилі значно змінюється при різних судинних захворюваннях, у зв'язку з цим її клінічне визначення дозволяє одержати додаткову інформацію для оцінки функціонального стану стінок судин.

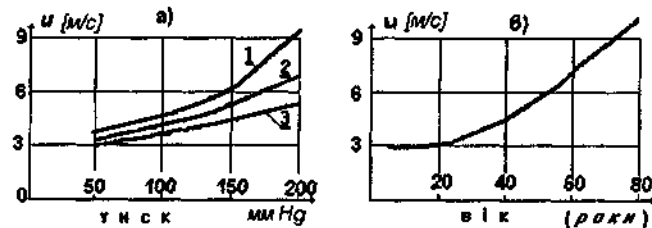


Рис. 2.20. а) зміна швидкості з ростом тиску (1, 2, 3 – відповідно для похилого, середнього та молодого віку), б) зміна швидкості з віком

Рух крові по серцево-судинній системі досить складне явище. Складну будову має кровоносне русло, що являє собою розгалужену систему еластичних судин різного типу. Сама рідина – кров – є складна суспензія, реологічні характеристики якої залежать від умов її плину. Система кровообігу має активні джерела енергії (шлуночки і передсердя серця). Різні активні фізіологічні процеси (механізми рефлекторної зміни тону судин та продуктивність серця) змінюють фізіологічні властивості системи кровообігу, а отже й умови руху крові. Будь-який опис процесів гемодинаміки (від простих випадків механіки руху крові до складних процесів рефлекторного керування кровообігом) базуються на експериментальних даних, накопичених за багато років досліджень. У таблиці 2.2 наведено деякі

показники системи кровообігу в стані спокою і при навантаженні.

Таблиця 2.2. Деякі показники системи кровообігу людини в нормі і при навантаженнях

№	Параметри системи кровообігу	Значення
1	Середня лінійна швидкість в аорті – в капілярі – у вені	0,3–0,4 м/с 0,002–0,01 м/с 0,2–0,4 м/с
2	Середній артеріальний тиск – спокій – максимальне навантаження	90–100 мм рт. ст. вище за 200 мм рт. ст.
3	Середній тиск у капілярах	25–30 мм рт. ст.
4	Хвилиний об'єм крові – спокій – максимальне навантаження	5–6 л/хв Вище за 20 л/хв
5	Швидкість пульсової хвилі (артерія)	4–6 м/с
6	Число Рейнольдса в аорті у вені в капілярі	3000–4000 500–700 0,001
7	Площа перерізу – аорти – капілярів	$\approx 3 \text{ см}^2$ $\approx 1200 \text{ см}^2$

2.3. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

Багатьом процесам, що відбуваються в біологічних системах, властива періодичність. Вона спостерігається у функціональній діяльності серця, легенів, шлунка. Деякі процеси у живих організмах можна вважати коливальними: коливання стінок судин при поширенні пульсових хвиль, коливання тиску крові у судинах, об'єму повітря у легенях, коливання барабанних перетинок, голосових зв'язок, значень біопотенціалів у різних точках тіла людини. Для визначення норми або патології того чи іншого органа застосовують графічний запис періодичних процесів, які супроводжують його функціональну діяльність, з подальшим його аналізом – визначенням його тривалості (періоду), частоти й амплітуди досліджуваних величин. Для

розв'язання подібних задач необхідне знання загальних закономірностей, що притаманні коливальним процесам незалежно від їх природи і що описуються єдиними математичними рівняннями. Закономірності, властиві коливальним процесам, найбільш просто вивчати на прикладі механічних коливань.

2.3.1. Гармонічні коливання та їх основні параметри

Розглянемо пружинний маятник (рис. 2.21). При зміщенні матеріальної точки масою m на відстань x відносно положення рівноваги на неї починає діяти сила пружності, яка викликана деформацією пружини

$$F_{\text{пр}} = -kx. \quad (2.35)$$

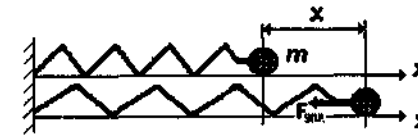


Рис. 2.21. Пружинний маятник

Згідно з II законом Ньютона ця сила надаватиме матеріальній точці прискорення:

$$F_{\text{пр}} = ma. \quad (2.36)$$

Прирівнюючи праві частини рівностей (2.35) і (2.36), одержимо:

$$ma = -kx. \quad (2.37)$$

Враховуючи, що прискорення є другою похідною від координати за часом $a = \ddot{x}$, останнє рівняння набуває вигляду лінійного диференційного рівняння

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (2.38)$$

Оскільки коефіцієнт жорсткості пружини $k > 0$ і $m > 0$, відношення k/m можна позначити через квадрат деякої величини ω_0 : $\omega_0^2 = k/m$. Тоді рівняння (2.38) матиме вигляд:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.39)$$

Таким чином, функція $x = f(t)$ задовольняє диференційному рівнянню II-го порядку, яке є лінійним, однорідним і зі сталими коефіцієнтами. Розв'язок таких рівнянь, як відомо, зводиться до розв'язування відповідних характеристичних алгебраїчних рівнянь.

Складемо характеристичне рівняння, що відповідає диференційному рівнянню (2.39):

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (2.40)$$

Корені цього квадратного рівняння дорівнюють $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, тобто вони є різними й уявними.

Загальний розв'язок диференційного рівняння (2.39) на випадок таких коренів відповідного характеристичного рівняння має вигляд:

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t.$$

Нехай $c_1 = A \cos \varphi_0$, а $c_2 = -A \sin \varphi_0$, де A та φ_0 – довільні сталі, тоді

$$x(t) = A \cos \varphi_0 \cos \omega_0 t - A \sin \varphi_0 \sin \omega_0 t = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.41)$$

Якщо покласти $c_1 = A \sin \varphi_0$, а $c_2 = A \cos \varphi_0$, то прийдемо до результату:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.42)$$

Значення сталих A та φ_0 визначаються початковими умовами, тобто положенням та швидкістю матеріальної точки в момент часу $t = 0$.

Отже, ми дійшли до висновку: *матеріальна точка, що знаходиться під дією пружної сили, здійснює коливальний рух, при якому її зміщення від положення рівноваги змінюється з часом за законом синуса або косинуса. Такі коливання називають гармонічними.*

Стала A в рівняннях (2.42) є амплітуда гармонічного коливання, вона дорівнює максимальному зміщенню маятника від положення рівноваги. Аргумент синуса (або косинуса): $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ – фаза коливань. Фаза визначає зміщення маятника в будь-який момент часу, φ_0 – початкова фаза, яка визначає

зміщення маятника в момент часу $t = 0$. Величина $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – циклічна частота коливань.

Тій же самій закономірності підпорядковується зміщення від положення рівноваги математичного маятника, що коливається, при невеликих кутах відхилення α (рис. 2.22).

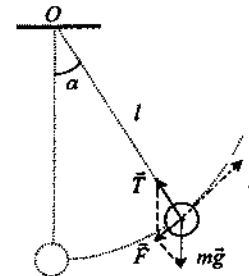


Рис. 2.22. Математичний маятник

Сила, яка спричиняє коливання математичного маятника, не є пружною за своєю природою. Дійсно, повертаюча сила F спрямована по дотичній до дуги кола радіуса l , напрямлена до положення рівноваги і пропорційна зміщенню x :

$$F = -mg \cdot \sin \alpha \cong -mg \cdot \alpha = -mg \frac{x}{l}$$

(оскільки для малих кутів α маємо $\sin \alpha \cong \text{tg} \alpha \cong \alpha$).

Сила, що не є пружною за своєю природою, але аналогічна їй по залежності від зміщення, називається *квазіпружною*. Таким чином, F є квазіпружною силою. Рівняння динаміки для математичного маятника матиме вигляд:

$$m\ddot{x} = -mg \frac{x}{l}, \text{ або } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2.43)$$

Отримане рівняння повністю збігається з рівнянням (2.41), що описує рух пружинного маятника, а отже має той самий розв'язок. Таким чином, гармонічні коливання – це коливання, що відбуваються під дією пружних або квазіпружних сил.

Швидкість та прискорення при гармонічних коливаннях

Нехай відлік часу обрано таким чином, щоб початкова фаза $\varphi_0 = 0$. Тоді розв'язок рівняння (2.39) або (2.43) матиме вигляд:

$$x(t) = A \sin \omega_0 t. \quad (2.44)$$

Швидкість тіла, що коливається, знайдемо як похідну від координати x за часом t

$$v = \frac{dx}{dt} = A \omega_0 \cos \omega_0 t = v_m \sin \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (2.45)$$

де $v_m = A \omega_0$ – амплітуда швидкості.

З рівнянь (2.44) та (2.45) випливає, що швидкість також змінюється за гармонічним законом, а фаза швидкості відрізняється від фази зміщення на $\pi/2$, тобто в момент часу, коли $x = 0$, швидкість максимальна.

Оскільки швидкість при гармонічних коливаннях змінюється з часом, то цей рух характеризується прискоренням, яке знайдемо як другу похідну від зміщення x за часом

$$\begin{aligned} a &= \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (A \omega_0 \cos \omega_0 t) = \\ &= -A \omega_0^2 \sin \omega_0 t = a_m \sin (\omega_0 t + \pi), \end{aligned} \quad (2.46)$$

де $a_m = A \omega_0^2$ – амплітуда прискорення.

Видно, що і прискорення змінюється за гармонічним законом, а фаза прискорення відрізняється від фази зміщення на π , а від фази швидкості на $\pi/2$. Замінивши в (2.46) $A \sin \omega_0 t$ через x , отримаємо:

$$a = -\omega_0^2 x.$$

З цієї рівності виходить, що при гармонічних коливаннях прискорення тіла прямо пропорційне до зміщення від положення рівноваги і має протилежний зміщенню напрям.

Період і частота гармонічних коливань

Періодом гармонічного коливального руху називають найменший проміжок часу T , по закінченні якого всі величини, що характеризують цей рух (x , v , a), набувають первісних значень. З рівностей (2.44) – (2.46) випливає, що періоду коливань відповідає зміна фази на величину 2π .

У момент часу t фаза дорівнює $\omega_0 t + \varphi_0$, а в момент часу $t+T$: $(\omega_0(t+T) + \varphi_0)$. Тоді з умови періодичності $(\omega_0(t+T) + \varphi_0) - (\omega_0 t + \varphi_0) = 2\pi$ маємо:

$$\omega_0 T = 2\pi, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (2.47)$$

Підставляючи в (2.47) вирази для ω_0 , що відповідають пружинному та математичному маятникам, отримаємо відповідні вирази для періодів коливань цих маятників:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.48)$$

Величину $\nu = 1/T = \omega_0/2\pi$ називають частотою коливань. Частота вказує, скільки разів за 1 сек повторюється один і той же стан тіла, що коливається. Частота вимірюється в Герцах ($\Gamma\text{ц}$), $[\nu] = 1/\text{с} = \text{с}^{-1} = \Gamma\text{ц}$.

Розглянуті коливання відбуваються при відсутності сил тертя і зовнішніх сил. Такі коливання називають власними. Частота (період) власних коливань, як випливає з (2.48), залежить лише від властивостей самої системи.

2.3.2. Затухаючі коливання і аперіодичний рух

Припустимо, що в розглянутих системах існує тертя чи опір, причому сила тертя (опору) пропорційна швидкості: $F_m = -rv$, де r – коефіцієнт тертя (опору). Запишемо в цьому випадку рівняння руху (II закон Ньютона).

$$ma = -kx - rv \quad \text{або} \quad \ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Позначивши $\frac{r}{m} = 2\beta$, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, отримаємо диференційне рівняння другого порядку, що описує рух пружинного маятника у присутності сил тертя

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.49)$$

Складемо характеристичне рівняння, що відповідає диференційному рівнянню (2.49):

$$\lambda^2 + \beta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (2.50)$$

Загальний розв'язок рівняння (2.49) залежить від знака різниці $\beta^2 - \omega_0^2$. Розглянемо всі можливі випадки:

1. $\beta^2 < \omega_0^2$, коли корені характеристичного рівняння є комплексними числами (затухаючі коливання)

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{-(\omega_0^2 - \beta^2)} = -\beta \pm i\omega,$$

де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклічна частота. У випадку комплексних коренів характеристичного рівняння загальний розв'язок (2.49) має вигляд

$$x(t) = e^{-\beta t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t),$$

$$\text{або } x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) = A(t) \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2.51)$$

де $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ – амплітуда коливань, яка зменшується за експоненціальним законом, β – коефіцієнт затухання, визначає швидкість затухання амплітуди. Залежність $x = f(t)$ для затухаючих коливань подано на рис. 2.23.

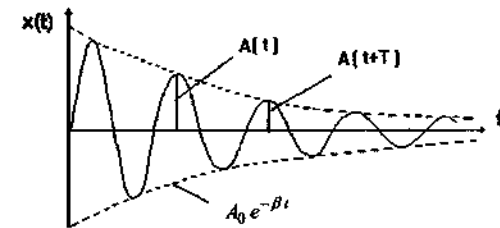


Рис. 2.23. Затухаючі коливання

Ступінь затухання часто характеризують *декрементом затухання* δ і *логарифмічним декрементом затухання* λ^* :

$$\delta = \frac{A(t)}{A(t+T)},$$

$$\lambda^* = \ln \delta = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T,$$

де період затухаючих коливань дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

2. $\beta^2 > \omega_0^2$, коли корені характеристичного рівняння є дійсними числами (аперіодичні коливання)

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < 0.$$

У цьому випадку загальний розв'язок рівняння (2.49) матиме вигляд

$$x(t) = c_1 e^{-|\lambda_1|t} + c_2 e^{-|\lambda_2|t}, \quad (2.52)$$

що відповідає аперіодичному рухові (рис. 2.24):

3. $\beta^2 = \omega_0^2$, коли корені є кратними. Легко побачити, що і в цьому випадку рух тіла буде аперіодичним.

Коливання, що виникають у системі при відсутності зовнішніх сил, називають *вільними*. Частота вільних коливань залежить як від пружних властивостей системи (ω_0), так і від

інтенсивності втрат (β). Якщо $\beta^2 \ll \omega_0^2$, то $\omega \cong \omega_0$ і період вільних коливань стає близьким до періоду власних коливань.

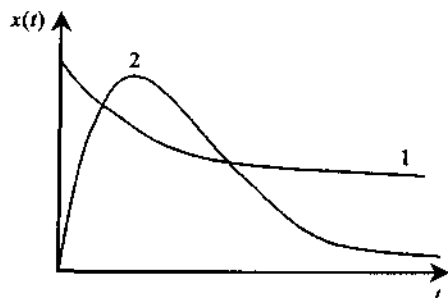


Рис. 3.24. Аперіодичний рух

2.3.3. Вимушені коливання

Припустимо, що на матеріальну точку масою m , крім пружної або квазіпружної сили і сили тертя, діє зовнішня вимушуюча сила, що змінюється за періодичним законом

$$F_y = F_0 \sin \Omega t,$$

де F_0 – амплітуда, а Ω – циклічна частота вимушуючої сили. В цьому випадку рівняння руху матиме вигляд

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \sin \Omega t, \text{ або}$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \Omega t, \quad f_0 = \frac{F_0}{m}. \quad (2.53)$$

Загальний розв'язок диференційного рівняння (2.53) має вигляд

$$x = A \sin(\Omega t + \varphi_0), \quad (2.54)$$

де A – амплітуда вимушених коливань, яка дорівнює

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}}, \quad (2.55)$$

а початкову фазу φ_0 визначають з рівності:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (2.56)$$

Важливу формулу (2.55) для амплітуди A вимушених коливань можна отримати, скориставшись графічним методом розв'язку неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. З формули (2.54) для зміщення x легко отримати вирази для похідних

$$\dot{x} = A\Omega \cos(\Omega t + \varphi_0) = A\Omega \sin\left(\Omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ddot{x} = -A\Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi_0) = A\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_0 + \pi).$$

Якщо намалювати “векторну” або “фазову” діаграму (рис. 2.25, а), відклавши на ній амплітудні значення всіх доданків у рівнянні (2.53) з урахуванням зсуву їх фаз, то очевидно, що векторна сума трьох доданків у лівій частині (2.53) повинна дорівнювати амплітудному значенню вимушуючої сили, тобто $((\Omega^2 - \omega_0^2)A)^2 + (2\beta\Omega A)^2 = f_0^2$. Звідси безпосередньо випливає формула (2.55) для амплітуди A , так само як і формула (2.56) для $\operatorname{tg} \varphi_0$.

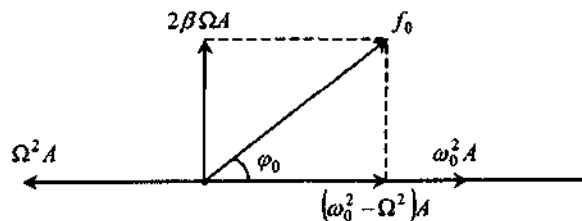


Рис. 2.25, а. Векторна діаграма для визначення амплітуди A і початкової фази φ_0

Таким чином, якщо на тіло, яке коливається, діє зовнішня періодична сила з частотою Ω , то тіло здійснює коливання з тією ж частотою, причому амплітуда коливань залежить від амплітуди і частоти зовнішньої сили, від коефіцієнта затухання, від пружних властивостей системи і маси тіла, яке коливається. Такі коливання називають вимушеними.

2.3.4. Явище резонансу і автоколивання

Явище досягнення максимальної амплітуди вимушених коливань при заданих ω_0 і β називають резонансом. Явище резонансу спостерігається при такій частоті $\Omega_{рез}$ вимушуючої сили, при якій амплітуда вимушених коливань A досягає максимального значення. Відповідно до формули (2.55) дослідження функції $A = f(\Omega)$ на екстремум дає рівняння $\frac{d}{d\Omega} \left((\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\beta\Omega)^2 \right) \Big|_{\Omega=\Omega_{рез}} = 0$, яке дозволяє отримати

значення резонансної частоти:

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Цьому значенню резонансної частоти відповідає значення резонансної максимальної амплітуди

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

За відсутності затухання ($\beta = 0$): $\Omega_{рез} = \omega_0$, а $A_{рез} \rightarrow \infty$.

На рис. 2.25, б подані резонансні криві – залежності амплітуди вимушених коливань від частоти вимушуючої сили при різних коефіцієнтах затухання ($\beta_1 < \beta_2$).

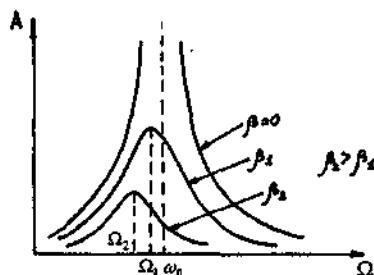


Рис. 2.25, б. Явище резонансу

При вимушених коливаннях подача енергії із зовні (для компенсації втрат на тертя) здійснюється і регулюється зовнішньою періодичною силою, яка нав'язує системі свою

частоту і визначає амплітуду коливань. Однак, можна викликати незатухаючі коливання і постійною силою, якщо сама система буде регулювати подачу енергії із зовні.

Системи, які автоматично регулюють подачу енергії від зовнішнього джерела, називають автоколивальними, а періодичні процеси, які в них відбуваються, – автоколиваннями. Амплітуда і частота автоколивань залежать від властивостей самої системи. Схему автоколивальної системи, яка складається з чотирьох обов'язкових елементів, подано на рис. 2.26.



Рис. 2.26. Автоколивальна система

Прикладами автоколивальних систем є:

1. Годинник (маятник – коливальна система, піднесена гиря або пружина – джерела енергії, анкер-регулятор надходження енергії від джерела в коливальну систему, який зв'язаний з коливальною системою зворотним зв'язком).
2. Генератор електромагнітних коливань.
3. Серце, легені – біологічні автоколивальні системи.

Форма автоколивань може бути різною: це можуть бути коливання, що наближаються до гармонічних (маятниковий годинник, коливання в LC-генераторах), або імпульсні коливання різної форми – прямокутні, експоненціальні, пілкоподібні.

2.3.5. Додавання гармонічних коливань

Коливання, для котрих зміщення як функція часу може бути описано будь-яким законом, окрім синуса чи косинуса, називають складними (негармонічними).

Відомо, що будь-яке складне коливання можна подати у вигляді суми простих гармонічних коливань. Перш ніж аналізувати складні коливання (а таку задачу медикам доводиться розв'язувати досить часто), розглянемо, до яких результатів може призвести додавання гармонічних коливань.

1. Додавання гармонічних коливань, спрямованих вздовж однієї прямої

Нехай тіло бере участь одночасно у двох коливаннях, спрямованих вздовж однієї прямої, причому амплітуди і періоди (частоти) цих коливань однакові, а початкові фази різні

$$x_1 = A \sin(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Результуюче зміщення x тіла від положення рівноваги дорівнює алгебраїчній сумі зміщень x_1 і x_2 :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A(\sin(\omega t + \varphi_1) + \sin(\omega t + \varphi_2)) = \\ &= 2A \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) = A_{\text{рез}} \sin(\omega t + \varphi_0), \end{aligned}$$

$$\text{де } A_{\text{рез}} = \left| 2A \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right|, \quad \varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Таким чином, результуюче коливання являє собою гармонічне коливання, яке відбувається вздовж тієї ж самої прямої, що і складові коливання, і з періодом (частотою), який дорівнює періоду (частоті) складових коливань. Амплітуда результуючого коливання залежить від різниці початкових фаз складових коливань. Якщо $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$, де $k = 0, 1, 2, \dots$, то $\cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \pm 1$ і $A_{\text{рез}} = 2A$ (або $A_{\text{рез}} = A_1 + A_2$, якщо $A_1 \neq A_2$). Якщо

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (2k + 1)\pi, \text{ то } \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 0 \text{ і } A_{\text{рез}} = 0 \text{ (або } A_{\text{рез}} = A_1 - A_2,$$

якщо $A_1 \neq A_2$). Якщо складові коливання відрізняються періодами (частотами), то результуюче коливання вже не буде гармонічним.

Розглянемо, як особливо цікавий, результат додавання двох гармонічних коливань рівних амплітуд і фаз, періоди (частоти) яких відрізняються, тобто

$$x_1 = A \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad x_2 = A \sin(\omega_2 t + \varphi).$$

Результуюче зміщення дорівнює

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi\right) = A(t) \sin(\omega t + \varphi), \text{ де} \\ A(t) &= \left| 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right|, \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \end{aligned}$$

Якщо різниця $\omega_1 - \omega_2$ мала, то амплітуда $A(t)$ змінюється з часом за гармонічним законом, але з частотою $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Такі коливання називають биттям (рис. 2.27).

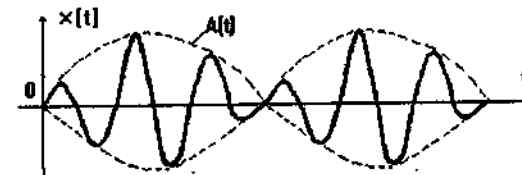


Рис. 2.27. Биття

Період зміни амплітуди коливань називають періодом биття (T_b). Період биття може бути визначений з умови:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} T_b = \pi, \quad T_b = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Отже, частота $\nu_b = \frac{1}{T_b} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \nu_1 - \nu_2$. Таким чином, частота

зміни амплітуди результуючого коливання дорівнює різниці частот складових коливань.

2. Додавання взаємноперпендикулярних гармонічних коливань

Нехай матеріальна точка водночас бере участь у двох коливаннях, що відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках:

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Сукупність координат x і y матеріальної точки у різні моменти часу визначає траєкторію руху матеріальної точки у площині XU . Форма траєкторії залежить від співвідношення частот і різниці фаз складових коливань. Наведемо деякі випадки додавання коливань (рис. 2.28):

$$1) \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0, \omega_1 = \omega_2,$$

рівняння траєкторії $y = (A_2/A_1)x$ (рис. 2.28, 1);

$$2) \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pi, \omega_1 = \omega_2,$$

рівняння траєкторії $y = (-A_2/A_1)x$ (рис. 2.28, 2);

$$3) \Delta\varphi = \pi/2, \omega_1 = \omega_2, \text{ рівняння траєкторії } \frac{y^2}{A_1^2} + \frac{x^2}{A_2^2} = 1 \text{ (рис. 2.28, 3);}$$

2.28, 3);

4, 5) $\omega_1 : \omega_2 = 1:2$, у цьому випадку форма траєкторії залежить від співвідношення частот ω_1 і ω_2 . На рис. 2.28 наведено траєкторії для випадків $\Delta\varphi = 0$ (рис. 2.28, 4) і $\Delta\varphi = \pi/2$ (рис. 2.28, 5).

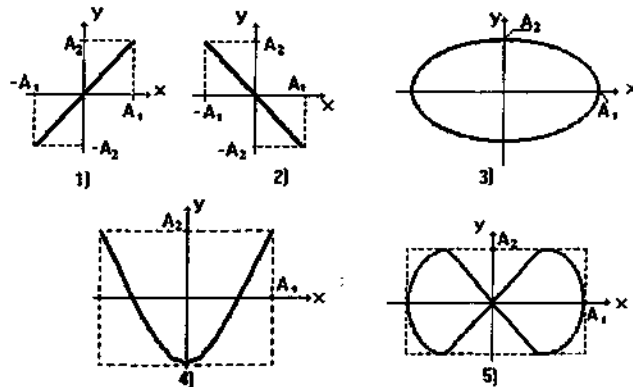


Рис. 2.28. Складання взаємноперпендикулярних коливань (фігури Лісажу)

Отримані криві, що їх описує матеріальна точка, називають фігурами Лісажу. Криві, подібні до фігур Лісажу, спостерігають при дослідженні біопотенціалів серця методом векторелектрокардіографії.

2.4. МЕХАНІЧНІ ХВИЛІ

Якщо тіло, яке коливається, знаходиться у пружному середовищі, то у ділянках середовища, що прилягають до тіла, виникають періодичні деформації, які зумовлюють появу пружних сил. Завдяки взаємодії частинок середовища деформації будуть розповсюджуватись з деякою швидкістю, яка залежить від фізичних властивостей середовища. При цьому частинки середовища здійснюють коливальний рух навколо положення рівноваги, а від одних ділянок середовища до інших передається лише стан деформації.

Процес розповсюдження коливального руху в середовищі називається механічною хвилею. Цей процес можна описати через зміну в часі і просторі положення частинок середовища (зміну величини зміщення $S(x, t)$, тиску $P(x, t)$, або густини $\rho(x, t)$). Залежно від характеру пружних деформацій, що виникають у середовищі, розрізняють поздовжні і поперечні хвилі. У поперечних хвилях частинки середовища здійснюють коливання в напрямку, перпендикулярному до напрямку розповсюдження хвилі. Такі хвилі збуджуються в середовищах, в яких пружні сили виникають при деформаціях зсуву. Як відомо, такими середовищами є, в основному, тверді тіла. У поздовжніх хвилях частинки коливаються вздовж лінії розповсюдження коливань. Ці хвилі збуджуються в середовищах, в яких пружні сили виникають при деформаціях стиснення і розтягування, тобто в газах, рідинах, твердих тілах.

2.4.1. Хвильове рівняння. Поздовжні і поперечні хвилі

Припустимо, що хвильовий процес розповсюджується у додатному напрямку осі OX , а джерело коливань знаходиться в площині, перпендикулярній до напрямку розповсюдження, і коливається за законом $S(t) = A \sin \omega t$ (рис. 2.29).

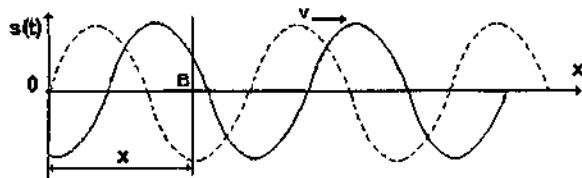


Рис. 2.29. Хвильовий процес

Нехай v – швидкість розповсюдження хвильового процесу у середовищі. Через проміжок часу $\tau = x/v$ хвильовий процес досягне точки B , яка знаходиться на відстані x від джерела коливань, і викличе коливання цієї точки через час τ за законом:

$$S(x, t) = A \sin \omega(t - \tau) = A \sin \omega(t - x/v). \quad (2.57)$$

Рівняння (2.57) – це рівняння плоскої хвилі. Величину $\omega(t - x/v)$ називають фазою хвилі. Геометричне місце точок, які коливаються в однаковій фазі, утворює хвильову або фазову поверхню. Поверхня, до якої дійшла хвиля у деякий момент часу, називається фронтом хвилі. У даному випадку фронт хвилі являє собою площину $x = \text{const}$, тому хвиля зветься плоскою. Форма хвильової поверхні визначається конфігурацією джерела коливань і властивостями середовища. В ізотропному середовищі від точкового джерела розповсюджується сферична хвиля, в якій хвильова поверхня є сфера.

Під швидкістю розповсюдження хвилі розуміють швидкість розповсюдження фіксованої фази коливання. Дійсно, якщо $\omega(t - x/v) = \text{const}$, то після диференціювання цієї рівності отримаємо:

$$\omega(dt - dx/v) = 0,$$

звідки $v = dx/dt$.

Як відомо, довжина хвилі λ дорівнює відстані, яку проходить хвиля за час, що дорівнює періоду коливань:

$$\lambda = v \cdot T.$$

Враховуючи зв'язок між T , v , ω і λ , рівняння (2.57) можна подати у вигляді:

$$S(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin 2\pi \left(\nu t - \frac{x\nu}{v} \right) = A \sin 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right).$$

З рівняння плоскої хвилі випливає, що зміщення $S = f(x, t)$, тобто хвиля має подвійну періодичність (як у просторі, так і у часі).

Рівняння (2.57) є розв'язком диференційного рівняння другого порядку у частинних похідних:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \quad (2.58)$$

Рівняння (2.58) являє собою одновимірне хвильове рівняння плоскої хвилі. Якщо яка-небудь фізична величина описується таким хвильовим рівнянням, то це означає, що вона розповсюджується в просторі у вигляді плоскої хвилі зі швидкістю v .

2.4.2. Потік енергії хвилі. Вектор Умова

Процес розповсюдження хвилі супроводжується переносом енергії коливань. Кількість енергії, що переноситься хвилею через поверхню S за одиницю часу, називають потоком енергії через дану поверхню

$$\Phi = \Delta E / \Delta t, \quad [\Phi] = \text{Дж/с} = \text{Вт}.$$

Нехай за час Δt фронт хвилі змістився на відстань $\Delta l = v \cdot \Delta t$. Отже, за час Δt всі частинки середовища в об'ємі $\Delta V = S \Delta l$ отримали енергію $\Delta E = w S \Delta l$, яка пройшла через площину S за час Δt , де w – об'ємна густина енергії. Тоді потік енергії через площу S дорівнюватиме:

$$\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{w S \Delta l}{\Delta t} = w S v. \quad (2.59)$$

Потік енергії, який переноситься хвилею через одиничну поверхню в напрямку нормалі до цієї поверхні, називається густиною потоку енергії або інтенсивністю хвилі

$$I = \Phi / S = w v.$$

Інтенсивність хвилі I – векторна величина, оскільки швидкість v – вектор, саме тому її називають вектором Умова

$$I = wv. \quad (2.60)$$

Вектор Умова чисельно дорівнює густині потоку енергії і збігається за напрямком з вектором швидкості розповсюдження хвилі.

Подамо вектор Умова у дещо іншому вигляді. Як відомо, повна механічна енергія гармонічних коливань однієї частинки (осцилятора) дорівнює:

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Беручи до уваги рівність $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ і підставляючи вирази (2.44) і (2.45) для $x(t)$ та $v(t)$ в останню рівність, отримаємо

$$W = m \frac{A^2 \omega_0^2}{2}.$$

Об'ємну густину енергії w можна знайти як сумарну енергію коливань всіх n частинок в одиниці об'єму

$$w = nW = \frac{nm}{2} A^2 \omega_0^2 = \frac{\rho}{2} A^2 \omega_0^2, \quad (2.61)$$

де $\rho = nm$ – густина середовища. З урахуванням (2.61) рівність (2.60) набуває вигляду

$$I = wv = \rho \frac{A^2 \omega_0^2}{2} v. \quad (2.62)$$

2.5. АКУСТИКА. ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ СЛУХУ. ОСНОВИ АУДИОМЕТРІЇ

Акустика – наука про звук. Предметом акустики є вивчення фізичної природи звуку, механізмів його генерації, розповсюдження (заломлення, відбиття, поглинання) і практичного використання.

Як відомо, звук являє собою частинний випадок механічних хвиль з частотою в інтервалі від 16 до 20000 Гц. Хвилі з частотою $\nu < 16$ Гц відповідають інфразвуку, з частотою $20 \cdot 10^3 < \nu < 10^9$ Гц – ультразвуку, а з частотою $\nu > 10^9$ Гц – гіперзвуку. Для лікарів вчення про звук має значний інтерес у зв'язку з широкою областю його використання у медичній практиці. Добре відомо, що звукові сигнали можуть бути важливим джерелом інформації про стан внутрішніх органів. Достатньо згадати такі традиційні акустичні методи діагностики, як аускультация та перкусія. Для діагностики серцевої діяльності поряд з електрокардіографією широко використовується фонокардіографія – реєстрація тонів та шумів серця з їх подальшим аналізом. Область застосування ультразвуку в медицині охоплює як методи діагностики, так і методи впливу.

2.5.1. Природа звуку, його основні характеристики (об'єктивні і суб'єктивні)

Як відомо, всі звуки поділяються на тони, або музикальні звуки, шуми та звукові удари. *Тони, або музикальні звуки* обумовлені коливаннями джерела з постійними амплітудою та частотою, або такими, що закономірно змінюються з часом. Розрізняють прості тони, що викликані гармонічними коливаннями джерел, та складні, викликані ангармонічними коливаннями. Прикладом простого тону є звук камертона, а складного – голос людини, звуки музичних інструментів тощо.

Основною характеристикою простого тону є частота. Складний тон може бути розкладений на прості тони. Простий тон, що входить до складного і має найменшу частоту ν_0 , зветься основним тоном. Прості тони, що входять до складного і мають

частоти, кратні частоті основного тону ($\nu = n\nu_0$, де $n = 2, 3, \dots$), називають обертонами. Таким чином, складний тон має лінійчастий акустичний спектр (рис. 2.30, а).

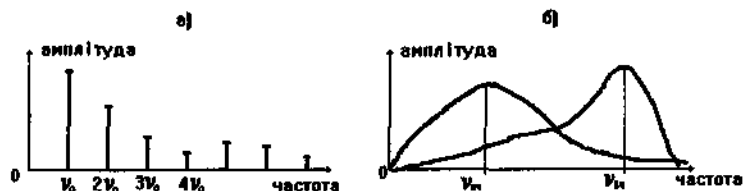


Рис. 2.30. Види звукових спектрів

Шум являє собою складний аперіодичний звук, що має неперервний спектр. Шуми можуть відрізнятися між собою спектрами. Наприклад, низько- та височастотні шуми мають різні амплітуди у відповідних областях спектра (рис. 2.30, б).

Звуковий удар – це короткочастотний звук, що має неперервний спектр, наприклад, вибух.

Основними характеристиками звуку як механічної хвилі є: інтенсивність або сила звуку I , частота та частотний спектр. Ці характеристики є об'єктивними характеристиками звуку, бо вони можуть бути виміряні відповідними приладами незалежно від людини.

Інтенсивність звуку – густина потоку енергії, що її приносить звукова хвиля, тобто

$$I = \frac{\Delta E}{S \Delta t}, [I] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \text{с}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}. \quad (2.63)$$

Інтенсивність звуку називають також силою звуку, тому що інтенсивність визначає надлишковий звуковий тиск ΔP (а, отже, і силу звукового тиску), що виникає у ділянках згущення частинок при розповсюдженні звукової хвилі:

$$\Delta P = \sqrt{2I\rho v}, \quad (2.64)$$

де ρ – так званий акустичний опір середовища (ρ – густина середовища, v – швидкість звуку).

Людське вухо здатне сприймати досить широкий діапазон інтенсивностей звукової хвилі. На частоті $\nu = 1 \text{ кГц}$ найменша

інтенсивність, що сприймається, в середньому становить $I_{\min} = I_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ (поріг чутності), а найбільша $I_{\max} = 10 \text{ Вт/м}^2$ (поріг болювого відчуття). Таким чином, значення порогових інтенсивностей відрізняються в 10^{13} разів. Для порівняння інтенсивностей звуку зручно користуватися логарифмічною шкалою, тобто порівнювати не інтенсивності звуку, а їхні логарифми. Ця шкала зветься шкалою рівнів інтенсивності звуку. За нульовий рівень інтенсивності приймають рівень інтенсивності звуку, що відповідає порогу чутності I_0 . Тоді рівень L інтенсивності звуку визначається за формулою

$$L = \lg \frac{I}{I_0}, \quad (2.65)$$

де I – інтенсивність звуку, I_0 – інтенсивність звуку на порозі чутності. Одиниця шкали рівнів інтенсивності – 1 Бел (Б), який відповідає зміні інтенсивності звуку в 10 разів. Дійсно, нехай $L =$

$1 \text{ Б} = \lg \frac{I}{I_0}$, звідки $\frac{I}{I_0} = 10$ або $I = 10I_0$. Таким чином, перехід

від рівнів інтенсивності до шкали інтенсивності здійснюють через значення інтенсивності, що відповідає нульовому рівню, тобто через $I_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$. Наприклад, шум в аудиторії може мати рівень інтенсивності $L = 6 \text{ Б}$. Визначимо інтенсивність цього шуму.

$$L = \lg \frac{I}{I_0} = 6 \text{ Б}.$$

$$\text{Звідки } \frac{I}{I_0} = 10^6 \text{ або } I = I_0 \cdot 10^6 = 10^{-6} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Інакше кажучи, шум в 6 Б перевищує порогове значення інтенсивності звуку у мільйон разів. Співвідношення між шкалами інтенсивності і рівнів інтенсивності наочно подано на рис. 2.31. Поряд з Белом використовують одиницю шкали рівнів інтенсивності 1 децибел (дБ): $1 \text{ дБ} = 10^{-1} \text{ Б}$. Децибел відповідає зміні інтенсивності звуку в $\sqrt[10]{10} \approx 1,26$ разів.

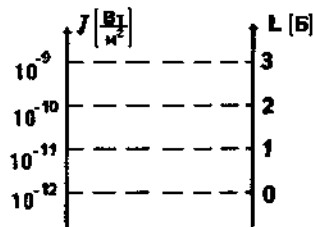


Рис. 2.31. Співвідношення між шкалами інтенсивності I і рівнів інтенсивності L

Звук є об'єктом сприйняття і причиною виникнення слухового відчуття у людини, внаслідок чого оцінка його характеристик відбувається цілком суб'єктивно. Шляхом тривалої еволюції сформувався орган слуху, надзвичайно чутливий до звукових коливань.

Зовнішнє вухо забезпечує спрямованість слухового сприйняття і локалізацію джерела звуку. Окрім того, будова вушної раковини та слухового проходу забезпечує резонансне сприйняття в досить широкому діапазоні частот, максимум якого припадає на частоту 2–3 кГц. Дійсно, зовнішнє вухо складається з вушної раковини і зовнішнього слухового проходу, що має довжину $l \approx 2,7$ см і закрите барабанною перетинкою. Відомо, що акустичний резонанс має місце, якщо довжина резонатора дорівнює чверті довжини хвилі, тобто $l = \lambda/4$. Це дозволяє оцінити резонансну частоту, оскільки $\lambda = v/\nu$. Звідси $\nu_{рез} = v/\lambda_{рез} = v/4l$, що з урахуванням значення швидкості звуку у повітрі $v = 330$ м/с і величини $l = 0,027$ м дає значення $\nu_{рез} \approx 3$ кГц.

Барабанна перетинка і середнє вухо виконують роль зв'язку між атмосферою та внутрішнім вухом, заповненим рідиною (перилімфою). Середнє вухо забезпечує узгодження акустичних опорів повітря і рідини, внаслідок чого суттєво зменшуються втрати інтенсивності звукової хвилі при її переході з повітря в рідке середовище внутрішнього вуха. Крім того, цей механізм відіграє роль підсилювача тиску, забезпечуючи приблизно 90-кратний вигреш у силі для збудження бігучої акустичної хвилі в рідині та базилярній мембрані внутрішнього вуха. При занадто великій інтенсивності на рівні больового відчуття цей механізм

частково блокується за рахунок рефлекторного зменшення рухливості системи слухових кісточок.

Цікавим є питання про величини зміщень барабанної перетинки під дією звукової хвилі. Середня швидкість зміщення перетинки v_n пов'язана зі зміною звукового тиску P (2.64), швидкістю розповсюдження хвилі v_{zh} і густиною повітря ρ за допомогою співвідношення

$$v_n = P/\rho v_{zh}. \quad (2.66)$$

Щодо величини зміщення барабанної перетинки l_n , то її величина зв'язана з швидкістю v_n і частотою ν звукової хвилі формулою $l_n = v_n/2\pi\nu$, оскільки $v_n = \omega l_n$.

Чисельні оцінки величин v_n і l_n показують, що на порозі чутності при $\nu = 1$ кГц, де інтенсивність $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м², швидкість руху і зміщення барабанної перетинки є дуже малими: $v_n \approx 5 \cdot 10^{-8}$ м/с, $l_n \approx 10^{-11}$ м. На больовому порозі, де $I = 10^{13} I_0$, величини v_n і l_n стають набагато більшими: $v_n \approx 0,15$ м/с, $l_n \approx 2 \cdot 10^{-5}$ м. Такі досить великі зміщення l_n стають причиною появи болю в м'язах, що утримують барабанну перетинку. При зростанні інтенсивності ще на 3 порядки, тобто при інтенсивності $I = 10^{16}$, $I_0 = 10^4$ Вт/м² або при рівні інтенсивності $L = 160$ дБ, швидкість коливань перетинки досягає $v_n \approx 5$ м/с, а максимальна величина зміщення барабанної перетинки стає порядку 1 мм, що не дозволяє м'язам утримати її неушкодженою. Це приводить до її руйнування під дією дуже великої енергії звукової хвилі, що припадає на одиницю площі барабанної перетинки.

Таким чином, систему передачі звуку, яка зосереджена в зовнішньому та середньому вусі, можна вважати механічним перетворювачем (підсилювачем), що володіє змінним, здатним регулюватися коефіцієнтом передачі тиску з барабанної перетинки на рідину внутрішнього вуха. При руйнуванні слухових кісточок слух не втрачається повністю, але слабшає у 10^3 – 10^4 разів або на 30–40 дБ.

Внутрішнє вухо має достатньо складну будову. Функції цього органу різні, одна з них – формування нервових імпульсів у волокнах слухового нерва у відповідь на подразнення слухових

рецепторів. Подразнення рецепторів відбувається у місцях максимального зміщення базилярної мембрани при виникненні у ній бігучої хвилі. Базилярну мембрану можна розглядати як нелінійну коливальну систему, що функціонує подібно до системи механічних мікрорезонаторів, в якій локальне розташування максимального зміщення залежить від частоти коливань. Це локальне подразнення спричиняє виникнення серії електричних імпульсів у певному нервовому волокні, що входить до складу слухового нерва. Отже, в цілому, по слуховому нерву в мозок передається серія імпульсів, що несуть інформацію про амплітуду та частоту коливань або інформацію щодо спектрального складу звуку, яка піддається аналізу в слухових центрах кори головного мозку, де остаточно і формується суб'єктивне відчуття звуку.

У фізіологічній акустиці розглядають такі суб'єктивні (психофізичні) характеристики слухового відчуття звуку: гучність, висота тону і тембр.

Основою суб'єктивного відчуття гучності звуку є здатність людини розрізняти звуки за їх інтенсивністю. Чим більша інтенсивність звуку, тим вище він за рівнем слухового відчуття, тобто тим більша його гучність. Таким чином, гучність звуку можна визначити як рівень слухового відчуття над його порогом. Залежність між інтенсивністю звуку I і рівнем його слухового відчуття (гучністю E) має складний характер, вона відтворює адаптаційні властивості вуха до зміни інтенсивності у досить широкому діапазоні. Дійсно, на порозі чутності відчуваються зміщення барабанної перетинки, що на порядок менші лінійних розмірів молекул, у той час, як на рівні больового порогу ці коливання збільшуються на багато порядків. І для кожного з цих крайніх випадків орган слуху повинен забезпечити нормальне виділення інформації, що передається зниженням чутливості органів слуху при збільшенні інтенсивності звуку. Ця закономірність знайшла відображення у психофізичному законі Вебера–Фехнера.

2.5.2. Закон Вебера–Фехнера

Експериментальні дослідження свідчать про те, що відчуття зміни гучності звуку dE прямо пропорційне до зміни інтенсивності звуку dI . Це відчуття буде тим меншим, чим більша початкова інтенсивність звуку, тобто, інакше кажучи, зміна гучності прямо пропорційна до відносної зміни сили звуку

$$dE = k(\nu) \frac{dI}{I}, \quad (2.67)$$

де $k(\nu)$ – коефіцієнт пропорційності, який залежить від частоти. Інтегруючи рівняння в діапазоні зміни інтенсивності від порогової I_0 , для якої гучність $E = 0$, до деякого значення інтенсивності I , отримаємо закон Вебера–Фехнера, що зв'язує гучність звуку з його інтенсивністю:

$$\int_0^E dE = k(\nu) \int_{I_0}^I \frac{dI}{I}, \quad E = k(\nu) \ln \frac{I}{I_0},$$

або, переходячи до десяткових логарифмів,

$$E = k_1(\nu) \lg \frac{I}{I_0}, \quad (2.68)$$

де $k_1(\nu) = 2,3k(\nu)$.

Таким чином, закон Вебера–Фехнера можна сформулювати так: відчуття подразнення E прямо пропорційне логарифму сили самого подразнення I . Іншими словами, якщо сила подразнення I зростає в геометричній прогресії, тобто в 100, 1000, ... разів, то відчуття цього подразнення E зростає в арифметичній прогресії, тобто в 2, 3, ... рази.

На рис. 2.32 наведено графік залежності відчуття гучності звуку (психічна реакція) від зміни рівня фізичного подразнення (інтенсивності звуку). Пунктиром показано зміни чутливості вуха ($S = dE/dI \sim 1/I$) при зміні інтенсивності звуку від порогового рівня до больового. Зауважимо, що подібний логарифмічний закон зв'язку між реакцією і величиною фізичного подразнення справедливий і для інших сенсорних

систем (наприклад, органів зору, нюху, смакових, больових рецепторів тощо).

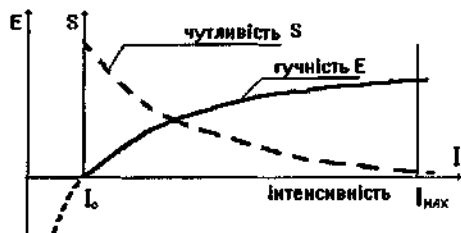


Рис. 2.32. Логарифмічний закон слухового сприйняття і зміни чутливості вуха

Якби в законі Вебера–Фехнера (2.67) $k(\nu)$ дорівнювало б одиниці, то шкала рівнів інтенсивності та шкала гучності збігалися б, і гучність можна було б виражати в *Белах* і *децибелах* так само, як і рівень інтенсивності. Однак це не так. Вирішили, між тим, вважати, що $k = 1$ на частоті $\nu = 1 \text{ кГц}$ і саме на цій частоті шкали рівнів інтенсивності та гучності збігаються. Одиниці шкали гучності також називають *белом* та *децибелом*. Щоб відрізнити ці шкали, *децибел* у шкалі гучності називають *фоном*. *Бел* гучності відповідає зміні гучності тону з частотою $\nu = 1 \text{ кГц}$ при зміні його інтенсивності у 10 разів.

Сприймаючи тони, людина здатна розрізнити їх за суб'єктивною характеристикою – висотою, що спричинене здатністю людського вуха розрізнити тони за частотою: чим більша частота тону, тим вище звук. Однак експериментальні дослідження свідчать про те, що одна і та ж сама гармоніка при різних інтенсивностях викликає у людини неоднакове відчуття висоти: при однаковій частоті сильніший звук сприймається більш низьким. Так, найбільш низький чоловічий голос – бас-профундо, а найвищий – контртенор, а у жінок, відповідно, контральто і колоратурне сопрано.

Весь діапазон частот тонів, що сприймаються вухом, можна поділити на октави, для яких відношення частот крайніх гармонік дорівнює 2. Весь діапазон вміщує 10 октав. Інтервал в октаву є основою для побудови “шкали висот” музикальних звуків. Існує одиниця висоти тону – 1 *мел*. За 1000 *мел*

приймають висоту тону звуку частотою 1000 *Гц* і інтенсивністю 60 *дБ*.

Суб'єктивною оцінкою “якості” звуку є тембр. Основою розрізнення звуків за тембром є здатність органів слуху розрізнити об'єктивну характеристику – спектральний склад звуків. Людина здатна відчути різницю у звучанні однієї й тієї ж ноти певної частоти при відтворенні її різними інструментами, наприклад, скрипкою, гобоєм або голосом людини. Ці звуки мають у своєму спектрі однаковий основний тон, але відрізняються кількістю й амплітудою обертонів, що надає цим звукам своєрідне “забарвлення”, яке розрізняється органами слуху.

Відомо, що існують приємні для слуху звуки і, навпаки, звуки, які викликають неприємні фізіологічні відчуття. Ще Піфагор встановив, що одночасне звучання двох струн приємніше для слуху, якщо довжини цих струн відносяться як невеликі цілі числа. В чому полягає фізична суть гармонічного звучання і, навпаки, явище дисонансу звуків? Відповідь слід шукати у частотах гармонік, що складають спектр звуків. Існує таке правило: ноти звучать гармонічно (в унісон), якщо вони мають гармоніки однакової частоти. Ноти дисонують, якщо їх вищі гармоніки мають близькі частоти, але різниця цих частот надто велика для виникнення швидкого биття. Експеримент свідчить про те, що ноти, які звучать в унісон або як акорди, викликають приємні відчуття, а при наявності биття – звуки неприємні.

Запровадження шкали для оцінки суб'єктивного відчуття гучності звуку дозволяє вимірювати гучність звуку будь-якої частоти й інтенсивності, порівнюючи його зі звуком з частотою 1000 *Гц*. Легше за все отримати криву нульового рівня гучності – аудіограму, яка є множиною значень інтенсивності звуку на порозі чутності для тонів різних частот у всьому діапазоні слухового сприйняття. Аудіограму подано нижньою кривою на рис. 2.33.

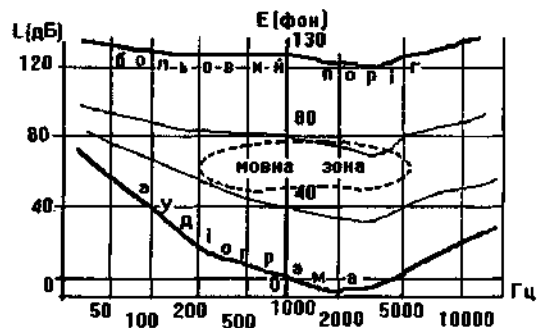


Рис. 2.33. Аудиограма і криві рівної гучності

Відповідність між інтенсивністю і гучністю на інших частотах встановлюється за кривими рівної гучності (на рис. 2.33 наведено криві рівної гучності для 40, 80 та 130 фон). Їх отримують засобом суб'єктивного порівняння гучності досліджуваного звуку і звуку на частоті 1000 Гц з відомою гучністю. Наведені криві ще раз свідчать про те, що вухо людини найбільш чутливе до частот 2500–3000 Гц. При цих частотах порогова інтенсивність нижча, ніж її значення на частоті 1000 Гц, яке дорівнює 10^{-12} Вт/м^2 . Верхня крива відповідає порогу больового відчуття. Пунктиром обведено область мовної зони людини.

Методи виміру гостроти слуху звуться аудіометрією. Методи клінічної аудіометрії дозволяють визначити послаблення слуху порівняно з нормою. З цією метою визначають поріг чутності для різних тонів на спеціальному приладі – аудіометрі, що являє собою генератор звуку з незалежним регулюванням частоти та інтенсивності. Побудована аудіограма наочно свідчить про спектральну чутливість вуха людини на порозі чутності. Порівняння аудіограми хворої людини з нормальною дозволяє діагностувати захворювання органів слуху.

2.5.3. Ультразвук

Ультразвукові коливання і хвилі – це такі пружні коливання і хвилі, які мають частоту в межах від 20 кГц до 10^9 Гц. Оскільки енергія пружних коливань і хвиль пропорційна добутку квадрата амплітуди і квадрата частоти відповідно до формули (2.61), то ультразвукові коливання і хвилі мають значно більшу енергію, ніж звукові коливання при одній і тій самій амплітуді. Так, наприклад, якщо частота коливань змінюється в тисячу разів, скажімо від 1 кГц (звукові коливання) до 10^3 кГц (ультразвукові коливання), то при цьому енергія коливань збільшується в мільйон разів.

З метою генерації та прийому ультразвукових коливань використовують найчастіше два методи: механічний, в якому джерелом ультразвуку є енергія потоку газу чи рідини, та електромагнітний, в якому для отримання ультразвуку використовують енергію електричних коливань відповідної ультразвукової частоти. Недолік першого методу – широкий спектр частот і нестабільність амплітуди. Другий метод дає більш вузьку смугу частот, що дозволяє використовувати такі ультразвукові генератори і приймачі з метою контролю і вимірювання, в тому числі і медико-біологічних показників.

Застосування ультразвуку в різних галузях, включаючи медицину, пов'язані з тією їх важливою властивістю, що будь-які зміни в середовищі, через яке проходить ультразвукова хвиля, приводять до зміни швидкості розповсюдження і поглинання цієї хвилі, відбиття хвилі від границі розділу, акустичної кавітації – появи мікропорожнин в матеріальному середовищі (наприклад, в рідині) під дією коливань тиску. Так, при інтенсивності ультразвукової хвилі $I = 10^5 \text{ Вт/м}^2$ і частоті $\nu = 5 \cdot 10^6$ Гц на відстані половини довжини хвилі $\lambda/2 = 0,03 \text{ мм}$ утворюється дуже великий перепад тиску, що дорівнює $6,3 \cdot 10^7 \text{ Па/см}$, тобто цей перепад в 630 разів перевищує нормальний атмосферний тиск. Кавітаційний та інші механізми дії ультразвуку можуть викликати механічні ефекти (розрив і загибель бактерій тощо), хімічні ефекти (збудження й іонізацію атомів та молекул з утворенням радикалів), які можуть бути як

позитивними при відносно малих інтенсивностях, так і негативними при великих інтенсивностях ультразвукової хвилі.

Зупинимося більш детально на застосуваннях ультразвуку в медицині:

1. Зміна швидкості і поглинання ультразвуку в різних органах і тканинах, а також відбиття ультразвукової хвилі на границях різних середовищ в організмі людини лежать в основі відомого методу ультразвукового дослідження (УЗД). Створені спеціальні комп'ютеризовані пристрої, які за певною програмою дозволяють візуалізувати зображення на екрані монітора. Сучасними прикладами УЗД в медицині є ультразвукова ехоенцефалографія – діагностування пухлин та запалень головного мозку, ультразвукова кардіографія – дослідження динаміки серцевої діяльності за допомогою ультразвуку, ультразвукова голографія – отримання тривимірних зображень біооб'єктів з використанням інтерференції ультразвукових променів тощо.

2. Дія ультразвукової хвилі з малою інтенсивністю на рівні 1 Вт/м^2 використовується як позитивний терапевтичний вплив, в основі якого лежить прискорення фізіологічних процесів у клітинах.

3. При збільшенні інтенсивності ультразвуку на декілька порядків (до 10^6 Вт/м^2 і вище) внутрішні рухи окремих цитоплазматичних частин клітин підсилюються, виникає ефект кавітації і, як наслідок, необоротні зміни структури і функцій клітин. Подібний механізм лежить в основі бактерицидної дії ультразвуку.

4. Ультразвуки великої інтенсивності використовуються також з метою руйнування різного роду новоутворень (пухлин тощо). Подібний механізм дії ультразвуку застосовується також в стоматології (зняття зубних каменів, висвердлювання зубних каналів тощо). Процес руйнування біологічних тканин при інтенсивностях вище 10^6 Вт/м^2 використовується в ультразвуковій хірургії та при ультразвуковому остеосинтезі – зварюванні тканин та кісток за рахунок значного підвищення в них швидкості процесів дифузії.

5. У фармацевтичній промисловості кавітаційні процеси, що виникають під дією ультразвукової хвилі великої інтенсивності, використовуються для диспергування твердих і рідких матеріалів з метою отримання лікарняних порошків і емульсій тощо.

6. Механічні та теплові ефекти, що виникають при дії ультразвуку на різні біологічні тканини, лежать в основі методу ультразвукової фізіотерапії.

2.5.4. Інфразвук

Інфразвукові коливання і хвилі – це пружні коливання з частотами до 16 Гц . Інфразвук дуже слабо поглинається в газах, рідинах та твердих тілах і тому може розповсюджуватися майже без втрат на великі відстані. Ця надзвичайно важлива властивість інфразвуку використовується у техніці – у звукометричних приладах (мікрофони, гідрофони тощо) для реєстрації різноманітних процесів, що відбуваються з інфразвуковими частотами. До таких процесів належать землетруси, вибухи, виробничі шуми і вібрації, грозові розряди, турбулентні явища в атмосфері, хвилі цунамі тощо.

Зрозуміло, що властивість інфразвукових хвиль розповсюджуватися на дуже далекі відстані повинна бути використаною в процесі біологічної еволюції як засіб передачі та прийому інформації між живими істотами. І хоча це питання ще недостатньо вивчене, слід зазначити, що такі тварини, як летючі миші, дельфіни, кити і деякі інші мають (окрім ультразвукової локації в діапазоні декількох десятків кГц) ще й органи інфразвукової локації.

Для людини інфразвукові коливання великої амплітуди можуть бути дуже шкідливими, оскільки деякі процеси в організмі людини відбуваються в інтервалі інфразвукових частот. Наприклад, α -ритми головного мозку мають частотний інтервал $9\text{--}13 \text{ Гц}$ і тому дія інфразвукових хвиль може викликати шкідливі резонансні явища в мозку людини. Високоінтенсивні виробничі шуми і вібрації, що мають складний неперіодичний характер в різних частотних інтервалах, включаючи інфразвуковий, також є шкідливими для людини. Рівень інтенсивності

цих звуків вимірюється за допомогою спеціальних приладів – шумомірів. Встановлено, що гранично дозволений рівень інтенсивності низькочастотних шумів та вібрацій дорівнює $L = 100$ дБ, тоді як їх нормальним рівнем вважається значення $L < 50$ дБ.

2.6. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

2.6.1. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

“Дослідження пружних властивостей біологічних тканин”

Мета роботи: а) одержати діаграми розтягу (для волосини) і стиснення (для кістки чи дерев'яного зразка) та визначити основні показники пружних властивостей тканин (модуль Юнга, межу міцності, залишкову деформацію); б) дослідити в'язко-пружні властивості біологічних тканин (текучість матеріалу).

Контрольні питання для підготовки до лабораторної роботи

1. Поняття про деформацію. Види деформацій. Закон Гука. Модуль Юнга. Коефіцієнт Пуассона.
2. Діаграма розтягу (стиснення), її основні зони і характеристичні точки.
3. Пружні властивості деяких біологічних тканин (колагену, еластину, кістки, стінки кровонесних судин).
4. В'язко-пружні властивості біологічних тканин. Реологічні моделі. Повзучість (текучість) матеріалу. Релаксація напруження.

Додаткова література

1. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996. – Гл. 10. – С. 173–183.
2. Владимиров Ю.А. и др. Биофизика. – М.: Медицина, 1988. – Гл. 10.
3. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1987. – Гл. 10. – С. 192–200.
4. Эссаулова И.А. и др. Руководство к лабораторным работам по медицинской и биологической физике. – М.: Высшая школа, 1987. – С. 111–115.

Додаткові теоретичні відомості

Діаграма деформації являє собою графічне зображення експериментальної залежності напруження в зразку від його відносної деформації. Як відомо, величина напруження σ характеризує силу F , що діє на одиницю площі поперечного перерізу зразка ($\sigma = F/S$), а деформація розтягу або стиснення оцінюється по абсолютній ($\Delta l = l - l_0$) або відносній ($\varepsilon = \Delta l/l_0$) зміні довжини зразка. Для незначної лінійної деформації ($\Delta l/l_0 \ll 1$) виконується закон Гука: напруження, яке виникло в зразку, прямо пропорційне відносній зміні його довжини ($\sigma = E \cdot \varepsilon$). Величина E в цьому виразі називається модулем Юнга. Він є однією з найважливіших характеристик пружних властивостей матеріалу і залежить від його природи.

Діаграми деформації біологічних тканин суттєво відрізняються від подібних діаграм для металевих зразків. Існують два типи діаграм, які схематично приведені на рис. 2.34. Для ряду зразків (колаген, волосина, кістка, шкіра) при збільшенні деформацій їх жорсткість зменшується (див. рис. 2.34, а). Межа пружних деформацій порядку 5%, після чого матеріал починає “текти” без помітного збільшення напруження в зразку.

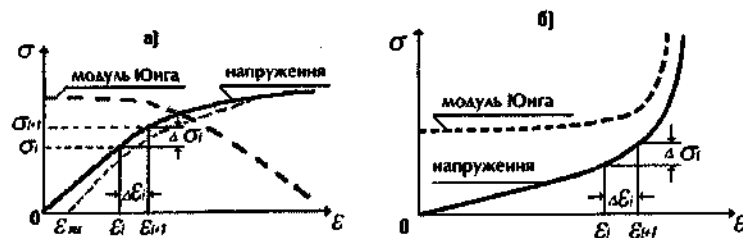


Рис. 2.34. Діаграми деформації

Для інших зразків їх жорсткість при розтязі різко збільшується (еластин, м'яз, стінка судини, рис. 2.34, б), такий характер спостерігається аж до руйнування зразка. Руйнування зразка може відбутися при видовженні зразка більше ніж в два рази (для еластину) або на 15–20% (для судини). Зона текучості на таких діаграмах проявляється слабо. Діаграми деформацій, отримані в діапазоні фізіологічних змін довжин, як правило,

нелінійні. В цьому випадку модуль Юнга E , як характеристика пружних властивостей, може використовуватися тільки в діапазоні дуже малих деформацій, для яких можна вважати справедливим закон Гука ($\sigma = E \cdot \epsilon$). В фізіологічному діапазоні зміни довжин, як правило, користуються *приведеним модулем Юнга* (E_{np}), який є усередненою характеристикою пружних властивостей зразка:

$$E_{np} = \frac{\sum E_i}{n},$$

де E_i – ефективний або тангенціальний модуль Юнга, який визначається за формулою

$$E_i = \Delta\sigma_i / \Delta\epsilon_i = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) / (\epsilon_{i+1} - \epsilon_i). \quad (2.69)$$

У цій формулі $\Delta\sigma_i$ и $\Delta\epsilon_i$ є відповідно зміни напруження та деформації в довільно вибраній точці на діаграмі розтягу або стиснення зразка (див. рис. 2.34).

Із формули (2.69) випливає, що модуль Юнга в певній точці діаграми є похідною $d\sigma/d\epsilon$ та чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної, проведеної в цій точці. Закономірності зміни модуля Юнга для діаграм деформацій, які тут розглядаються, приведені пунктиром на рис. 2.34.

Залишкові деформації ($\epsilon_{зал}$) визначаються за розміром зразка після побудови діаграми деформації і зняття навантаження до нуля (див. тонку пунктирну лінію на рис. 2.34, а).

Межа міцності (σ_{max}) визначається величиною максимального напруження, при якому відбувається руйнування матеріалу.

Порядок виконання лабораторної роботи

Завдання 1. Зняття діаграми розтягу волосини.

1. Ознайомтесь з макетом для розтягу волосини (рис. 2.35). Волосину 2 закріплюють між двома зажимами (нерухомим – 1 і рухомим – 3). За шкалою 6 знімають початковий l_0 і поточні розміри l волосини при її деформації. За рухомою шкалою 7 визначають величину зовнішньої сили F , яка розтягує волосину і

яку можна змінювати, розтягуючи пружину 4 переміщенням штока 5. Шкала 7 проградуїрована в *Ньютонах*.

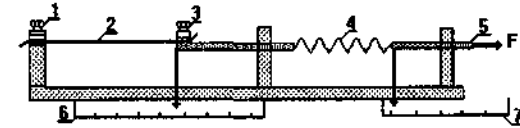


Рис. 2.35

2. Підготуйте таблицю 1.

3. Мікрометром виміряйте діаметр волосини. Краще ці виміри провести за допомогою мікроскопа.

4. Закріпіть волосину зажимами і запишіть початкову довжину волосини (l_0).

5. Переміщуючи шток 5, збільшуйте прикладену силу F . Для кожного значення сили вимірюйте довжину волосини по шкалі 6 і дані заносьте в таблицю.

Примітка. Якщо при деякій силі F_{na} неможливо виміряти величину l (матеріал “тече”), то необхідно зменшити силу натягу до нуля, інакше волосина розірветься. Запам’ятайте величину сили F_{na} .

6. Після зняття навантаження визначте залишкову деформацію $\epsilon_{зал}$ за положенням показника на шкалі 6.

7. Проведіть обчислення за наступними формулами:

$$\sigma = F_i / S; \quad S = \frac{\pi d_0^2}{4}; \quad \epsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l_0},$$

отримані результати занесіть до таблиці.

8. Побудуйте діаграму розтягу волосини $\sigma = f(\epsilon)$.

9. Розрахуйте значення ефективного модуля Юнга за формулою

$$E_i = \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta \epsilon_i} = \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\epsilon_{i+1} - \epsilon_i}.$$

10. Знайдіть приведений модуль Юнга $E_{np} = \frac{\sum E_i}{n}$.

Таблиця 1. Результати зняття діаграми розтягу волосини

	F [Н]	l [мм]	Δl [мм]	ε	σ [Н/м ²]	E [Н/м ²]
1						
2						
3						
4						
5						

Завдання 2. Зняття діаграми стиснення зразка (кістки, дерева тощо).

1. Ознайомтесь з установкою для стиснення зразка. Зразок розміщується між двома опорами і важельною системою, стискується за допомогою вантажів, які підвішуються до кінця важеля. Розміри деформації вимірюються мікрометром за допомогою електричних контактів.

2. Підготуйте таблицю 2.

3. Запишіть значення початкової довжини l_0 , зовнішнього d_0 та внутрішнього d_1 діаметрів зразка.

4. Підготуйте установку для роботи (закріпіть зразок, перевірте електричний контакт ланцюга).

5. Збільшуючи навантаження на зразок, визначте за допомогою мікрометра відповідні значення Δl його довжини. Дані занесіть в таблицю (попереднє навантаження в 1 кг використовується для усунення зазорів і люфтів в установці).

Таблиця 2. Результати зняття діаграми стиснення зразка

	m [кг]	F [Н]	Δl [мм]	ε	σ [Н/м ²]	E [Н/м ²]
1						
2						
3						
4						
5						

6. Обробка результатів вимірювання.

Обчислення проводяться за наступними формулами:

$$F_i = k \cdot m_i g \text{ [Н]},$$

(k – співвідношення плечей важеля, його значення k приведено на макеті),

$$\sigma_i = F_i/S \text{ [Н/м}^2\text{]}, \quad \varepsilon_i = \Delta l_i/l_0,$$

$$S = \pi(d_0^2 - d_1^2) \cdot 10^{-6}/4 \text{ [м}^2\text{]}.$$

Отримані результати занесіть в таблицю протоколу.

7. Побудуйте за даними таблиці 2 діаграму деформації зразка.

8. Розрахуйте значення ефективного модуля Юнга за формулою

$$E_i = \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta \varepsilon_i} = \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}.$$

9. Знайдіть приведений модуль Юнга $E_{пр} = \frac{\sum E_i}{n}$

Оформити протокол роботи. Протокол повинен містити:

- стислу теоретичну частину (основна інформація щодо елементів біореології, формули для розрахунків);
- завдання 1 та 2 з таблицями та розрахунками;
- графіки та висновки.

Завдання для самостійної роботи та самоконтролю

1. Визначити коефіцієнт Пуассона для м'язового волокна циліндричної форми завдовжки l_0 , діаметром d_0 , вважаючи його практично нестисливим.

(Вказівка: знайти та порівняти об'єми м'яза до і після деформації при зміні розмірів $d = d_0 - \Delta d$, $l = l_0 + \Delta l$).

2. Дати якісне пояснення наведених нижче діаграм деформацій різних зразків:

а) чим відрізняються пружні властивості цих зразків?

б) чи змінюється модуль Юнга?

в) як знайти ефективні значення модуля Юнга?

г) намалювати графіки зміни ефективного модуля Юнга.



3. Яке навантаження витримає гомілквова кістка (в кг), якщо $\sigma_{\max} = 2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$? Кістку вважати полою трубкою, для якої внутрішній і зовнішній діаметри відповідно 2 та 3 см.
4. Визначити сталу релаксації напруження волосини, якщо за 1,5 хвилини напруження зменшилось на 50%.
5. Через який час напруження в м'язі зменшиться вдвічі, якщо стала релаксації порядку однієї хвилини?
6. Поясніть фізичний зміст модуля Юнга.
7. У чому полягає доцільність збільшення жорсткості (регідності) стінки кровоносних судин при їх розширенні? Чому ця властивість буде відсутня для інших біологічних структур (кістки, волосини, шкіри тощо)?

2.6.2. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2 “Визначення коефіцієнта в'язкості”

Мета роботи: ознайомитися з методами визначення коефіцієнта в'язкості. Визначити коефіцієнт в'язкості розчину гліцерину.

Контрольні питання для підготовки до лабораторної роботи

1. Стационарний плин рідини. Лінії та трубки струму. Рівняння неперервності струменя. Лінійна та об'ємна швидкості рідин.
2. Енергія потоку рідини. Рівняння Бернуллі. Розподіл тиску рідини при плинні по трубах змінного та постійного перерізу.
3. Основні рівняння динаміки рідини. Ламінарний та турбулентний плин рідини. Плин в'язкої рідини по циліндричній трубці. Рівняння Пуазейля, Гагена–Пуазейля. Гідралічний опір.
4. Внутрішнє тертя в реальній рідині. Формула Ньютона для сил внутрішнього тертя. Коефіцієнт в'язкості рідини (абсолютне та відносне значення).
5. Ідеальна та реальна рідини. Ньютонівська та неньютонівська рідини. В'язкість крові та її залежність від умов плинну по судинах.
6. Способи визначення в'язкості рідини (капілярний віскозиметр, метод Стокса).

Додаткова література

1. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996. – Гл. 9. – С. 148–158.
2. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1987. – Гл. 9. – С. 169–180.

3. Ремизов А.Н. Курс физики, электроники, кибернетики для медицинских институтов. – М.: Высшая школа, 1982. – Гл. 8. – С. 91–103.
4. Ливенцев Н.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1974. – С. 56–64.
5. Ливенцев Н.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1978. – Ч. 1. – С. 26–32.
6. Эссаулова И.А. и др. Руководство к лабораторным занятиям по медицинской и биологической физике. – М.: Высшая школа, 1987. – С. 94–102.
7. Агапов Б.Т. и др. Лабораторный практикум по физике. – М.: Высшая школа, 1982. – С. 121–126.

Додаткові теоретичні відомості

Сукупність методів, які використовуються для вимірювання коефіцієнта в'язкості, називають *віскозиметрією*, а прилади, які застосовуються для цієї мети, *віскозиметрами*. Коефіцієнти в'язкості, значення яких лежать у межах 10^{-5} – $10^4 \text{ Па}\cdot\text{с}$, визначаються за допомогою капілярних віскозиметрів.

Капілярний метод базується на використанні формули Гагена–Пуазейля, згідно з якою об'єм рідини V , що протікає за час t через капіляр довжиною l та радіусом R при наявності перепаду тиску ΔP на кінцях капіляра, дорівнює:

$$V = \frac{\pi R^4 \cdot \Delta P}{8\eta \cdot l} \cdot t.$$

Для вертикального капіляра перепад тиску зумовлений гідростатичним тиском стовпа рідини висотою h , тобто

$$\Delta P = \rho gh,$$

де ρ – густина рідини.

За цими формулами знаходять в'язкість рідини

$$\eta = \frac{\pi R^4 \cdot \rho gh}{8lV} \cdot t.$$

Враховуючи, що величини V , l , R та h є сталими для даного капіляра, та вводячи сталу віскозиметра

$$c = \pi R^4 gh / (8lV),$$

можна визначити значення в'язкості за формулою $\eta = c \cdot \rho \cdot t$.

Час протікання досліджуваної рідини через даний капіляр

залежить від його параметрів, густини та в'язкості рідини. Вимірюючи цей час для протікання однакових об'ємів досліджуваної (t_x) та еталонної (t_{em}) рідин, отримаємо формули, які дозволяють визначити значення відносного ($\eta_{від}$) та абсолютного ($\eta_{абс}$) коефіцієнтів в'язкості досліджуваної рідини:

$$\eta_{від} = \frac{\eta_x}{\eta_{em}} = \frac{\rho_x \cdot t_x}{\rho_{em} \cdot t_{em}}, \quad (2.70)$$

$$\eta_x = \eta_{абс} = \eta_{em} \cdot \eta_{від}. \quad (2.71)$$

В якості еталонної рідини, як правило, використовують дистильовану воду, в'язкість якої (η_{em}) залежно від температури наведена в таблиці 2.

Порядок виконання лабораторної роботи

Завдання 1. Ознайомитися з будовою капілярного віскозиметра.

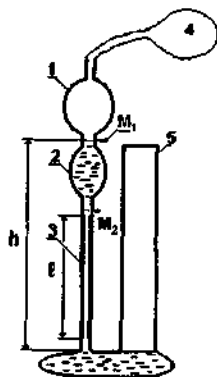


Рис. 2.36. Капілярний віскозиметр

Основу віскозиметра становить капіляр 3 з резервуаром 2 (рис. 2.36). Мітки M_1 та M_2 на резервуарі служать для фіксування об'єму рідини, що протікає через капіляр. Груша 4 служить для засмоктування рідини в резервуар 1.

Завдання 2. Визначити відносний $\eta_{від}$ та абсолютний $\eta_{абс}$ коефіцієнти в'язкості досліджуваної рідини.

1. Визначити час t_x протікання через капіляр фіксованого об'єму досліджуваної рідини. Для визначення t_x необхідно за допомогою груші засмоктати гліцерин в резервуар 1 на декілька міліметрів вище мітки M_1 . Потім, дозволяючи рідині вільно витікати із резервуара 2 через капіляр 3, виміряти за допомогою секундоміра час t_x проходження меніску між мітками M_1 та M_2 . Виміри занести в таблицю 1.

Таблиця 1. Результати вимірів часу витікання рідин

№	t_x [с]	Δt_x [с]	t_{em} [с]	Δt_{em} [с]
1				
2				
3				
Середнє значення				

2. Аналогічним способом визначимо час t_{em} для дистильованої води. Результати занести в таблицю 1.

3. Розрахувати відносну в'язкість досліджуваної рідини за формулою (2.70). При розрахунках використовувати середні значення t_x та t_{em} . Значення густини досліджуваної рідини ρ_x взяти рівним $\rho_x = (1120 \pm 0.5) \text{ кг/м}^3$, а густину дистильованої води $\rho_{em} = (1000 \pm 1) \text{ кг/м}^3$.

Таблиця 2. Залежність коефіцієнта в'язкості дистильованої води [Па·с] від температури

$t^{\circ}\text{C}$	η_{em}	$t^{\circ}\text{C}$	η_{em}	$t^{\circ}\text{C}$	η_{em}
0	0,00179	21	0,00098	30	0,00080
5	0,00151	22	0,00096	40	0,00065
10	0,00131	23	0,00093	50	0,00055
15	0,00114	24	0,00091	60	0,00047
16	0,00111	25	0,00089	70	0,00041
17	0,00108	26	0,00087	80	0,00036
18	0,00106	27	0,00086	90	0,00032
19	0,00103	28	0,00084	100	0,00028
20	0,00100	29	0,00082	110	0,00026

4. Розрахувати абсолютне значення коефіцієнта в'язкості досліджуваної рідини $\eta_{абс}$ за формулою (2.71), визначивши за

таблицею 2 коефіцієнт в'язкості дистильованої води η_{em} при температурі досліду.

5. Знайти відносну ε та абсолютну $\Delta\eta$ похибки у визначенні відносного та абсолютного коефіцієнтів в'язкості досліджуваної рідини:

– відносна похибка

$$\varepsilon = \pm(\Delta\eta_x/\eta_x) = \pm(\Delta t_x/t_x + \Delta t_{em}/t_{em} + \Delta\rho_x/\rho_x + \Delta\rho_{em}/\rho_{em}),$$

– абсолютні похибки для абсолютного та відносного коефіцієнтів в'язкості

$$\Delta\eta_{abs} = \varepsilon \cdot \eta_{abs}, \quad \Delta\eta_{від} = \varepsilon \cdot \eta_{від}.$$

Кінцевий результат подати у вигляді:

$$\eta_x = (\eta_{abs} \pm \Delta\eta_{abs}) [Па \cdot с], \quad \eta_{від} = \eta_{від} \pm \Delta\eta_{від}.$$

Завдання 3. Визначення коефіцієнта в'язкості рідини за допомогою віскозиметра ВК-4.

1. Віскозиметр ВК-4 являє собою капілярний віскозиметр для визначення коефіцієнта в'язкості крові. Із формули Гагена-Пуазейля, яка описує плин в'язкої рідини по циліндричній трубці, виходить, що за однакових умов плин за один і той же час об'єм речовини V , який протікає через цю трубу, обернено пропорційний в'язкості рідини: $V \sim 1/\eta$.

Величину об'єму V можна оцінити по довжині заповнення капіляру L за час плин: $V = \pi^2 \cdot L$. Отже, відношення в'язкостей рідин, об'єми яких протікають за певний час, буде дорівнювати відношенню об'ємів або довжин

$$\eta/\eta_{em} = V_{em}/V = L_{em}/L.$$

Таким чином, вимірявши L та L_{em} , можна визначити відносну в'язкість досліджуваної рідини

$$\eta_{від} = \eta/\eta_{em} = L_{em}/L. \quad (2.72)$$

Знаючи в'язкість еталонної рідини (води) при температурі досліду, можна легко одержати абсолютне значення в'язкості досліджуваної рідини.

2. Ознайомитися з будовою віскозиметра ВК-4 (рис. 2.37).

Віскозиметр ВК-4 складається з двох градуйованих капілярних бюретонок 1 і 2, закріплених на загальній підставці. Після того

як в бюретку 1 набрано води, яка служить еталонною рідиною, кран 3 на бюретці 1 закривають, що дозволяє набрати досліджувану рідину (кров) в бюретку 2, не змінюючи рівень води в бюретці 1. Обидві бюретки з'єднані трійником 4, від якого відходить гумова трубка 5 з наконечником 6.

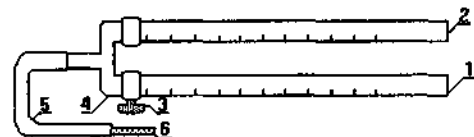


Рис. 2.37

3. Виконати такі процедури для визначення коефіцієнта відносної та абсолютної в'язкості:

а) промити капіляри спиртом і просушити за допомогою груші;

б) відкрити кран 3 і, витягуючи повітря через наконечник 6 за допомогою шприца, набрати дистильовану воду в бюретку 1 до позначки "0";

в) при закритому крані 3 таким же чином набрати досліджувану рідину в бюретку 2 до позначки "0";

г) відкривши кран 3, втягувати повітря через наконечник 6 до того часу, поки рівень досліджуваної речовини в бюретці 2 не дійде до позначки "1" ($L = 1$), вода при цьому досягає в бюретці 1 другої позначки (L_{em}). Як видно із формули (2.72), відносний коефіцієнт в'язкості досліджуваної рідини за цих умов чисельно дорівнює шляху, пройденому водою, тобто L_{em} .

4. Оформити протокол лабораторної роботи. Він повинен містити: а) стислу теоретичну частину, яка пояснює фізичну сутність капілярної віскозиметрії; б) таблиці експериментальних вимірів; в) результати обробки даних і розрахунок похибок вимірів.

Завдання для самостійної роботи та самоконтролю

1. Чим обумовлена в'язкість рідини та від яких параметрів вона залежить?
2. Що таке ідеальна, ньютонівська та неньютонівська рідини?
3. Що таке градієнт швидкості? В яких одиницях він вимірюється?
4. Дайте визначення коефіцієнта в'язкості та вкажіть одиниці його виміру.

5. У чому полягає різниця між стаціонарним і нестаціонарним плином рідин, ламінарним та турбулентним плином?
6. Що таке число Рейнольдса та який його фізичний зміст?
7. У чому полягає фізичний зміст рівняння неперервності струменя, рівняння Бернуллі?
8. Від яких параметрів залежить в'язкість крові?
9. Як пов'язані між собою об'ємна та лінійна швидкості плинину рідин?
10. Визначити об'ємну та лінійну швидкості плинину рідин, якщо діаметр судини 3 см, відносна в'язкість рідини дорівнює 2, густина 1000 кг/м^3 , число Рейнольдса дорівнює 3000.
11. Визначити силу, що діє на 100 м^2 поверхні дна, якщо швидкість плинину води в потоці лінійно збільшується від нуля на дні до 10 м/с на поверхні, глибина потоку 2 м.

2.6.3. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3

“Визначення порога чутності аудіометричним методом”

Мета роботи: дослідити спектральну чутливість вуха на порозі чутності, ознайомитися з роботою клінічного аудіометра.

Контрольні питання для підготовки до лабораторної роботи

1. Диференціальне рівняння незатухаючих гармонічних коливань. Зміщення, швидкість і прискорення при гармонічних коливаннях. Зміна енергії при гармонічних коливаннях.
2. Диференціальне рівняння затухаючих гармонічних коливань. Коефіцієнт затухання. Декремент затухання.
3. Вимушені коливання. Явище механічного резонансу. Автоколивання.
4. Складне коливання та його гармонічний спектр.
5. Хвилі в пружному середовищі. Рівняння хвилі. Потік енергії хвилі. Вектор Умова.
6. Об'єктивні характеристики звукової хвилі: інтенсивність (сила) звуку, частота, частотний спектр.
7. Суб'єктивні характеристики звуку: гучність, висота тону, тембр.
8. Психофізичний закон сприйняття звуку Вебера–Фехнера.
9. Ультразвук. Інфразвук. Аудіометрія. Криві однакової гучності. Поріг чутності. Аудиограма.

Додаткова література

1. Чалий О.В. та ін. Медична і біологічна фізика. – К.: Віпол, 1999.–Т.1–425 с.

2. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996. – С. 104–147.
3. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1987. – Гл. 7. – С. 130–150, 151–168.
4. Ремизов А.Н. Курс физики, электроники, кибернетики для медицинских институтов. – М.: Высшая школа, 1982. – Гл. 6. – С. 55–82; Гл. 7. – С. 82–91.
5. Ливенцев Н.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1978. – Ч.1. – Гл. 4. – С. 67–81; Гл. 5. – С. 82–114.
6. Ливенцев Н.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1974. – Гл. 3. – С. 73–100; Гл. 4. – С. 100–121.
7. Эссаулова И.А. и др. Руководство к лабораторным работам по медицинской и биологической физике. – М.: Высшая школа, 1987. – С. 86–89.
8. Агапов Б.Т. и др. Лабораторный практикум по физике. – М.: Высшая школа, 1982. – С. 113–119.

Додаткові теоретичні відомості

Розрізняють об'єктивні та суб'єктивні характеристики звуку. Об'єктивними характеристиками звуку, як механічної хвилі, є *інтенсивність* або *сила звуку*, *частота* та *частотний спектр*. Об'єктивні характеристики звуку можуть бути вимірні відповідними приладами незалежно від людини. Зважаючи на те, що звук є об'єктом слухового сприйняття, він оцінюється людиною суб'єктивно. Суб'єктивними характеристиками звуку є: *гучність звуку*, *висота*, *тембр*.

Інтенсивність звуку (I) є його енергетичною характеристикою. Вона визначається кількістю енергії (W), яка переноситься звуковою хвилею за одиницю часу через одиницю площі поверхні, розміщеної перпендикулярно до напрямку розповсюдження хвилі:

$$I = W/(S \cdot t). \quad (2.73)$$

У системі СІ сила звуку I , відповідно до формули (2.73), вимірюється в $[\text{Вт/м}^2]$.

Нормальне людське вухо сприймає достатньо широкий діапазон інтенсивностей звуку: при частоті $\nu = 1000 \text{ Гц}$ від $I_{\min} = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ (порог чутності) до $I_{\max} = 10 \text{ Вт/м}^2$ (порог больового відчуття), тобто відношення інтенсивностей звуків для цих порогів становить величину 10^{13} . У зв'язку з цим для порівняння

інтенсивностей звуку зручно ввести логарифмічну шкалу рівнів інтенсивності, тобто порівнювати не інтенсивності звуку, а їх логарифми. Рівень інтенсивності звуку, який відповідає порогу чутності, приймають за нульовий рівень шкали. Рівень інтенсивності L іншого звуку виражають через десятковий логарифм відношення I/I_0 :

$$L = \lg(I/I_0). \quad (2.74)$$

Рівень інтенсивності звуку вимірюють в *Белах* (B) або *децибелах* ($дБ$), причому $1 B = 10 дБ$.

Перехід від шкали рівнів інтенсивності звуку до абсолютних значень інтенсивності звуку може бути виконаний через значення нульового рівня I_0 . Так, наприклад, якщо рівень інтенсивності звуку дорівнює 4 *Бели*, тобто $L = \lg(I/I_0) = 4$ *Бел* або $(I/I_0) = 10^4$, то значення інтенсивності звуку I дорівнює: $I = I_0 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2$. Підставляючи значення I_0 , одержимо значення I , яке дорівнює $I = 10^{-8} \text{ Вт/м}^2$.

Суб'єктивна характеристика звуку – гучність E , яка відповідає об'єктивній характеристиці – інтенсивності I , не піддається точному кількісному виміру. Але на основі психофізичного закону Вебера–Фехнера можна дати кількісну оцінку гучності шляхом порівняння слухової чутності від двох джерел звуку (або двох різних слухових подразнень). Згідно з законом Вебера–Фехнера, гучність даного звуку прямо пропорційна логарифму відношення його інтенсивності I до значення інтенсивності звуку I_0 , який відповідає порогу чутності (при однакових частотах звукових коливань), тобто:

$$E = k \cdot \lg(I/I_0), \quad (2.75)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, який залежить від частоти ν звуку.

Якщо б коефіцієнт k був сталою величиною, то з формул (2.74) і (2.75) виходило б, що логарифмічна шкала рівнів інтенсивності звуку відповідає шкалі гучності. Але сильна залежність k від частоти звуку не дозволяє вимір гучності звуку звести до простого використання формули (2.75).

Умовно вважають, що на частоті $\nu = 1 \text{ кГц}$ шкали гучності та рівнів інтенсивності звуку збігаються, тобто $k = 1$ або

$$E = L = \lg I/I_0. \quad (2.76)$$

Одиницею шкали гучності також є *Бел* (B) або *децибел* ($дБ$), причому $1 B = 10 дБ$. Один *Бел* гучності відповідає зміні гучності тону частотою 1000 Гц при зміні інтенсивності звуку в 10 разів. Децибел в шкалі гучності називають також *фоном*. Таким чином, рівень інтенсивності звуку частотою 1 кГц в *децибелах*, який вимірний за допомогою приладу, чисельно дорівнює гучності цього звуку в *фонах*. Гучність звуку на інших частотах можна виміряти, порівнюючи слухове відчуття досліджуваного звуку зі слуховим відчуттям звуку частотою 1 кГц . Отримані в результаті таких вимірів графіки залежності інтенсивності звуку (I) від частоти (ν) при сталій гучності ($E = \text{const}$) називаються кривими однакової гучності (рис. 2.38).

На рис. 2.38 приведені чотири таких кривих, що відповідають кривим однакової гучності для нульової гучності (0 *фон*), для 40 , 80 *фон* і для больового порогу.

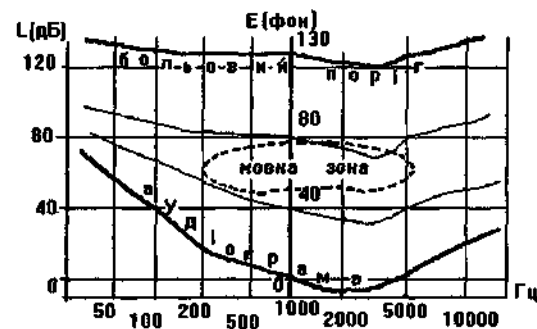


Рис. 2.38. Криві однакової гучності для різних інтенсивностей звуку

Особливе значення має крива нульової гучності, тобто залежність порогу чутності від частоти звуку. Ця крива називається *аудиограмою*. Метод дослідження гостроти слуху називається *аудиометрією* (*аудио* – звук, *метрія* – вимір). Гострота слуху визначається мінімальною інтенсивністю звуку (або *порогом чутності*), яка сприймається вухом людини. Виміри гостроти слуху показали, що у людини пороги чутності значно відрізняються на різних частотах. Так, порогові значення

інтенсивності на частотах 1000 та 50 Гц відрізняються між собою майже в мільйон разів. Це свідчить про значну спектральну чутливість вуха на порозі чутності. Отже, *аудиограма являє собою сукупність порогових значень інтенсивності звуку на різних частотах*. Методи клінічної аудіометрії дозволяють визначити послаблення слуху у пацієнта та порівняти гостроту його слуху з нормою. Різниця між виміряним порогом і середньостатистичним порогом нормального слуху, виражена в дБ, характеризує втрату (послаблення) слуху.

Аудіометрія проводиться за допомогою спеціальних апаратів – *аудіометрів*. По характеру сигналу, за допомогою якого вимірюється гострота слуху, аудіометри поділяються на *тональні* та *мовні*, найкращі зразки аудіометрів об'єднують функції цих двох типів аудіометрів. При використанні тонального аудіометра гострота слуху оцінюється порогом чутності чистих тонів. При мовній аудіометрії гострота слуху визначається або порогом чутності мовного сигналу, або порогом розбірливості мовних звуків. Блок-схема аудіометра має такий вигляд (див. рис. 2.39):

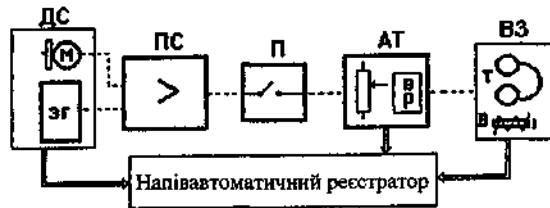


Рис. 2.39

ДС – джерело звукових сигналів, це генератор звукових частот (*Г*) для тональних аудіометрів або мікрофон (*М*) (магнітофонний запис сигналу) для мовного аудіометра, деякі аудіометри крім цього містять і генератори шумів;

ПС – підсилювач звукових сигналів;

П – переривач сигналу, за допомогою якого визначають відсутність у пацієнта слухових галюцинацій;

АТ – аттенуатор – пристрій, який дозволяє регулювати необхідний рівень сигналу; цей блок може включати вимірювач рівня сигналу (*ВР*) в дБ або в $Вт/м^2$;

ВЗ – випромінювач звуку, він може бути декількох типів: головні телефони або навушники (*Т*) для повітряної провідності або спеціальний вібратор (*В*) – для кісткової провідності (кістковий телефон, аналогічний пристрою, який використовується в слухових апаратах).

Сучасні аудіометри мають напівавтоматичний запис аудиограми, який ведеться безперервно на бланку. В процесі дослідження автоматично змінюються частота та інтенсивність сигналу, пацієнт замикає кнопку для порогових значень, а друкувальний пристрій (або самописець) позначає його на бланку аудиограми.

Порядок виконання лабораторної роботи

Завдання 1. Зняти аудиограму за допомогою лабораторного аудіометра АТК-5 (рис. 2.40).

На передній панелі приладу знаходяться ручки керування обох каналів. На лівій стороні – 1-го каналу, а на правій – 2-го каналу.

Вхідні перемикачі сигналів знаходяться з обох сторін. За їх допомогою, використовуючи внутрішні джерела сигналів, можна подавати чистий звук (SOUND), білий шум (P.NOISE), шум вузької смуги (N.B.NOISE). Крім того, мікрофон (MICR.), магнітофон або інші джерела зовнішніх сигналів (EXT), можна підключити через розмикачі, що знаходяться на задній панелі приладу.

Перемикачі відповідних входів-виходів з'єднані лініями, які служать для вибору червоного, синього навушника або навушника кісткової провідності в залежності від режиму обстеження. Частоту чистого звуку (відповідно кожного каналу) визначає положення перемикача FREQUENCY.

Вихідний рівень сигналу регулюється ручками LEVEL CH₁, CH₂. Над ручками регулятора рівня знаходяться безпосередньо кнопки переривання окремо для двох каналів.

На верхній панелі апарата з обох сторін знаходяться перемикачі режиму модуляції (MOD.), за допомогою яких можна встановлювати значення модуляції від 0 до 5 дБ, для кожного каналу окремо. Поряд розміщена кнопка блоку збільшення на 10 дБ.

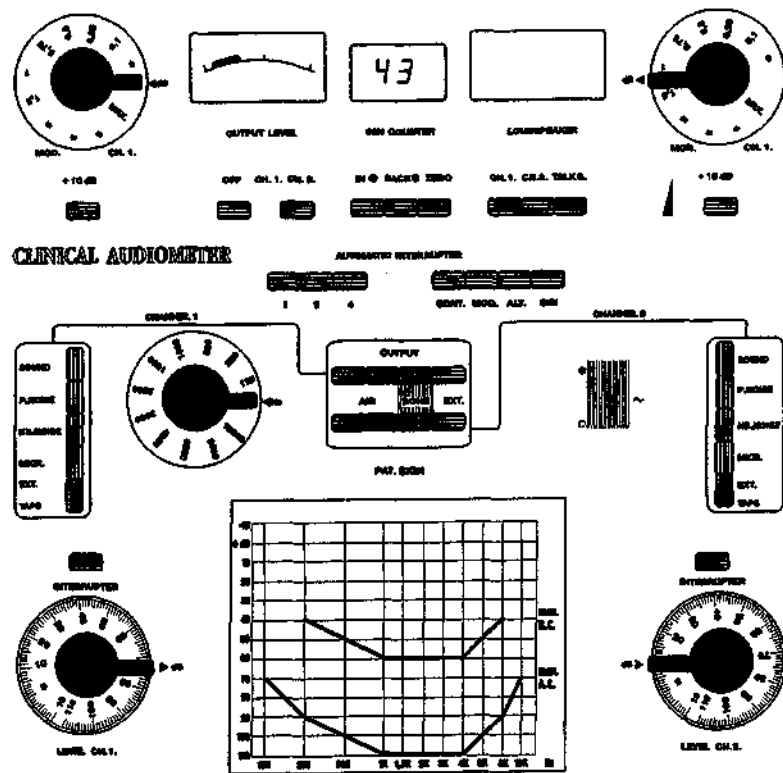


Рис. 2.40. Схема передньої панелі клінічного аудіометра ATK-5

Позначення: clinical audiometer – клінічний аудіометр; output level – вихідний рівень; counter – лічильник; loudspeaker – гучномовець; automatic interrupter – автоматичний переривач; channel – канал; sound – звук; pois(e) – шум; air – повітря (повітряний); bone – кістка (кістковий); ext(ernal) – зовнішній; cont(inuous) – неперервний; mod(ulate) – модульований (модуляція); alt(ernating) – змінний; frequency – частота

На передній панелі розміщені перемикачі режиму імпульсів, за допомогою яких можна вибирати безперервний (CONT.), однофазно модульований або переривчастий (MOD.), в різних фазах модульований або переривчастий (ALT.), та SISI режими. В останньому випадку на навушники поступають

імпульси тривалістю 200 мс, величину яких можна змінювати за допомогою ручки МОД. Частоту імпульсів визначає положення кнопок (1, 2, 4).

За допомогою підсилювача сигналів, що надходять від пацієнта (TOLK BACK) пацієнт може підтримувати зв'язок з оператором через свій мікрофон. Для цього натискають перемикач TOLK BACK і кнопки CH₁ і CH₂. Гучність регулюється потенціометром і реєструється вольтметром, який знаходиться на лівій стороні передньої панелі, і працює при натисканні відповідних кнопок CH₁, CH₂.

Лічильник COUNTER вмикається при натисканні червоної кнопки і показує кількість сигналів генератора імпульсів. Покази індикації зникають при натисканні кнопки ZERO. При натисканні кнопки BACK пишуться значення кількості імпульсів реакції пацієнта.

На задній панелі знаходяться гнізда, до яких можна приєднувати обладнання згідно підписам:

- PAT.SIGN – розмикач ручного перемикача пацієнта;
- OUTPUT CH₁, CH₂ – окремі вихідні канали;
- PHONE, BONE C – розмикач навушників повітряної та кісткової провідності;
- PAT.MICR, TXAM.MICR – місце підключення мікрофонів пацієнта і оператора;
- INPUT CH₁, CH₂ – місце підключення підсилювачів обох каналів.

Визначення слухового відчуття на аудіометрі ATK-5 здійснюється за допомогою подачі пацієнту чистих тонів різної частоти та інтенсивності. Реєстрація результатів проводиться на бланку аудіограми шляхом нанесення точки в місці перетину планок, зв'язаних з перемикачем частоти FREQUENCY та інтенсивності звуку LEVEL CH₁, CH₂.

2. Завдання 2. Підготувати аудіометр ATK-5 до роботи та зняти аудіограму на клінічному аудіометрі ATK-5.

Для цього необхідно:

- а) встановити бланк аудіограми на реєструючу трафаретку;
- б) підключити навушники до гнізда PHONE, що знаходиться на задній панелі;

в) включити аудіометр в мережу за допомогою кнопки (~) на передній панелі;

г) за допомогою вхідного перемикача сигналів для першого каналу, розташованого зліва, подати чистий звук, натиснувши клавішу SOUND.

3. Оформити протокол лабораторної роботи. В ньому повинно бути:

а) стисла теоретична частина, яка містить відомості про об'єктивні та суб'єктивні характеристики звуку та одиниці їх вимірів, психофізичний закон Вебера-Фехнера тощо; б) відомості про аудіометрію; в) таблиця експериментальних вимірів; г) результати обробки даних і графіки аудіограм; д) висновки щодо результатів досліджень.

Завдання для самостійної роботи та самоконтролю

1. Що таке звук? Які умови його розповсюдження в середовищі?
2. Вкажіть об'єктивні та суб'єктивні характеристики звуку та відповідність між ними. Вкажіть одиниці їх вимірів.
3. В чому полягає суть психофізичного закону Вебера-Фехнера?
4. Що називається аудіометрією? Що таке аудіограма?
5. З яких основних частин складається аудіометр?
6. Що означає послаблення слуху у пацієнта в середньому на 50 дБ?
7. Два звуки частотою $\nu = 1000$ Гц відрізняються за гучністю на 2 Бели. У скільки разів відрізняються їх інтенсивності?
8. Звук частотою $\nu = 200$ Гц проходить деяку відстань в середовищі, при цьому інтенсивність звуку зменшується від $I = 10^{-6}$ до 10^{-10} Вт/м². На скільки при цьому зменшиться гучність ($k = 1,25$ для $\nu = 200$ Гц)?

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕКТРОДИНАМІКА МЕДИКО-БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ

“Хімія і вчення про магнетизм одне за одним визнали провідне значення електрики, і досить ймовірно, що всі явища, які виникають під дією сил неорганічної матерії, а, можливо, й більшість тих, що стосуються рослинного та тваринного життя, виявляться решті-решт її підпорядкованими”.

Майкл Фарадей

Класична електродинаміка – розділ фізики, що вивчає закономірності поведінки електромагнітного поля та його складових – електричного і магнітного полів. Електромагнітна взаємодія є дуже важливою через широту та різноманітність її проявів.

Електромагнітні явища мають, окрім свого великого теоретичного значення для розуміння процесів у живій та неживій природі, також і важливі медико-біологічні застосування, серед яких варто виділити:

– дослідження електричних процесів, що відбуваються в живих організмах, а також електричних та магнітних властивостей біологічних об'єктів;

– вивчення механізмів взаємодії зовнішніх електромагнітних полів з біологічними тканинами;

– використання сучасної електронної апаратури для потреб медицини та біології.

До вивчення основних законів електродинамічних процесів, що відбуваються в біологічних об'єктах, ми й переходимо.

3.1. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

3.1.1. Основні характеристики електричного поля

Електричне поле – це поле, яке створюється електричними зарядами і здійснює взаємодію між ними. Частинним випадком є *електростатичне поле*; воно створюється нерухомими елек-

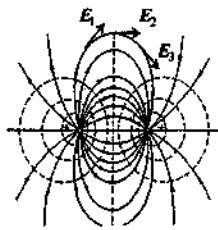


Рис. 3.1

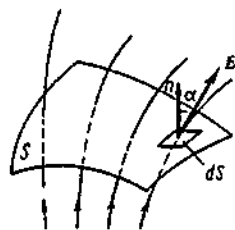


Рис. 3.2

тричними зарядами, величина яких не змінюється з плином часу. Електричне поле можна виявити та дослідити за його дією на інші електричні заряди. З цією метою використовують *пробні заряди*, величина та розміри яких настільки малі, що вони не викликають перерозподілу зарядів в оточуючих тілах, а, отже, не спотворюють досліджуване поле.

Силовою характеристикою електричного поля ϵ , як відомо, *напруженість* E – векторна величина, яка дорівнює відношенню сили, що діє з боку поля на розміщений в даній точці пробний заряд q , до величини цього заряду:

$$E = F/q. \quad (3.1)$$

Розмірність напруженості електричного поля в системі СІ: $[E] = \text{Н/Кл} = \text{В/м}$. Графічно електричне поле зображують за допомогою ліній напруженості (силових ліній). *Силкові лінії* – лінії, дотичні до яких в кожній точці електричного поля збігаються з вектором напруженості у цій точці. Силкові лінії електростатичного поля незамкнені: вони починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних або продовжуються у нескінченність (рис. 3.1). Густота силових ліній, тобто їх число на одиницю площі, пропорційна до модуля напруженості.

Скалярну фізичну величину, яка дорівнює $dN = E \cdot dS \cdot \cos \alpha$, називають *поток вектора напруженості* електричного поля через поверхню площею dS . Тут α – кут, утворений вектором нормалі до поверхні n і вектором E (рис. 3.2).

Поряд з напруженістю для характеристики електричного поля використовують ще одну векторну величину – *електричну індукцію* D . Електрична індукція не залежить від діелектричних властивостей середовища, а отже, не змінюється при переході з одного середовища в інше. Для поля у вакуумі:

$$D = \epsilon_0 E, \quad (3.2)$$

де $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ електрична стала. Для ізотропного середовища з відносною діелектричною проникністю ϵ

$$D = \epsilon_0 \epsilon E. \quad (3.3)$$

Розмірність електричної індукції в системі СІ: $[D] = \text{Кл/м}^2$.

Електростатичне поле *потенціальне*, тобто робота його сил по переміщенню електричного заряду q між двома точками не залежить від форми траєкторії, а визначається лише початковим та кінцевим положеннями заряду. Як відомо, робота сил потенціального поля дорівнює зменшенню потенціальної енергії:

$$A_{1 \rightarrow 2} = W_1 - W_2 = q(\phi_1 - \phi_2), \quad (3.4)$$

де ϕ – потенціал. *Потенціал* – скалярна фізична величина, яка характеризує здатність поля здійснювати роботу і визначається відношенням потенціальної енергії пробного заряду, вміщеного в дану точку поля, до величини цього заряду

$$\phi = W/q. \quad (3.5)$$

Розмірність потенціалу: $[\phi] = \text{Дж/Кл} = \text{В}$. Безпосередній фізичний зміст має не сам потенціал, оскільки він, як і потенціальна енергія, визначається з точністю до сталого доданка, а різниця потенціалів. Різниця потенціалів U називається *напругою*:

$$U = -\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2. \quad (3.6)$$

Геометричне місце точок, що мають однаковий потенціал, називають *еквіпотенціальною поверхнею* (на рис. 3.1 зображені пунктирними лініями). При переміщенні заряду вздовж еквіпотенціальної поверхні ($\phi = \text{const}$, $d\phi = 0$) робота над зарядом не виконується. Це означає, що сили електричного поля, а отже, і

лінії напруженості перпендикулярні до екіпотенціальних поверхонь.

Зв'язок між напруженістю і потенціалом. Розглянемо переміщення позитивного точкового заряду q на достатньо малу відстань dl з точки 1 в точку 2, на якій силу $F = qE$ можна вважати постійною (рис. 3.3). Тоді робота

$$dA = Fdl \cos \alpha = qEdl \cos \alpha = qE_l dl, \quad (3.7)$$

де α – кут між векторами переміщення та сили. Припустимо, що через точки 1 та 2 проходять екіпотенціальні поверхні з потенціалами φ_1 та φ_2 , тому з іншого боку згідно з (3.4)

$$dA = q(\varphi_1 - \varphi_2) = -q d\varphi. \quad (3.8)$$

Прирівнявши цей вираз та (3.7), матимемо:

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \quad (3.9)$$

Це рівняння виражає зв'язок напруженості електричного поля з потенціалом: проекція вектора напруженості поля на заданий напрям дорівнює швидкості зменшення потенціалу в цьому напрямі. Можна сказати, що вектор *напруженості електричного поля в будь-якій точці дорівнює градієнту потенціала, взятому зі знаком “-”*.

$$E = -\text{grad} \varphi = -\nabla \varphi. \quad (3.10)$$

Таким чином, вектор напруженості електричного поля збігається з напрямком найбільшої зміни потенціалу. Знак “-” у формулі (3.10) показує, що вектор E спрямований в бік зменшення потенціалу.

Якщо поле однорідне ($E = \text{const}$), то остання формула набуває вигляду, відомого з шкільного курсу фізики:

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2)/l = U/l, \quad (3.11)$$

де l – відстань вздовж напрямку E між точками з потенціалами φ_1 та φ_2 .

Принцип суперпозиції електричних полів. Розглянемо сукупність точкових електричних зарядів q_1, q_2, \dots, q_n . Кожний із

цих зарядів створює власне електричне поле E , незалежно від наявності інших зарядів. Для знаходження результуючого електричного поля в заданій точці застосовується принцип суперпозиції, який полягає в тому, що електричні поля окремих зарядів складаються. *Напруженість E результуючого електричного поля системи точкових зарядів визначається векторною сумою напруженостей полів E_i , створених окремими зарядами:*

$$E = \sum_{i=1}^n E_i. \quad (3.12)$$

Потенціал результуючого поля φ дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів φ_i полів, створених окремими точковими зарядами:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (3.13)$$

Формули (3.12) та (3.13) використовують для обчислення напруженості та потенціалу електричного поля, створеного будь-якими зарядженими тілами.

3.1.2. Електричний диполь

Вивчення цього питання має практичне значення, оскільки молекули багатьох речовин є природними диполями. Крім того, окремі органи та біологічні тканини в процесі своєї життєдіяльності створюють електричні поля, схожі з полем диполя. В даному параграфі розглянемо як поле диполя, так і поведінку диполя в зовнішньому електричному полі.

Диполем називають сукупність двох рівних за величиною точкових зарядів q протилежного знака, що знаходяться один від одного на малій відстані l , яку називають *плечем диполя*. Плечу диполя присвоюють напрямок від заряду $-q$ до заряду $+q$ (рис. 3.4, а). Лінія, що проходить через електричні заряди, називається віссю диполя. Основна характеристика диполя – *електричний (дипольний) момент:*

$$p = ql. \quad (3.14)$$

Електричний момент диполя вимірюють в кулон-метрах ($[p] = Кл \cdot м$), а дипольні моменти молекул з огляду на їхні малі значення – в позасистемних одиницях – Дебаях (D): $1 D \approx 3,36 \cdot 10^{-30} Кл \cdot м$.

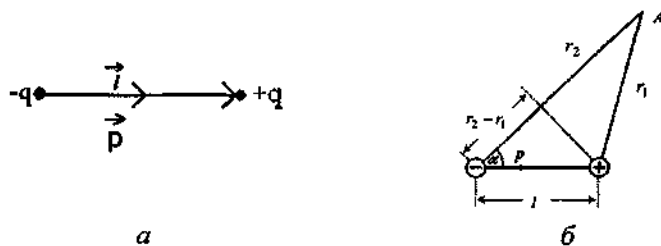


Рис. 3.4

Поле, створене диполем. Диполь, в цілому електрично нейтральний, утворює навколо себе електричне поле. На рис. 3.1 зображена картина силових ліній та екіпотенціальних поверхонь такого поля.

Знайдемо вираз для потенціалу поля, створеного диполем у деякій віддаленій ($r_1 \gg l$ і $r_2 \gg l$) точці простору A (рис. 3.4, б).

Оскільки для точкового заряду $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}$, згідно з принципом суперпозиції (3.13) маємо:

$$\varphi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}. \quad (3.15)$$

Враховуючи, що відстані до точки A від зарядів r_1 і r_2 набагато більші за плече диполя l , можна записати $r_2 r_1 \approx r^2$; $r_2 - r_1 \approx l \cos \alpha$, де α – кут між векторами p і r_2 . Підставивши ці вирази в (3.15), матимемо:

$$\varphi_A = \frac{q l \cos \alpha}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \alpha}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}. \quad (3.16)$$

Диполь в електричному полі. Розглянемо спочатку поведінку диполя в однорідному електричному полі напруженості $E = \text{const}$. На заряди диполя діє пара сил: $F_+ = qE$ та $F_- = -qE$, яка створює обертальний момент (рис. 3.5, а). Величина цього моменту визначається за формулою:

$$M = q \cdot El \sin \alpha = pE \sin \alpha, \quad (3.18)$$

де α – кут між векторами E і p . Таким чином, електричне поле намагається зорієнтувати диполь так, щоб вектори p і E були співнаправленими.

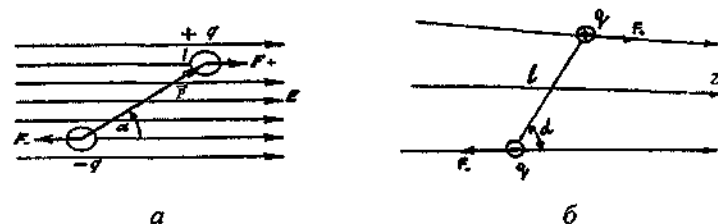


Рис. 3.5

У неоднорідному полі, де напруженість змінюється від точки до точки, диполь не тільки орієнтується вздовж ліній напруженості, а й втягується в область більшої напруженості. Це відбувається за рахунок нерівності сил F_- та F_+ , які діють на позитивний та негативний заряди (рис. 3.5, б). Чим більша неоднорідність поля (більший градієнт напруженості), тим більша результуюча сила, яка діє на диполь:

$$F = p \cos \alpha \text{ grad } E. \quad (3.19)$$

Сила F спрямована у бік більшої напруженості і досягає максимального значення, коли $\alpha = 0$, тобто коли диполь розміщений вздовж лінії напруженості поля. Існуванням цієї сили пояснюється притягання наелектризованою склянкою чи ебонітовою паличкою легких предметів, налипання пилу на наелектризовані поверхні. За рахунок цього ефекту іони в рідких та газоподібних середовищах з полярними молекулами створюють оболонку з молекулярних диполів.

3.1.3. Діелектрики, поляризація діелектриків

Діелектрики – речовини, які в звичайних умовах погано проводять електричний струм. Термін “діелектрик” був введений М. Фарадеєм. До діелектриків належать всі гази (неіонізовані), деякі рідини (вода, гас) і деякі тверді тіла (фосфор, ебоніт). Електропровідність діелектриків дуже мала, їхній питомий електричний опір $\rho \approx 10^6 - 10^{16}$ Ом.м.

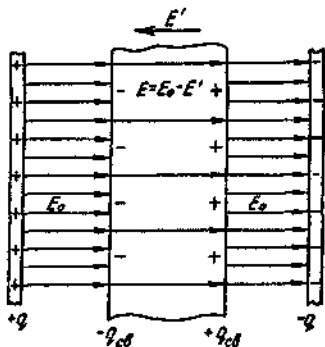


Рис. 3.6

Внесемо однорідний діелектрик в поле напруженості $E_0 = \text{const}$. На протилежних гранях діелектрика з'являються зв'язані заряди різного знака, які створюють власне поле E' . Враховуючи, що напрямки E_0 і E' протилежні, результуюча напруженість $E = E_0 - E'$ (рис. 3.6). Величина, яка показує, у скільки разів напруженість поля в однорідному діелектрику менша, ніж напруженість поля у вакуумі, якщо ці поля створені одними і тими ж самими вільними зарядами, називається *відносною діелектричною проникністю середовища* ϵ .

$$\epsilon = E_0/E = E_0/(E_0 - E'). \quad (3.20)$$

Поляризація середовища і діелектриків, зокрема, є процес утворення об'ємного дипольного електричного моменту середовища. Поляризація може здійснюватися не тільки під дією електричного поля, а й деяких інших факторів, наприклад, механічних напруг (п'єзоелектричний ефект). Мірою поляризації діелектрика є вектор діелектричної поляризації P , який дорівнює сумарному дипольному моменту молекул, віднесеному до об'єму V , в якому вони містяться, тобто

$$P = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N p_i, \quad (3.21)$$

де N – число молекул в об'ємі V , p_i – дипольний момент молекули. Вектор поляризації можна наближено вважати пропорційним до напруженості поля E :

$$P = \epsilon_0 \alpha E, \quad (3.22)$$

де α – *діелектрична сприйнятливість* – безрозмірна величина, яка для вакууму дорівнює нулю, а для діелектриків є додатним числом ($\alpha > 0$).

Електрична індукція в діелектрику визначається сумою двох доданків:

$$D = \epsilon_0 E + P, \quad (3.23)$$

або з врахуванням (3.22):

$$D = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \alpha E = \epsilon_0 (\alpha + 1) E. \quad (3.24)$$

Порівнюючи (3.3) і (3.24), дістанемо $1 + \alpha = \epsilon$, де ϵ – відносна діелектрична проникність. Обидві макроскопічні величини α і ϵ є безрозмірними і характеризують здатність речовини до поляризації. У таблиці 3.1 наведені значення діелектричної проникності ϵ для ряду речовин при кімнатних температурах і постійних електричних полях.

Таблиця 3.1.

Речовина	ϵ	Речовина	ϵ
Повітря (при нормальних умовах)	1,0058	Біла речовина мозку	90
Віск	7,8	Сіра речовина мозку	85
Парафін	2,1	Речовина зорового нерва	89
Скло	5-7	Кров	85
Вода	81	Білок яйця	72
Гас	2	Крохмаль	12
Поліетилен	2,2	Хлористий натрій (кристалічний)	6,12

Механізми поляризації діелектрика різноманітні і залежать від характеру хімічного зв'язку атомів у молекулі. Розрізняють діелектрики з полярними і неполярними молекулами. Діелектрики, в молекулах яких центри просторового розподілу позитивних і негативних зарядів збігаються, називають *неполярними*. До

діелектриків цієї групи належать: H_2 , N_2 , CO_2 , CCl_4 , парафін, бензол та інші вуглеводи. За відсутності зовнішнього поля дипольний момент таких молекул дорівнює нулю. **Полярними** називають молекули, в яких центри позитивних і негативних зарядів не збігаються. Полярні молекули за відсутності електричного поля мають відмінний від нуля дипольний момент $p = ql$, який називають *власним*. Якщо в електричному полі відстань l не змінюється, то такі молекулярні диполі називають жорсткими. До діелектриків з полярними молекулами (полярних діелектриків) належать речовини, що мають асиметричні молекули: H_2O , NO_2 , HCl , $CHCl$, органічні кислоти тощо.

Розглянемо основні види поляризації.

Орієнтаційна поляризація. За відсутності зовнішнього поля в рідинах та газах з полярними молекулами вектор поляризації $P = 0$ (рис. 3.7, а). Зовнішнє поле намагається зорієнтувати полярні молекули вздовж силових ліній. Внаслідок спільної дії двох факторів (зовнішнього поля і хаотичного теплового руху) у діелектрику з'являється переважаюча орієнтація молекулярних диполів у напрямку поля (рис. 3.7, б).

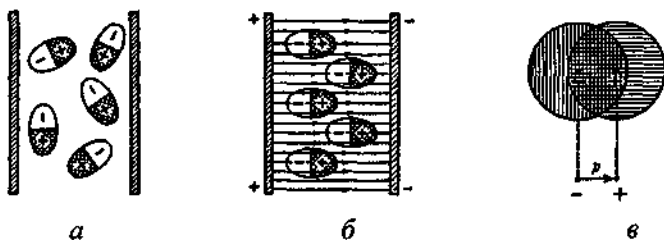


Рис. 3.7

Деформаційна (електронна) поляризація обумовлена зміщенням електричних зарядів в атомах і молекулах під дією зовнішнього електричного поля, що призводить до появи дипольного моменту p у цих частинок (рис. 3.7, в). Цей індукований момент зникає при вимкненні поля. Його величина в слабких полях лінійно залежить від напруженості поля, тобто

$$p = \beta \epsilon_0 E, \quad (3.25)$$

де E – електричне поле в місці знаходження частинки, а β – коефіцієнт, який називають поляризованістю молекули. Зауважимо, що діелектрична сприйнятливість $\alpha = \beta n_0$, де n_0 – кількість диполів в одиниці об'єму. Такі молекули, на відміну від молекул полярного діелектрика, є нежорсткими дипольними молекулами, їх плече $l \neq \text{const}$.

Іонна поляризація (поляризація іонного зміщення). В іонних кристалах (наприклад, $NaCl$) можна умовно виділити підґратки, які утворені позитивними і негативними іонами. Дією зовнішнього поля обидві підґратки зміщуються у протилежні боки і на поверхні діелектрика з'являються зв'язані заряди.

Спонтанна поляризація. У кристалах сегнетоелектриках при відсутності зовнішнього електричного поля існують області, всередині яких дипольні моменти молекул однаково направлені. Такі області самочинної (спонтанної) поляризації називають доменами. Електричний момент домену має великі значення, оскільки в домені міститься значна кількість молекул (об'єм домену 10^{-4} – 1 мм³). Поляризація сегнетоелектриків зводиться до орієнтації доменів у зовнішньому полі E_0 (рис. 3.8, а). Діелектрична проникність ϵ зростає при збільшенні E_0 (в міру посилення поля зростає впорядкованість доменів) і досягає значень $\epsilon \approx 10^4$. Сегнетоелектрики зберігають деяку залишкову поляризацію навіть після припинення дії зовнішнього електричного поля. На сегнетоелектричні властивості речовини значно впливає зміна температури. Температура, при якій внаслідок зростання інтенсивності теплового руху молекул домени руйнуються, називається температурою Кюрі.

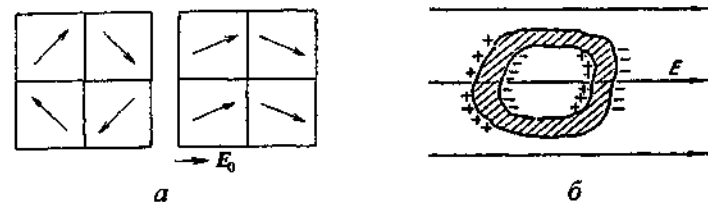


Рис. 3.8

Для біологічних тканин характерні всі типи поляризації. Крім описаних раніше, суттєву роль відіграє також *об'ємна поляризація* (ефект Максвелла–Вагнера), яка має місце в електрично ізольованих від оточуючого середовища об'ємах (наприклад, клітинах) (рис. 3.8, б).

Рух вільних носіїв, в основному іонів, у постійному електричному полі напруженості E призводить до порушення звичного для клітини розподілу зарядів і, як наслідок, її функцій. На дії постійного електричного поля високої напруженості ($E = 10^4\text{--}10^6\text{ В/м}$) на весь організм або окремі його ділянки базується лікувальний метод – *франклінізація*.

Апарат для франклінізації містить генератор високої частоти (400–800 кГц), випрамляч, на виході якого отримують постійну напругу біля 400 В. Ця напруга поступає на помножувач, який являє собою ланцюг певним чином з'єднаних конденсаторів незначної ємності. Помножувач утворює на виході високу напругу біля 40–50 кВ. Ця напруга подається на два електроди. Один з них має форму зірки з невеликими вістрями на променях. Його розміщують на відстані 10–15 см над головою пацієнта. Другий – мідний, що має форму листа, знаходиться під ногами пацієнта на ізольованій підставці. Під дією електричного поля у тканинах відбувається поляризація, а у випадку виникнення коронного розряду під електродом з'являються ще і мікроструми у провідних середовищах; на поверхні тіла виникають статичні заряди. Ці явища складають основу первинної дії на організм постійного електричного поля високої напруженості

3.1.4. Діелектричні властивості біологічних тканин

Теорія поляризації, яку ми розглянули, належить, в основному, Дебаю та Ланжевону. Згідно з цією теорією за експериментально встановленою температурною залежністю діелектричної проникності можна визначити, який тип поляризації має місце в даному діелектрику, розрахувати значення поляризованості β та дипольні моменти молекул p . Ці параметри дають цінну інформацію про полярність молекули і її окремих зв'язків, про валентні кути, розподіл електронної густини тощо. Характеризуючи живі тканини, варто враховувати, що вони є

композиційними середовищами, причому одні структурні елементи можуть бути провідниками, інші діелектриками, деякі – напівпровідниками.

Діелектричні властивості живих тканин визначаються біоструктурами, які за значеннями дипольних моментів можна поділити на три групи.

До першої групи належать внутрішньоклітинні органоїди, значення їхніх дипольних моментів є максимальними. Для цих об'єктів характерна власна (спонтанна) поляризація. Властивості таких утворень обумовлені, по-перше, їхньою шаруватою структурою, по-друге, наявністю різниці потенціалів на межі шарів із суттєво відмінними значеннями електропровідності. Клітинні органоїди є, по суті, замкненими об'ємами, утвореними біомембраною – типовим діелектриком, заповнені та оточені електролітом. Питомі електропровідності поза- та внутрішньоклітинної рідини відрізняються від питомої електропровідності мембран ($\sigma_m \approx 10^{-9}\text{ Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$) у $10^9\text{--}10^{11}$ разів. На біомембранах існує різниця потенціалів близько 60–70 мВ. За поведінкою в електричному полі та значеннями P такі внутрішньоклітинні органоїди подібні до доменів сегнетоелектрика. Завдяки їхній наявності живі тканини мають значну діелектричну проникність і деякі інші сегнетоелектричні властивості.

Другу групу складають біологічно активні полярні макромолекули, що містяться як у цитоплазмі, так і у мембранах.

До третьої групи належать, в основному, молекули води і розчинених в ній різних неорганічних речовин. Дипольні моменти молекул таких речовин мають значення 1–2 Дебая.

Дипольні моменти молекул змінюються за будь-якої, навіть зовсім незначної, перебудови структури речовини, тому дослідження динаміки діелектричної проникності дають можливість виявляти тонкі зміни (непомітні навіть в електронний мікроскоп), котрі відбуваються на молекулярному рівні.

У змінному полі $E = E_0 \sin 2\pi\nu t$ діелектрична проникність ε біологічних тканин, як і інших речовин, зменшується при збільшенні частоти зовнішнього поля (табл. 3.2). Справа в тому, що процеси появи дипольного моменту (поляризація) і його зникнення (деполяризація) є інерційними, тобто відбуваються не

миттєво, а за певний проміжок часу τ , який називають *часом релаксації*. Величину, обернену до τ , називають характеристичною частотою релаксації ν_x . Інерційність процесів поляризації є причиною їхнього відставання відносно змін поля, яким вони зумовлені:

$$P = P_0 \sin(2\pi\nu t - \delta). \quad (3.25)$$

Таблиця 3.2.

Тканина	Діелектрична проникність ϵ			
	100 Гц	1000 Гц	$2 \cdot 10^9$ Гц	$3 \cdot 10^9$ Гц
Скелетний м'яз	800	130	56	42
Печінка	820	145	50–56	34–38
Жирова тканина	150	50	4–7	4–7

Зсув фаз δ називають кутом діелектричних втрат, а $\operatorname{tg} \delta$ – тангенсом кута діелектричних втрат. Величина δ , а, отже, і $\operatorname{tg} \delta$, залежить від співвідношення між частотою змін зовнішнього поля ν та частотою релаксації ν_x . Величина τ (чи ν_x) залежить, насамперед, від структури елементів, які поляризуються. Характеристичній частоті релаксації ν_x відповідає максимальна частота ν зовнішнього електричного поля, яку диполь може повторити своїми поворотами. Із зростанням ν зменшується кількість структурних елементів, які можуть брати участь в процесах поляризації. Для внутрішньоклітинних органоїдів, як і для всяких доменів, ν_x має невеликі значення, що знаходяться у межах від 0,1 Гц до 1 кГц. Для різних білкових макромолекул ν_x охоплює діапазон від 10 кГц до 100 МГц і залежить не тільки від їхніх розмірів і форми, а також від в'язкості оточуючого середовища:

$$\nu_x \sim \frac{kT}{\eta r^3}, \quad (3.26)$$

де k – стала Больцмана, T – температура середовища, η – його в'язкість, r – радіус полярної молекули.

Характеристична частота релаксації внутрішньоклітинної води така ж, як і дистильованої. Причому, для внутрішньоклітинної води характерна наявність декількох значень ν_x ,

близьких до $20 \text{ ГГц} = 2 \cdot 10^{10} \text{ Гц}$. Цій частоті відповідає електромагнітне випромінювання з довжиною хвилі сантиметрового (НВЧ) діапазону ($\lambda = c/\nu$). Зауважимо, що перетворення енергії електромагнітного поля в теплову в середовищах, які містять полярні молекули, відбувається найефективніше при частоті зовнішнього поля ν , яка збігається з характеристичною частотою релаксації ν_x . Наприклад, при дії НВЧ випромінювання на організм нагрівання зумовлюється діелектричними втратами, котрі припадають, в основному, на молекули води.

3.1.5. П'єзоелектричний ефект

У деяких речовин (*п'єзоелектриків*) при механічних деформаціях у певних напрямках виникає електрична поляризація навіть за відсутності електричного поля (прямий п'єзоэффект). Має місце також зворотний п'єзоэффект – поява механічних деформацій під дією електричного поля.

П'єзоэффект можна спостерігати лише в кристалах, які не мають центра симетрії. Прикладом є кварц SiO_2 , на якому вперше Ж. і П. Кюрі в 1880 р. спостерігали і досліджували п'єзоэффект. П'єзоэффект можна створювати і у деяких некристалічних діелектриках за рахунок появи в них так званої п'єзоелектричної текстури, викликаної поляризацією в електричному полі (п'єзо-кераміка), механічною обробкою (деревина) тощо. Суттєвий п'єзоэффект виникає в кістковій тканині за наявності деформації зсуву, а також в сухожиллях і шкірі. Причина ефекту – деформація колагену, основного білка з'єднувальних тканин. Під час деформації стиснення і розтягу п'єзоэффект в колагені не виникає.

П'єзоэффект використовується в акустоелектроніці для створення джерел УЗ хвиль, випромінювачів і приймачів звуку, в мікрофонах, резонаторах, тобто у тих випадках, коли необхідно перетворити механічні коливання в електричні або навпаки. Крім того, у медицині п'єзоэффект використовують в датчиках для вимірювання пульсу, у віброметрах – приладах для вимірювання вібрацій. Поляризація діелектриків за відсутності електричного поля відбувається не тільки в п'єзоелектриках, а також і в піроелектриках, електретах.

Піроелектрики – кристали, в яких зміна спонтанної поляризації відбувається при зміні температури. Типовий піроелектрик – турмалін. В ньому при зміні температури на 1°C виникає електричне поле $E \sim 4 \cdot 10^4 \text{ В/м}$. Піроелектрики – приймачі та індикатори випромінювань.

Електрети – речовини, які здатні тривалий час зберігати відмінний від нуля вектор поляризації, створюючи в навколишньому просторі власне електричне поле. З цієї точки зору електрети подібні до постійних магнітів, які створюють власне магнітне поле. Перший електрет був створений у 1922 р. японським фізиком Єгучі. Він розплавив речовину, що складається з полярних молекул, помістив її у сильне електричне поле, тобто зорієнтував дипольні моменти молекул, потім охолодив. Це так звані термоелектрети. Існують також фотоелектрети, радіоелектрети, механоелектрети тощо. Електрети застосовують як джерела постійного електричного поля, а також як чутливі датчики в приладах дозиметрії, електронної пам'яті.

3.2. ПОСТІЙНИЙ СТРУМ.

ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЬ БІОЛОГІЧНИХ ТКАНИН

3.2.1. Характеристики електричного струму

Електричним струмом називають впорядкований (напрямлений) рух електричних зарядів.

Електричний струм має властивість теплової, хімічної і магнітної дії, причому магнітна дія струму проявляється в усіх без винятку провідниках, тепла дія відсутня у надпровідниках, хімічна дія проявляється переважно в електролітах. Кількісно електричний струм характеризується силою струму та густиною електричного струму.

Сила струму I визначається відношенням кількості заряду dq , який переноситься через переріз провідника, до проміжку часу dt , за який цей заряд переноситься:

$$I = dq/dt = q'(t). \quad (3.27)$$

Якщо за будь-які однакові проміжки часу переносяться однакові кількості електричного заряду, такий струм називається **постійним**. Тоді

$$I = q/t. \quad (3.28)$$

Одиниця сили струму (*Ампер*) в системі СІ є основною одиницею $[I] = A$. Тоді з формули (3.28) можна визначити одиницю кількості заряду (*Кулон*): це такий заряд, що проходить за 1 с через провідник при силі струму 1 Ампер : $[q] = Kt = As$.

Густина струму j – величина, яка дорівнює відношенню сили струму dI до площі поперечного перерізу провідника dS , через яку цей струм проходить:

$$j = dI/dS. \quad (3.29)$$

У випадку постійного струму

$$j = I/S. \quad (3.30)$$

Розмірність густини струму $[j] = A/m^2$. Густина струму – векторна величина; вона має напрямок середньої швидкості v впорядкованого руху позитивних носіїв струму

$$j = nq_0v, \quad (3.31)$$

де n – концентрація вільних носіїв, $q_0 = ze$ – заряд одного вільного носія, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ – елементарний електричний заряд, z – ціле число (у випадку електролітів z – валентність іона).

Закон Ома. У більшості випадків за сталої температури відношення напруги на кінцях провідника U до величини струму I в ньому є величина стала, тобто

$$U/I = R. \quad (3.32)$$

Величину R називають опором провідника. Формула (3.32) виражає **закон Ома в інтегральній формі**, який був встановлений Г. Омом у 1827 р. Опір однорідного провідника з незмінним перерізом прямопропорційний його довжині l і обернено пропорційний площі поперечного перерізу S , тобто

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.33)$$

де ρ – *питомий опір*. Величину σ , обернену до питомого опору, називають *питомою електропровідністю*: $\sigma = \rho^{-1}$.

Підставивши (3.30), (3.33) в (3.32) і врахувавши (3.11), отримаємо

$$j = E/\rho.$$

Оскільки напрямки векторів j та E збігаються, можна записати:

$$j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E = -\sigma \text{grad} \phi. \quad (3.34)$$

Рівняння (3.34) виражає закон *Ома в диференціальній формі*: густина струму пропорційна напруженості електричного поля і має однаковий з нею напрям. Закон Ома в такому вигляді встановлює зв'язок між величинами, які відносяться до даної точки провідника (локальними характеристиками), тому він застосовний і до неоднорідних провідників.

3.2.2. Електропровідність біологічних тканин і рідин

Багато біологічних середовищ (кров, спинномозкова рідина та інші) є електролітами. Як відомо, носії струму в електролітах – це позитивні і негативні іони, які виникають у результаті електролітичної дисоціації. Якщо густину струму для позитивних і негативних іонів згідно з (3.31) визначити як:

$$j_+ = q_0 n_+ v_+ \text{ та } j_- = q_0 n_- v_-,$$

то загальна густина струму

$$j = j_+ + j_- = q_0(n_+ v_+ + n_- v_-),$$

де n_+ і n_- , v_+ і v_- – відповідно концентрації та швидкості позитивних і негативних іонів.

Припустимо, що кожна нейтральна молекула дисоціює на два іони. Тоді концентрації позитивних та негативних іонів будуть однаковими $n_+ = n_- = \alpha n$, де α – коефіцієнт електролітичної дисоціації, n – число нейтральних молекул розчиненої речовини в одиниці об'єму. Звідси маємо:

$$j = \alpha n q_0 (v_+ + v_-). \quad (3.35)$$

Швидкість впорядкованого руху іонів прямо пропорційна до напруженості поля

$$v = bE. \quad (3.36)$$

Коефіцієнт пропорційності b називається рухливістю носіїв. *Рухливість* b чисельно дорівнює швидкості впорядкованого руху в полі з напруженістю $E = 1 \text{ В/м}$:

$$b = v/E, [b] = \text{м/с} \cdot \text{м/В} = \text{м}^2/(\text{Вс}).$$

Величина рухливості залежить від заряду носія q_0 , його маси m , а також від часу вільного пробігу τ : $b = \frac{q_0 \tau}{m}$. Значення рухливості для деяких іонів подані в табл. 3.3.

Таблиця 3.3.

Вид іона	$b, \text{м}^2/\text{Вс}$
Na^+	$5,2 \cdot 10^{-8}$
Cl^-	$7,9 \cdot 10^{-8}$
K^+	$6,7 \cdot 10^{-8}$
NO_3^-	$6,4 \cdot 10^{-8}$
H^+	$67 \cdot 10^{-8}$
Ag^+	$5,6 \cdot 10^{-8}$

Для іонів різного знаку $v_+ = b_+ E$, $v_- = b_- E$, тоді для густини струму отримаємо

$$j = \alpha n q_0 (b_+ + b_-) E. \quad (3.37)$$

Порівнявши (3.37) з (3.34), бачимо, що питома електропровідність σ для електролітів:

$$\sigma = \alpha n q_0 (b_+ + b_-). \quad (3.38)$$

Видно, що провідність зростає відповідно до зростання коефіцієнта дисоціації, концентрації молекул електроліту, заряду носіїв, рухливості іонів b_+ і b_- . Із зростанням температури питомий опір електролітів зменшується. Це відбувається, по-перше, завдяки збільшенню коефіцієнта дисоціації з ростом температури; по-друге, завдяки зменшенню в'язкості рідин, в результаті чого збільшується рухливість іонів.

Визначення електропровідності біологічних тканин – непросте завдання. При цьому доводиться враховувати цілий ряд специфічних особливостей. Основу характерних лише для живих об'єктів властивостей (збудливість, скорочуваність) становлять ефекти, що мають електричну природу. Тому, опір живих клітин і тканин чутливий до дії електричного струму, особливо чутливі легко збудливі тканини: нерви і м'язи, а це означає, що при вимірюваннях потрібно використовувати досить низькі напруги. Електропровідність окремих ділянок залежить від опору шкіри і підшкірного шару в місцях накладання електродів. Опір шкіри, в свою чергу, визначається віком, товщиною, пітливістю тощо. Біологічні тканини мають досить неоднорідну електропровідність. В них складним чином чергуються ділянки з високою провідністю (біологічні рідини) і низькою (шкіра, кісткова і жирова тканини, мембрани клітин та клітинних органодів). Значення опору окремих тканин і рідин постійному струмові наведені в табл. 3.4.

Таблиця 3.4.

Тканини	ρ [Ом·м]
Спинномозкова рідина	0,55
Кров	1,66
М'язи	≈ 2
Мозкова тканина	≈ 14
Жирова тканина	≈ 33
Шкіра суха	10^5
Кістка без надкисниці	10^7

Вимірювання електропровідності (кондуктометрія) широко використовується при вивченні процесів, які відбуваються в живих клітинах і тканинах під час зміни фізіологічного стану, в результаті дії деяких хімічних речовин, а також за наявності патологічних процесів. За динамікою зміни електричного опору шкіри судять про так звані шкірно-гальванічні реакції, в яких відображаються емоції, втома та інші стани організму. В області рефлексотерапії вимірюють електричний опір для знаходження "активних точок". З року в рік арсенал досліджень електричних властивостей біологічних тканин невпинно зростає.

Особливо цікавою і складною задачею є дослідження електричних властивостей клітини. Не так давно вдалося виміряти електричний опір плазматичних мембран різних клітин. Будемо позначати R_m опір одиниці мембранної поверхні незалежно від її товщини l , яку інколи неможливо виміряти точно (наприклад, при визначенні трансмембранного опору), тобто $R_m = \rho \cdot l$, а C_m – електроємність одиниці мембранної площі. Значення R_m та C_m для різних біооб'єктів наведені в табл. 3.5.

Таблиця 3.5.

Біооб'єкт	R_m [Ом·м ²]	C_m [Ф/м ²]
Плазмолема нейрона п'явки	$1,7 \cdot 10^7$	$1,2 \cdot 10^{-2}$
Мотонейрон золотої рибки	$6 \cdot 10^8$	---
Гладкі м'язові волокна ссавців	10^7	$30 \cdot 10^{-2}$
Тонічне м'язове волокно	$2,9 \cdot 10^6$	$1,6 \cdot 10^{-2}$

Від величин R_m та C_m суттєво залежать основні фізіологічні властивості клітинних структур, такі як збудливість, проникність мембрани тощо.

3.2.3. Електрографія.

Фізичні основи електрокардіографії

Органи, тканини, окремі клітини та їхні складники є електрично активними, тобто процес їхнього функціонування супроводжується появою у навколишньому середовищі змінного електричного поля, характеристики якого (різницю потенціалів, напруженість, зумовлені ним струми тощо) можна зареєструвати. Отриману інформацію використовують з діагностичною метою та з метою вивчення природи електричних явищ у біологічних тканинах. Реєстрацію різниці потенціалів між точками середовища, яке оточує електрично активні тканини, називають електрографією, а графік залежності цієї різниці потенціалів від часу – електрограмою (ЕГ)

Електрографічний метод застосовують для клінічної діагностики серця (електрокардіографія), м'язів (електроміографія), головного мозку (електроенцефалографія), сітківки ока (електроретинографія) тощо. У медичній практиці найбільшого

поширення набуло дослідження електричної активності серця – електрокардіографія.

Досліджуючи поле, що виникає у результаті електричної активності серця, Уоллером (1887) була створена теорія серцевого диполя. У цій теорії серце розглядають як розташований у об'ємному провіднику генератор струму. Експерименти свідчать, що у будь-який фіксований момент часу картина екіпотенціальних поверхонь та силових ліній на поверхні тканин, що оточують серце (рис. 3.9), подібна до картини, створеної полем диполя (див. рис. 3.1), причому збуджена ділянка міокарда має негативний потенціал по відношенню до незбудженої. Силові лінії (їх на рисунку 3.9 позначено c) розпочинаються на позитивному полюсі (на рисунку А), який був названий виток, закінчуються на негативному – його називають стоком (на рисунку В). Пряма, яка проходить через полюси, названа віссю струму. Екіпотенціальні поверхні (їх проєкції на рисунку позначені a та a') перпендикулярні до силових ліній, а поверхня нульового потенціалу є площиною, яка ділить навпіл відрізок, що з'єднує полюси диполя. Теорія Уоллера стала підґрунтям розробленої протягом 1912–1915 рр. концепції голландського вченого В. Ейнтховена – нобелівського лауреата 1924 р., основоположника клінічної електрокардіографії.

У теорії Ейнтховена прийняті такі вихідні положення:

- серце – генератор струму, що розташований в об'ємному провіднику;
- вісь струму поділяє електричне поле на дві симетричні половини;
- тіло людини є однорідним провідником сферичної форми та нескінченно великих розмірів.

Схема еквівалентного генератора струму подана на рис. 3.10, *a*. Тут R_r та R – внутрішній опір генератора та опір зовнішньої ділянки кола відповідно, причому $R_r \gg R$, тому можна вважати, що сила струму в колі не залежить від опору

$$\text{середовища } I = \frac{\mathcal{E}}{R_r + R} \approx \frac{\mathcal{E}}{R_r}.$$

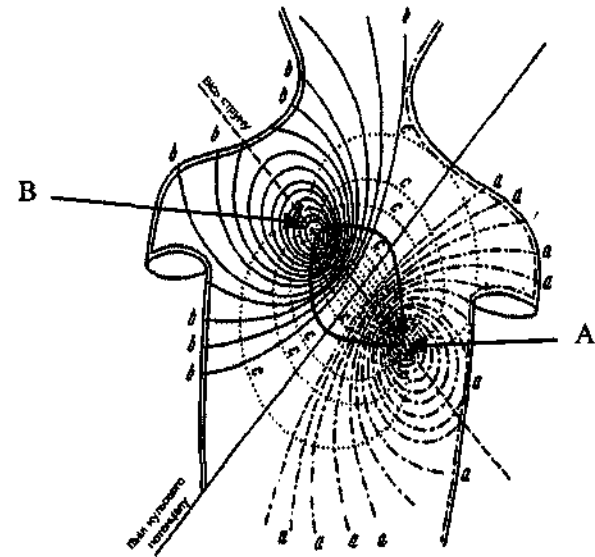


Рис. 3.9

Ейнтховен показав, що електричне поле серця може бути описане за допомогою направленого відрізка – „сердечного вектора” (за сучасною термінологією – інтегрального електричного вектора серця). Такий підхід виправданий і доцільний, оскільки просторова структура поля, створеного генератором струму в однорідному провіднику, визначається положенням полюсів генератора; цей підхід дозволяє доволі просто знаходити характеристики поля.

Таким чином, надалі генератор струму, яким є серце, будемо розглядати як систему, що складається із позитивного (виток) та негативного (стік) полюсів, розташованих на невеликій відстані L один від одного, і характеризувати електричним моментом $D = IL$, де I – сила струму, L – вектор що з'єднує негативний полюс з позитивним. Напрямок вектора D співпадає з напрямком струму у внутрішньому колі генератора (тобто спрямований від «–» до «+»). Ця система подібна до електричного диполя (момент електричного диполя $P=qL$) і за

аналогією її називають струмовим диполем. Однак у струмовому диполі на відміну від електричного йдеться не про розташовані на невеликій відстані один від одного електростатичні заряди q протилежного знаку, а про полюси генератора, між якими існує електричний струм.

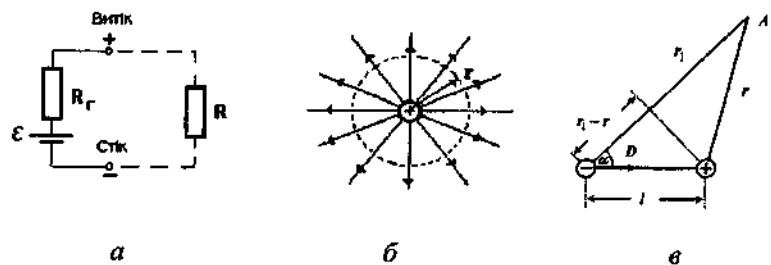


Рис. 3.10

Розглянемо поле, яке створює генератор струму в однорідному об'ємному провіднику. Знайдемо спочатку потенціал φ поля струмового уніполю – окремо взятого одного із полюсів. За законом Ома у диференційній формі

$$j = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\varphi}{dr},$$

де ρ – питомий опір середовища. З іншого боку, за означенням густина струму

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{4\pi r^2},$$

де $S = 4\pi r^2$ – площа поверхні сфери радіуса r , через яку йде струм I (рис. 3.10, б). З наведених рівнянь випливає:

$$d\varphi = -\rho j dr,$$

а

$$\varphi = -\int_{\infty}^r \rho \cdot j \cdot dr = -\frac{I\rho}{4\pi} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

Потенціал електричного поля струмового диполя знайдемо, згідно з принципом суперпозиції, як суму потенціалів двох уніполів

$$\varphi_A = \frac{\rho \cdot I}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{\rho \cdot I (r_1 - r)}{4\pi r r_1}$$

Якщо $L \ll r$ (диполь точковий), то можна вважати, що $r r_1 \approx r^2$, а $r_1 - r \approx L \cos \alpha$ (рис 3.10, в), і потенціал подається через проекцію моменту диполя

$$\varphi_A = \frac{\rho \cdot IL}{4\pi r^2} \cos \alpha = \frac{\rho}{4\pi} \cdot \frac{D \cos \alpha}{r^2}$$

Зауважимо, що потенціал поля, створеного електро-статичним диполем, згідно з (3.16):

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{p \cos \alpha}{r^2}.$$

Концепція Ейнтховена не протирічить мембранній теорії і є її логічним наслідком. Як засвідчили фізичні експерименти, з моделлю тулуба, у яку був поміщений генератор із заздалегідь відомим електричним вектором (Gelernter, Swihart, 1963), властивості створюваного ним поля не зовсім адекватні біологічному, оскільки в живому організмі джерелом струму є множина диполів. У зв'язку з цим у концепцію Ейнтховена були внесені поправки. Так, зокрема міокард розглядають як сукупність генераторів струму і характеризують вектором

$$E = \sum_{i=1}^n D_i,$$

де n – загальна кількість струмових диполів. Вектор E інтегрально відображає розподіл струмів збудження у міокарді і його називають еквівалентним електричним вектором серця (ІЕВС). Потенціал електричного поля, створеного серцем можна подати у вигляді:

$$\varphi_A \approx \frac{\rho}{4\pi} \cdot \frac{E \cos \alpha}{r^2},$$

де r – відстань від центру ІЕВС до даної точки, ρ – питомий опір середовища, α – кут між вектором E і напрямком r . Зауважимо, що вектор E не слід плутати з напруженістю електричного поля.

Застосуємо отриману формулу для знаходження різниці потенціалів між двома рівновіддаленими від E точками A і B (рис. 3.11, а)

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{\rho E}{4\pi^2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

Проведемо через точку O пряму, паралельну до AB . Нехай α – кут, утворений цією прямою і вектором E , тоді

$\alpha_1 = \alpha + \beta/2 + \pi/2$, а $\alpha_2 = \alpha - \beta/2 + \pi/2$. Звідки
 $(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) = -2 \sin[(2\alpha + \pi)/2] \sin(-\beta/2) = 2 \cos \alpha \cdot \sin \beta/2$.

Отже,

$$\Delta\varphi_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{\sin \beta/2}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \cdot E \cdot \cos \alpha.$$

Таким чином, різниця потенціалів у двох рівновіддалених від ІЕВС точках пропорційна проекції вектора E на пряму, що сполучає ці точки. Ця різниця потенціалів тим більша, чим більший питомий опір середовища ρ , чим ближче точки A та B до ІЕВС (чим менше r) і чим більший кут β (чим більша відстань між точками A та B). Увівши коефіцієнт пропорційності, отриманий результат можна записати так:

$$\Delta\varphi_{AB} = kE \cos \alpha = kE_{AB}, \quad (3.39)$$

$$\text{де } k = \frac{\rho}{2\pi^2} \sin \beta/2.$$

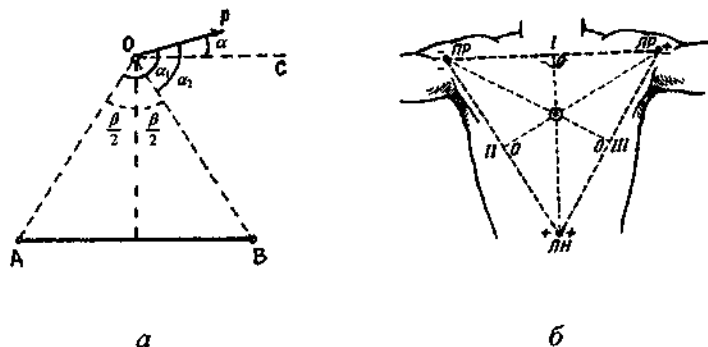
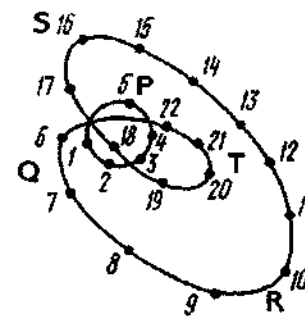
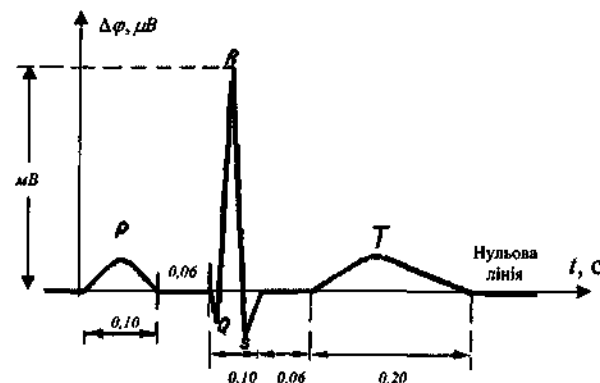


Рис. 3.11



а



б

Рис. 3.12

Ейтховен запропонував знімати різницю потенціалів між вершинами рівностороннього трикутника, у центрі якого знаходиться ІЕВС (рис. 3.11, б). На практиці різницю потенціалів вимірюють між правою і лівою рукою (перше відведення), правою рукою та лівою ногою (друге відведення), лівою рукою та лівою ногою (третє відведення). Оскільки вершини трикутника

рівновіддалені від ІЕВС, то для розрахунку різниці потенціалів можна скористатися формулою (3.39), яка свідчить, що різниця потенціалів у кожному із стандартних відведень прямо пропорційна до проекції вектора E на це відведення:

$$\Delta \phi_1 \sim E_1 = E \cos \alpha_1$$

$$\Delta \phi_{11} \sim E_{11} = E \cos \alpha_2$$

$$\Delta \phi_{111} \sim E_{111} = E \cos \alpha_3$$

Протягом кардіоциклу змінюється локалізація ділянки збудження, викликаючи зміни модуля та напрямку інтегрального електричного вектора серця, а значить і різниці потенціалів у стандартних відведеннях. Графік залежності різниці потенціалів у певному відведенні від часу називають **електрокардіограмою**. За припущенням Ейнтховена, початок ІЕВС нерухомий і знаходиться в атріовентрикулярному вузлі, а кінець описує складну просторову криву, що складається з трьох замкнених петель P, QRS, T (рис. 3.12, *a*). Оскільки різниця потенціалів i -го відведення прямо пропорційна проекції ІЕВС на лінію цього відведення

$$\Delta \phi \sim E_i,$$

то електрокардіограма є кривою з п'ятьма зубцями P, Q, R, S, T , що відповідають петлям та трьома проміжками нульового потенціалу (рис. 3.12, *б*). Важливе значення у діагностиці мають не лише амплітуди зубців, а й часові проміжки між ними та тривалість самих зубців, оскільки ця інформація свідчить про швидкість та послідовність поширення хвилі збудження.

Кожній точці на кардіограмі відповідає миттєве значення проекції ІЕВС на вісь, паралельну до відведення. Значення різниці потенціалів $\Delta \phi$ буде максимальним у тому відведенні, до якого у даний момент часу вектор E паралельний або майже паралельний. Направленість зубця кардіограми залежить від напрямку E : якщо вектор E утворює з віссю гострий кут, то різниця потенціалів $\Delta \phi > 0$ і зубець направлений вгору; якщо ж E утворює з віссю тупий кут, то $\Delta \phi < 0$ і зубець направлений вниз. На рисунку 3.13, *a* подано п'ять різних положень ІЕВС. На перше відведення максимальною буде проекція у положенні 2, мінімальною – у 4. Проекція 5 має такий самий модуль, що і проекція 2, однак є від'ємною. Це означає, що при такому

положенні вектора E різниця потенціалів у першому відведенні є також від'ємною $\Delta \phi < 0$.

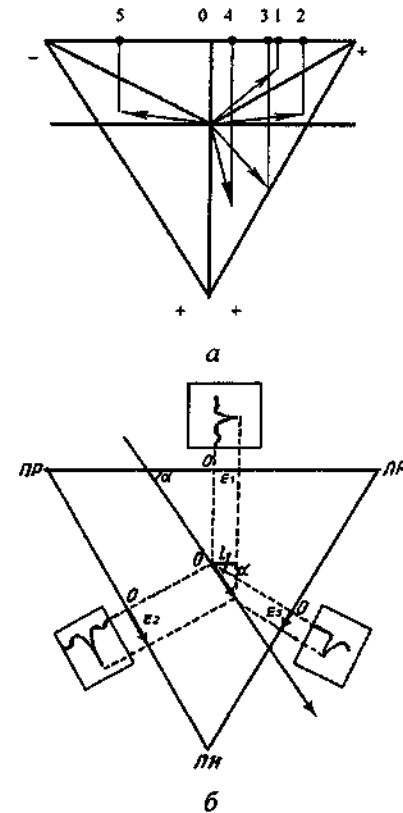


Рис. 3.13

У будь-який фіксований момент часу ІЕВС має одне конкретне значення, але проекції цього вектора на різні відведення будуть різними, тому однойменні зубці у першому, другому та третьому відведеннях мають різну конфігурацію та амплітуду (рис. 3.13, *б*). Неважко переконатися, що згідно із правилом Кірхгофа алгебраїчна сума потенціалів у першому та третьому відведеннях дорівнює різниці потенціалів у другому відведенні в той самий момент часу. Цей висновок, зроблений

Ейнтховеном, дозволяє за значеннями двох проєкцій ІЕВС знайти його третю проєкцію, а також величину та напрямок вектора E .

Модель Ейнтховена не строга, вона має низку недоліків, найсуттєвішими із яких є:

- організм – електрично неоднорідне середовище, його провідність змінюється не лише у просторі, а й у часі;
- кінець ІЕВС описує об'ємну, а не плоску криву;
- початок ІЕВС не є нерухомим;
- тіло людини має скінчені розміри і диполь не можна розглядати як точковий.

Однак, попри вказані недоліки, концепція Ейнтховена має найбільшу кількість прихильників серед фахівців і є основою електрокардіографії та векторкардіографії. Із певними поправками та доповненнями вона успішно використовується у сучасній медицині і дозволяє діагностувати велику кількість захворювань: тахі- та брадікардію, інфаркт міокарда, вроджені вади серця, виявляти дію на організм чинників хімічної природи тощо.

У сучасній кардіографії використовують не три, а 12 стандартних та цілий ряд спеціальних відведень.

Інформацію про просторові зміни ІЕВС отримують методом векторкардіографії. За допомогою електродів, розташованих відповідним чином на тілі пацієнта, на екрані осцилографа отримують проєкції вектора E на фронтальну, сагітальну та горизонтальну площини.

У наукових дослідженнях використовують досконалішу мультипольну модель, у якій враховують, що точки накладання електродів не є нескінченно віддаленими від серця, а біологічні тканини мають різну електропровідність, тобто не є однорідними провідниками.

3.2.4. Дія електричного струму на біологічні тканини

Первинна дія постійного струму на організм пов'язана в основному з двома процесами: поляризацією – виникненням дипольного моменту в тканинах та рухом заряджених частинок – їх появою і зміною концентрації, які призводять до порушення

нормального для клітини розподілу зарядів і, як наслідок, її функцій.

Небезпеку для організму становить не саме електричне поле (напруга чи напруженість), а електричний струм, що протікає. Найкращою провідністю характеризуються нервові волокна; тому навіть слабкий струм є своєрідним ударом для нервової системи. Із зменшенням опору R (при збільшенні вологості, наприклад) сила струму I навіть за малих напруг може різко зростати. Особливо небезпечно, коли струм проходить через життєво важливі органи – серце, мозок. Із збільшенням частоти струму його шкідлива дія зменшується. В таблиці 3.6 наведені порогові значення сили струму побутової частоти та ефекти, що мають місце при його дії на людський організм.

Таблиця 3.6.

Сила струму	Ефект дії
0,1–1 мА	Відсутній
1–1,5 мА	Подразнююча дія. 1 мА – поріг відчутного струму
1,5–2 мА	Втрата чутливості
2–16 мА	Біль, м'язові скорочення
16–20 мА	16 мА – струм, вище якого людина не може звільнитись самостійно від електродів
20–100 мА	Дихальний параліч
0,1 А–3 А	Смертельні шлуночкові фібриляції (необхідна термінова реанімація)
Більше 3 А	Зупинка серця, тяжкі опіки

Процеси, що відбуваються в біологічних тканинах за наявності низькочастотного електромагнітного поля зумовлені в основному іонними струмами провідності.

Ці струми виникають при наявності замкненого електричного кола між біологічними тканинами та джерелом струму. Густина струму визначається за законом Ома:

$$j_{np} = \sigma E = -\sigma \operatorname{grad} \varphi.$$

До методик з використанням дії постійних іонних струмів відносять гальванізацію, електрофорез.

Гальванізація – метод, в основу якого покладено пропускання постійного струму малої величини через тканини ор-

ганізму. Апарати для гальванізації являють собою джерело постійного струму, сила якого регулюється. Основними функціональними блоками апарата є: генератор високої частоти, котрий виробляє безпечну для пацієнта високочастотну (110–440 кГц) напругу, випрямляч, який перетворює високочастотну напругу в постійну, а також система електричного захисту, яка уберігає пацієнта на випадок несправностей у роботі апарата. Робочі параметри процедури: діапазон зміни напруги – (0–60) В; робочий струм – (0–50) мА, гранично допустима густина струму – 0,1 мА/см².

Електрофорез – лікувальна методика, яка базується на сумісній дії постійного струму та лікарського препарату, що вводиться в організм за допомогою цього струму. Електрофорез використовується для введення лікарських речовин, що продисоціювали на іони через шкіру або слизові оболонки під дією електричного поля. Електрофорез дозволяє створювати значні концентрації речовин у поверхневих зонах ураження і, тим самим уникати побічних ефектів перорального та перентерального введення.

Оскільки рухливість – величина, характерна для даного типу іонів, то за її значенням можна встановити вид іонів, або, якщо є суміш іонів, розділити їх в електричному полі. Цю особливість використовують для аналізу сироватки крові, шлункового соку **електрофоретичним методом**. Фракції білків (альбуміни, α -, β -, γ -глобуліни) мають різні значення рухливості, тому їх можна розділити електричним полем, а потім і визначити їхні концентрації.

Сильні електричні імпульси використовуються для подразнення серця після його зупинки. Для цього на декілька мілісекунд через серце пропускають струм силою біля 10 А. Цей струм викликає рівномірну поляризацію (в дійсності деполаризацію) серцевої мембрани і дає можливість потенціалу дії скоординувати скорочення серцевих м'язів. Пристрій, який для цього використовується, називається **дефібрилятор**.

Подразнювальна дія слабких струмів низької частоти ($\nu < 20$ кГц) використовується під час фізіологічних досліджень, а також з лікувальною метою – для відновлення провідності нервових

волокон, скорочувальної здатності м'язів (**електростимуляція, кардіостимуляція**), відновлення кісткової тканини при переломах.

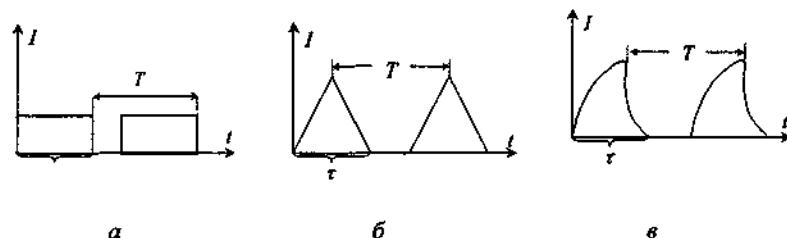


Рис. 3.14

Важливе значення в цьому випадку має не тільки амплітуда й частота, а також і форма імпульсу, конфігурація його переднього та заднього фронтів. Вдалий підбір цих параметрів дозволяє отримати електричні імпульси, які адекватні до певних фізіологічних подразників. Імпульси прямокутної форми (рис. 3.14, а) застосовуються, наприклад, при лікуванні електросном, для кардіостимуляції; при електрогімнастиці використовують імпульси трикутної та експоненційної форми (рис. 3.14, б, в).

При визначенні конфігурації імпульсу користуються законом **Дюбуа–Реймона**, згідно з яким подразнення прямо пропорційне до швидкості зміни сили струму dl/dt .

Відповідно до закону Дюбуа–Реймона реакції збудливих тканин залежать від швидкості зміни сили струму. Це означає, що порогове значення сили струму, який здатен викликати збудження залежить від часу його дії. Чим більша амплітуда сили струму, тим при меншій його тривалості виникатиме збудження. Цей закон графічно відображається кривою „амплітудна сила струму – тривалість імпульсу” $I(T)$, яка є сукупністю точок, утворених правими верхніми кутами порогових електричних імпульсів прямокутної форми, що викликають збудження (рис. 3.15). Ця крива може бути описана рівнянням Вейса–Лапіка

$$I = \frac{Q}{T} + R,$$

де I та T – амплітуда і тривалість порогового електричного імпульсу, який викликає збудження, Q – сумарний заряд, що

переноситься електричним імпульсом, R – реобаза (порогова амплітуда сили струму імпульсу, який викликає реакцію збудження незалежно від тривалості його дії). При дії електричними імпульсами амплітудою в одну реобазу реакція збудження не залежить від тривалості імпульсу (рис. 3.15). Мінімальну тривалість такого імпульсу називають корисним часом t_k . Значення t_k залежить від виду біологічної тканини і від її функціонального стану.

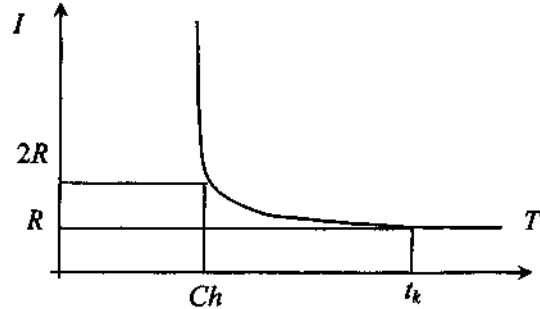


Рис. 3.15

Так, наприклад, скелетні м'язи здорової людини відповідають скороченням на імпульси тривалістю 10^{-4} – 10^{-3} с, а при патологічних змінах реакція спостерігається при тривалості імпульсів 10^{-3} – 10^{-2} с.

Крива „амплітудна сила струму – тривалість імпульсу” $I(T)$ має максимальну швидкість зміни (є найкрутішою) в точці, яка відповідає струму в дві реобаз. Тривалість порогового прямокутного імпульсу величиною $2R$ називається хронаксією (Ch). Хронаксія і реобаза характеризують збудливість тканин і свідчать про їх функціональний стан.

Дію на біологічні тканини імпульсними струмами використовують і з діагностичною метою, зокрема для оцінки збудливості і функціональної рухливості (лабільності) м'язів.

Пропускання електричного струму через біологічні тканини супроводжується нагріванням. Кількість теплоти, яка при цьому виділяється, може бути знайдена за *законом Джоуля–Ленца*

$$Q = I^2 R t. \quad (3.40)$$

Обчислимо теплову потужність q , яка виділяється в одиниці об'єму: $q = Q/Vt$. Скориставшись (3.30), (3.33) і врахувавши, що $V = SI$, матимемо:

$$q = j^2 \rho.$$

Остання рівність з урахуванням закону Ома в диференційній формі (3.34) може бути записана

$$q = \sigma E^2 = jE. \quad (3.41)$$

Формули (3.40) і (3.41) виражають *закон Джоуля–Ленца в диференційній формі*.

Для лікувального прогрівання через небезпеку не використовують низькочастотні та постійні струми. З цієї метою використовують височастотні струми та електромагнітні поля (див. розділ 3.5.5).

3.3. МАГНІТНЕ ПОЛЕ

3.3.1. Магнітне поле у вакуумі і його характеристики

Джерелом макроскопічного магнітного поля є намагнічені тіла, провідники зі струмом і рухомі електричні заряди. Природа цих джерел єдина: *магнітне поле виникає в результаті руху заряджених мікрочастинок* (електронів, протонів, іонів). Магнітне поле виявляють по дії на рухомі електричні заряди (провідник чи рамка із струмом) або постійні магніти (магнітна стрілка).

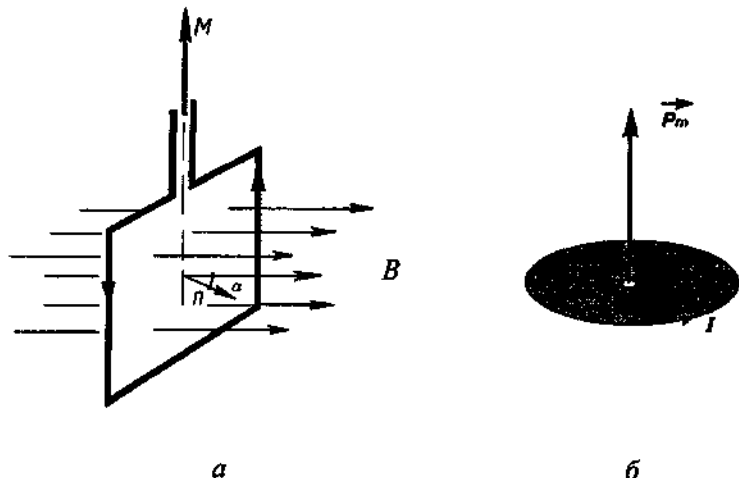


Рис. 3.16

Магнітне поле характеризується вектором магнітної індукції B . *Магнітна індукція* дорівнює відношенню максимального обертового моменту, який діє на пробну (нескінченно малих розмірів) рамку зі струмом у даній точці до магнітного моменту рамки:

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m} = \frac{M_{\max}}{IS}. \quad (3.42)$$

Дослід показує, що на пробну рамку зі струмом I діє обертовий момент, величина якого залежить від орієнтації рамки: $M = M_{\max} \sin \alpha$ (рис. 3.16, а), де α – кут між \vec{B} та нормаллю до рамки \vec{n} . Як впливає з формули (3.42), максимальне значення M_{\max} залежить від магнітного поля, в якому знаходиться контур, і характеристик самого контура – сили струму I в ньому і площі S , охопленої контуром.

Величину $p_m = IS$ називають модулем *магнітного моменту* контура. Вектор магнітного моменту p_m напрямлений перпендикулярно до площини контура і зв'язаний з напрямком сили струму правилом правого гвинта (правило свердлика) (рис. 3.16, б). Магнітні моменти є характеристикою не лише контурів зі струмом, а й багатьох елементарних частинок (протони, електрони тощо), за допомогою p_m визначається їхня поведінка в магнітному полі.

Напрямок вектора B збігається з напрямком p_m , якщо рамка

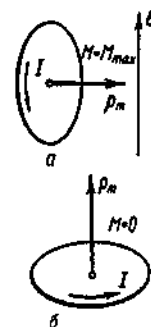


Рис. 3.17

знаходиться в положенні стійкої рівноваги. На рис. 3.17 показано положення рамки зі струмом, яке відповідає максимальному значенню обертового моменту (а) і стану стійкої рівноваги (б). У положенні (б) обертовий момент $M = 0$. Магнітна індукція вимірюється в *Теслах (Тл)*: $1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н}/(\text{А}\cdot\text{м})$.

Кількісною характеристикою магнітного поля є також *напруженість магнітного поля H* . Напруженість магнітного поля (на відміну від B) не залежить від магнітних властивостей середовища. У вакуумі вектори H і B збігаються

за напрямком і зв'язані між собою співвідношенням:

$$B = \mu_0 H, \quad (3.43)$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн}/\text{м}$ – магнітна стала. Розмірність напруженості магнітного поля в системі СІ: $[H] = \text{А}/\text{м}$.

Графічно магнітні поля зображують за допомогою *силових ліній*. Це лінії, дотичні до яких в кожній точці збігаються з напрямком B . Магнітні силові лінії прийнято проводити з такою густиною, щоб кількість ліній, які перетинають одиничну

перпендикулярну до B площадку, чисельно дорівнювала б значенню індукції магнітного поля в місці розміщення площадки. Лінії магнітної індукції замкнені. Подібні поля називають *вихровими*.

Потоком вектора магнітної індукції (*магнітним потоком*) $d\Phi$ через елементарну площадку dS незамкненої поверхні S називають величину

$$d\Phi = B dS \cos \alpha, \quad \Phi = \int_S B_n dS, \quad (3.44)$$

де α – кут між нормаллю до площадки та вектором B . За одиницю магнітного потоку в системі СІ приймається 1 Вебер (Bb) – магнітний потік, що створюється магнітним полем з індукцією 1 Тл, який пронизує плоску поверхню площею 1 м², розташовану перпендикулярно до вектора B .

3.3.2. Закон Біо–Савара–Лапласа

Напруженість магнітного поля H , створеного постійним

струмом, можна обчислити, використовуючи закон, відкритий експериментально французькими фізиками Біо і Саваром у 1820 р. і сформульований в загальному вигляді Лапласом.

Виділимо в провіднику зі струмом достатньо малу ділянку dl ,

яку можна розглядати як вектор, направлений в той же бік, що й струм I . Добуток $I dl$ називають *елементом струму*. Проведемо з елемента струму $I dl$ радіус-вектор r в досліджувану точку A (рис. 3.18). Тоді величина напруженості магнітного поля в точці A , створеного даним елементом струму, дорівнює:

$$dH = k \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}, \quad (3.45)$$

де α – кут між векторами dl і r , коефіцієнт k залежить від вибору системи одиниць. В системі СІ: $k = 1/4\pi$. Напрямок dH визначається правилом свердлика: якщо поступальний рух

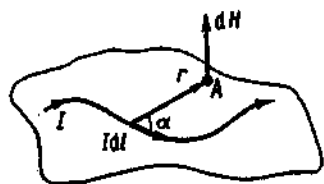


Рис. 3.18

свердлика збігається з напрямком dl , то напрямок dH збігається з напрямком обертання рукоятки. Повна напруженість H магнітного поля, створеного в точці A провідником зі струмом, дорівнює векторній сумі полів, створених всіма елементами струму $I dl$, що складають даний провідник. Якщо всі dH мають однаковий напрямок, то сумарна напруженість магнітного поля знаходиться як інтеграл:

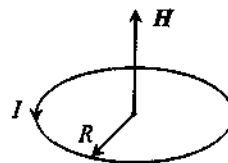
$$H = \frac{1}{4\pi} \int \frac{I \sin \alpha}{r^2} dl. \quad (3.46)$$

Знайдемо напруженість магнітного поля у вакуумі для деяких простих контурів зі струмом.

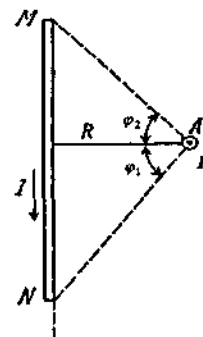
Розрахуємо напруженість магнітного поля в *центрі колового струму*. Коловим називають струм, що протікає по провіднику у формі кола (рис. 3.19, а). У цьому випадку всі елементи dl провідника перпендикулярні до радіус-вектора: $\sin \alpha = 1$. Відстань від усіх елементів провідника до центра кола однакова і дорівнює радіусу кола R , $dl = R d\varphi$. Тому інтегрування в (3.46) дає:

$$H = \frac{I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} R d\varphi = \frac{2\pi R I}{4\pi R^2} = \frac{I}{2R}. \quad (3.47)$$

Напрямок вектора H можна знайти за правилом свердлика і він буде таким, як показано на рис. 3.18 (вектор H перпендикулярний до площини провідника).



а



б

Рис. 3.19

Магнітне поле *прямолінійного провідника* зі струмом (рис. 3.19, б) обчислюється за формулою:

$$H = \frac{I}{4\pi R} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1),$$

де R – відстань від провідника зі струмом до даної точки,
 I – сила струму в провіднику.

Якщо провідник *нескінченно довгий*, то $\varphi_1 \rightarrow -\pi/2$, а $\varphi_2 \rightarrow \pi/2$, і

$$H = \frac{I}{2\pi R}. \quad (3.48)$$

Магнітне поле на *осі соленоїда* визначається за формулою:

$$H = nI, \quad (3.49)$$

де n – число витків, які припадають на одиницю довжини соленоїда. Величина поля на осі не залежить від радіуса соленоїда R , якщо його довжина $L \gg R$.

3.3.3. Дія магнітного поля на елемент провідника зі струмом і рухомий електричний заряд. Сила Ампера і сила Лоренца

Силова дія магнітного поля на елемент провідника зі струмом визначається відповідно до емпіричного закону Ампера (1820 р.):

$$dF_A = IBdl \sin \alpha, \quad (3.50)$$

де α – кут, утворений векторами dl і B . Сила Ампера F_A діє на провідник зі струмом в магнітному полі. Вона є результатом дії магнітного поля на рухомі електричні заряди, котрі створюють даний електричний струм I . Сила f_n , яка діє на окремий рухомий заряд, називається *силою Лоренца* і може бути визначена із співвідношення:

$$f_n = \frac{dF_A}{N} = \frac{IBds \sin \alpha}{N},$$

де $N = nV = ndlS$ – загальна кількість вільних носіїв заряду в провіднику. Враховуючи, що $I = jS$, а $j = q_0nv$, отримаємо вираз

для сили Лоренца, що діє з боку магнітного поля на окремий електричний заряд q_0 , який рухається зі швидкістю v :

$$f_n = q_0vB \sin \alpha, \quad (3.51)$$

де α – кут між векторами v і B . Напрямок сили Лоренца визначається, як і напрямок сили Ампера, за правилом свердлика і залежить від знаку заряду (рис. 3.20). Оскільки сила Лоренца перпендикулярна до площини, в якій лежать вектори v і B , то ця сила надає частинці доцентрового прискорення. Припустимо, що заряджена частинка q_0 влітає з швидкістю v в однорідне магнітне поле B перпендикулярно до силових ліній, тоді, відповідно до другого закону Ньютона і з врахуванням виразу для доцентрової сили, маємо

$$mv^2/R = q_0vB. \quad (3.52)$$

Звідси $R = \frac{mv}{q_0B}$ – радіус кола, по якому рухається частинка.

Період обертання

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{q_0B}. \quad (3.53)$$

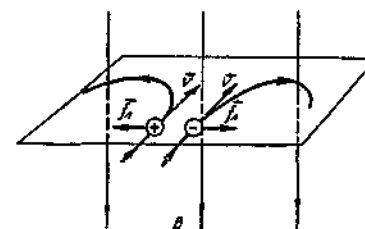


Рис. 3.20

Період обертання не залежить від швидкості (справедливе для швидкостей $v < c$), але залежить від величини магнітної індукції B та *нитомого заряду частинки* q_0/m . Ця особливість має широке практичне використання. У багатьох системах (осцилограф, телевізор, електронний мікроскоп, прискорювач) управління електронами чи іншими зарядженими частинками здійснюють, діючи на них електричними і магнітними полями. Результуюча сила в цьому випадку дорівнює

$$F = F_e + F_m = qE + q[v \times B], \quad (3.54)$$

де $[v \times B]$ – так званий векторний добуток v та B . Це вектор, модуль якого дорівнює $vB \sin \alpha$, де α – кут між цими векторами, а напрям визначається за правилом свердлика.

Сила Лоренца є причиною виникнення ефекту Холла. **Ефектом Холла** називають появу поперечної різниці потенціалів, що виникає у провіднику зі струмом, внесеному у магнітне поле, вектор індукції якого перпендикулярний до напрямку струму. Розглянемо деякі застосування описаних вище явищ.

Мас-спектрографія. Для визначення питомого заряду і маси іонів використовують сумісну дію електричного і магнітного полів. Прилади, призначені для точних вимірювань питомих зарядів (а значить, і мас) ізотопів хімічних елементів, а також їхнього вмісту в складних речовинах, називають мас-спектрографами і мас-спектрометрами. Атоми чи молекули досліджуваної речовини попередньо іонізуються, а потім за допомогою електричного та магнітного полів сортуються та реєструються окремо залежно від їхнього питомого заряду q/m .

Електромагнітні вимірювачі швидкості крові. Для вимірювання швидкості крові в судинах системи кровообігу розроблено чимало методів. Один із них базується на дії магнітного поля на рухомі заряди. Кров містить значну кількість електричних зарядів: концентрація іонів $Na^+ \sim 145$ ммоль/л, $Cl^- \sim 125$ ммоль/л.

Якщо артерію діаметром d помістити між полюсами магніту, то на одновалентні іони діятиме сила Лоренца $f_n = e v B$. Під її впливом іони різних знаків рухатимуться до протилежних стінок артерії і створять вздовж вертикалі різницю потенціалів U , тобто електричне поле з напруженістю $E = U/d$ (ефект Холла). Концентрація зарядів на протилежних стінках артерії зростатиме, поки сила $F_{en} = eE$, створюваного ними поля, не компенсує силу Лоренца. З рівності $F_n = F_{en}$ можна знайти швидкість руху іонів, а значить і крові:

$$v = \frac{U}{dB}. \quad (3.55)$$

Отже, швидкість руху крові пропорційна напрузі (різниці потенціалів при ефекті Холла), яка виникає впоперек артерії, якщо внести її в магнітне поле.

3.3.4. Магнітні властивості речовини

Згідно з гіпотезою Ампера, здатність речовини намагнічуватися, тобто створювати власне магнітне поле, зумовлена наявністю в атомах і молекулах власних магнітних моментів: орбітальних магнітних моментів електронів p_{mo} , спінових магнітних моментів електронів p_{ms} і ядерних магнітних моментів p_{mj} .

Орбітальний магнітний момент p_{mo} зумовлений рухом електронів навколо ядра. Для спрощення розглянемо рух одного електрона по коловій орбіті радіуса r (рис. 3.21). Такий рух аналогічний коловому струмові з силою

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e v}{2\pi r}. \quad (3.56)$$

Магнітний момент такого струму

$$p_{mo} = IS = I\pi r^2 = e v r / 2. \quad (3.57)$$

Напрямок вектора p_{mo} визначається за правилом свердлика. Здебільшого p_{mo} виражають через момент кількості руху (механічний момент обертання) $L_{orb} = m_e v r$. Відношення p_{mo}/L_{orb} називають

орбітальним гіромагнітним відношенням g_o , воно однакове для всіх електронів і дорівнює

$$g_o = p_{mo}/L_{orb} = -|e|/2m_e. \quad (3.58)$$

Знак “-” вказує на те, що вектори p_{mo} і L_{orb} мають протилежний напрямок (напрямок L_{orb} також визначається правилом свердлика, але $e < 0$).

Електрон володіє також власним моментом кількості руху L_s – спіном (від англ. spin – крутитись, обертатись), а значить і спіновим магнітним моментом p_{ms} . Наявність у електронів спінових моментів спочатку пов’язували з обертанням навколо власної осі (концепція Дж. Уленбека і С. Гаудсмита). Однак ця

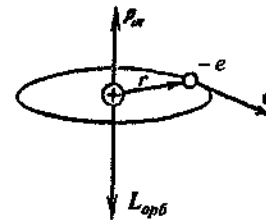


Рис. 3.21

ідея була одразу ж спростована Н. Бором, який довів, що для отримання експериментальних значень енергетичного розщеплення ліній в дублеті натрію (саме це й було підставою для введення поняття “спін”) треба, щоб електронна хмара на її периферії оберталася б з швидкістю, що перевищує швидкість світла. Зрозуміло, що це є “фізичний нонсенс”. Сучасна фізика вважає, що спін така ж невід’ємна характеристика електрона, як заряд та маса. Спін мають і інші елементарні частинки (протон, нейтрон, нейтрино тощо). *Спінний магнітний момент* електрона квантується – він може орієнтуватися в зовнішньому магнітному полі так, що його проекція на напрямок напруженості магнітного поля може набувати лише два значення $\pm \frac{\hbar |e|}{2m_e}$.

Величина $p_{ms} = \frac{\hbar |e|}{2m_e} = \mu_B = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ називається атомним

магнетоном Бора і являє собою найменший магнітний момент частинки. *Спінове гіромагнітне відношення* дорівнює

$$g_s = \frac{p_{ms}}{L_s} = -\frac{|e|}{m_e} \quad (3.59)$$

і є вдвічі більшим, ніж аналогічне відношення орбітальних моментів.

Ядро атома також має магнітний момент p_{ma} , величина якого залежить від структури ядра. Одиницею вимірювання магнітних моментів ядер є ядерний магнетон $\mu_{nd} = \frac{\hbar |e|}{2m_p}$. Оскільки відно-

шення $m_p/m_e \approx 1840$, магнітний момент ядра незначний і мало впливає на загальний магнітний момент атома. Таким чином, можна вважати, що *магнітний момент атома* p_{ma} дорівнює

$$p_{ma} = \sum_{i=1}^z (p_{m_{el}})_i, \quad (3.60)$$

де z – кількість електронів в атомі, а $p_{m_{el}} = p_{mo} + p_{ms}$ – *повний магнітний момент електрона*. У спарених електронів магнітний момент скомпенсований ($p_{ma} = 0$). Заповнені електронні оболонки в атомах також не володіють магнітним моментом.

При внесенні в магнітне поле будь-якої речовини виникає часткова або повна орієнтація магнітних моментів атомів (молекул), і результуючий магнітний момент тіла стає відмінним від нуля – тіло намагнічується. При цьому тіло створює власне магнітне поле.

Для кількісної оцінки ступеня намагнічення користуються *вектором намагніченості* J , який чисельно дорівнює магнітному моменту одиниці об’єму:

$$J = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^z (p_{ma})_i, \quad (3.61)$$

де n – кількість частинок в об’ємі V , $(p_{ma})_i$ – магнітний момент i -частинки (атома, молекули). Одиниця намагніченості в системі СІ є А/м. Експериментально встановлено, що для більшості речовин:

$$J = \chi_m H, \quad (3.62)$$

де H – вектор напруженості зовнішнього магнітного поля, χ_m – *магнітна сприйнятливість* – безрозмірна величина, яка чисельно дорівнює магнітному моменту одиниці об’єму речовини в магнітному полі одиничної напруженості. Індукція B магнітного поля в речовині, яка внесена в зовнішнє магнітне поле з напруженістю H , визначається векторною сумою

$$B = \mu_0 H + \mu_0 \chi_m H. \quad (3.63)$$

Перший доданок є магнітна індукція зовнішнього магнітного поля у вакуумі, другий – характеризує внутрішнє магнітне поле, що виникає в речовині. Остання рівність може бути записана у вигляді

$$B = \mu_0 (1 + \chi_m) H = \mu_0 \mu H = \mu B_0, \quad (3.64)$$

де $\mu = 1 + \chi_m$ – *відносна магнітна проникність* речовини. Вона показує, у скільки разів індукція магнітного поля в речовині більша (чи менша) за індукцію магнітного поля в вакуумі. Величини μ та χ_m характеризують здатність речовин намагнічуватися і залежать від природи речовини та її будови. За магнітними властивостями речовини поділяються на три основних класи: парамагнетики, діамагнетики і феромагнетики.

1. **Парамагнетик** – речовини, атоми (молекули) яких за відсутності магнітного поля мають відмінний від нуля магнітний момент $p_a \neq 0$. Це можливо у випадку, коли атом (молекула) має неспарені електрони. До парамагнетиків належать Cr, Mn, Sn, Al, Pt, Na, K, O, повітря, окис азоту, луги і лужно-земельні елементи. Дія зовнішнього магнітного поля на такі речовини приводить до появи переважної орієнтації векторів p_{ms} в напрямку поля, які за відсутності поля були орієнтовані хаотично (рис. 3.22, а, б).

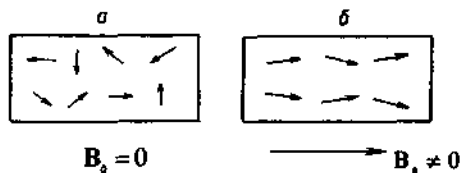


Рис. 3.22

Тепловий рух дезорієнтує впорядковані в полі атомні магнітні моменти, тому величина намагнічення залежить від величини B_0 і від температури. Чим вища температура, тим інтенсивніший рух атомів і тим слабкіше їх орієнтування зовнішнім магнітним полем, тобто тим менше результуюче намагнічення. Цим пояснюється зменшення магнітної сприйнятливості парамагнетиків з ростом температури. Парамагнетик намагнічується в напрямі зовнішнього магнітного поля і тим самим підсилюють його. Магнітна сприйнятливості парамагнетиків $\chi_m > 0$, але за величиною вона незначна ($\chi_m \ll 1$). Таким чином, відносна магнітна сприйнятливості $\mu \geq 1$.

2. **Діамагнетик** – речовини, в яких магнітна сприйнятливості $\chi_m < 0$. Діамагнетизм пов'язаний з тенденцією електричних зарядів частково екранувати внутрішню частину тіла від зовнішнього магнітного поля аналогічно тому, як в діелектриках електричні заряди частково екранують зовнішнє електричне поле. Оскільки величина χ_m у діамагнетиків, як і у парамагнетиків незначна ($|\chi| \ll 1$), то відносна магнітна проникність діамагнетиків μ трохи менша одиниці. Магнітний момент атома (молекули) такої речовини дорівнює нулю $p_{ms} = 0$. Це має місце у випадку, коли атома (молекули) містять лише спарені

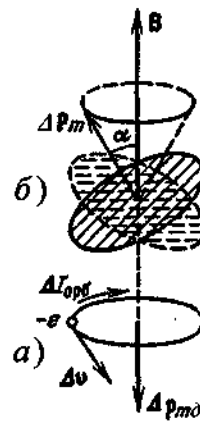


Рис. 3.23

електрони. Орбітальні і спінові магнітні моменти електронів у таких атомах повністю скомпенсовані. Під дією зовнішнього поля з індукцією B електрони в атомі змінюють частоту обертання навколо ядра на величину $\omega_L = |e|B/2m_e$, яку називають частотою ларморової прецесії (рис. 3.23). Частота ω_L не залежить ні від кута нахилу орбіти до напрямку зовнішнього магнітного поля, ні від радіуса орбіти чи швидкості електрона, тобто однакова для всіх електронів, що входять до складу атома. В результаті такого прецесійного руху з'являється деякий додатковий індукційний

мікרוструм ΔL_{orb} , який характеризується магнітним моментом Δp_{ms} . Цей магнітний момент (згідно з правилом Ленца) направлений протилежно до вектора індукції зовнішнього магнітного поля B_0 , тому в такій речовині $B < B_0$ (рис. 3.23).

Діамагнітний ефект спостерігається у всіх без винятку речовинах, але в парамагнетиках переважає більш сильний парамагнітний ефект. Діамагнетизм переважає лише тоді, коли магнітні моменти молекул рівні або близькі до нуля. До діамагнетиків належать інертні гази, Bi, Ag, P, Se, C, білки, вуглеводи, H_2O , Au, Cu, Zn.

3. **Феромагнетик** (залізо, кобальт, нікель та деякі інші матеріали) – це такі речовини, в яких внутрішнє (власне) магнітне поле може бути в багато разів (у сотні й тисячі) сильніше, ніж зовнішнє поле, яке зумовило намагнічення. Експериментально встановлено, що в намагнічуванні феромагнетиків основну роль відіграють спінові магнітні моменти електронів p_{ms} . При температурах, нижчих від температури фазового переходу, що відбувається в точці Кюрі (ця назва ввійшла в наукову термінологію на честь французького вченого П. Кюрі, який дослідив цей перехід), у феромагнетикі існують області спонтанного намагнічення – домени (їхні лінійні розміри 10^{-2} – 10^{-3} см). У межах окремих доменів вектори p_{ms} упорядковані

і зорієнтовані в якомусь одному напрямку, утворюючи результуючий магнітний момент домену. За відсутності магнітного поля в межах всього об'єму домені орієнтовані хаотично (рис. 3.24, б). Зовнішнє магнітне поле орієнтує у феромагнетик магнітні моменти не окремих атомів, як у парамагнетиків, а доменів (рис. 3.24, а).

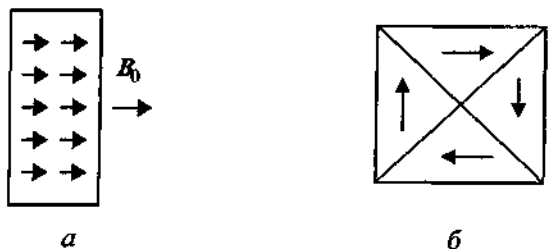


Рис. 3.24

Відносна магнітна проникність μ для феромагнетиків не є сталою величиною ($\mu \neq \text{const}$), вона залежить від ряду факторів, насамперед від B_0 . Максимальному значенню μ відповідає стан насичення – магнітні моменти всіх доменів зорієнтовані паралельно зовнішньому магнітному полю B_0 . Феромагнетики зберігають стан намагнічення після того, як перестав діяти зовнішнє магнітне поле (явище гістерезису). Максимальні значення μ досягають у них десятків і сотень тисяч.

Феромагнетики у медицині використовують для видалення металевих часток з поранень, при цьому один з полюсів електромагніта виконують у вигляді спиці. Практикують зшивання кишечника за допомогою магнітних кілець. Всередину кільця з силіконової резини, яка добре стерилізується, вводяться сегменти з феромагнітного сплаву (самарію та кобальту), які після внесення у сильне магнітне поле стають магнітами. Їх використовують для з'єднання кінців кишки під час видалення частини кишечника. Протягом 7–10 днів шов зростається, а кільця разом з відмерлими тканинами виводяться назовні природним шляхом.

3.3.5. Магнітні властивості тканин організму, фізичні основи магнітобіології

Розділ біофізики, який вивчає вплив магнітного поля на живі організми, називається *магнітобіологією*.

На сьогодні є чимало експериментальних фактів, які свідчать про вплив магнітних полів (сильних чи слабких) на біологічні об'єкти. Це стосується, наприклад, здатності багатьох тварин і рослин орієнтуватись у магнітних полях, впливу магнітних полів на властивості крові, впливу різких змін напруженості магнітного поля Землі (магнітні бурі) на самопочуття людей і поведінку тварин тощо. За допомогою магнітних полів вдається впливати на хід деяких біологічних процесів і хімічних реакцій, наприклад, на інтенсивність водного обміну, активність багатьох ферментів, швидкість проростання насіння.

У природних умовах всі процеси протікають в магнітному полі Землі, яке поблизу поверхні має на широті Києва горизонтальну $B_{гор} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$ і вертикальну $B_{верт} \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$ складові. Тому в біологічних системах відбуваються зміни не лише за наявності додаткових магнітних полів, а і при зміні магнітного поля Землі. Вважають, що універсальність дії магнітного поля на все живе обумовлена його впливом на властивості води.

Магнітні властивості біологічних тканин характеризуються досить низькою величиною магнітної проникності ($\mu \approx 1$), оскільки основні хімічні компоненти біосередовищ (білки, вуглеводи, ліпіди, вода) належать до діаманетиків. В невеликій кількості в живих організмах містяться парамагнітні частинки (вільні радикали, ферменти, іони). У надниркових залозах людини виявлені ферити – складні окисли, що містять залізо і яким притаманні феромагнітні та напівпровідникові або діелектричні властивості; їх функції поки що повністю не встановлені. Подібні феромагнітні включення є у бджіл, метеликів, дельфінів. Вони забезпечують просторову орієнтацію цих тварин.

Магнітні властивості тіл характеризуються індуктивністю L , величина якої залежить не лише від магнітної проникності μ , а й від геометричної форми і розмірів. Навіть діаманетики можуть

мати значну індуктивність, якщо вони мають форму котушки і по них тече електричний струм. Тоді

$$L = \mu_0 n^2 V, \quad (3.65)$$

де n – кількість витків, що припадають на одиницю довжини ($n = N/l$), V – об'єм котушки.

Коулом і Бейкером (1941 р.) була визначена індуктивність плазматичної мембрани гігантського аксона кальмара. Виявилось, що 1 см^2 такої мембрани завтовшки $l \sim 10 \text{ нм}$ має досить високу індуктивність $L \approx 0,1 \text{ Гн}$.

Біоструми, що виникають в організмі, є джерелом слабких магнітних полів, які інколи можна зареєструвати. Так, наприклад, існує діагностичний метод *магніто-кардіографія* – реєстрація зміни магнітного поля серця протягом кардіоциклу. Перевагою при застосуванні такої методики є відсутність електричних контактів, що створює предумови для дистанційного діагностування.

В основі дії магнітного поля на біологічні об'єкти лежать первинні фізичні процеси, до яких, насамперед, слід віднести: а) зміну концентрації молекул в неоднорідному полі; б) дію сили Лоренца на іони, які рухаються разом з біологічною рідиною; в) ефект Холла, який виникає в магнітному полі під час поширення електричного імпульсу; г) різні кінетичні процеси (наприклад, поперечний та поздовжній ефекти Етінгсгаузена, пов'язані з виникненням градієнта температури при наявності електричного струму та магнітного поля).

При внесенні біологічних тканин в постійне магнітне поле відбувається орієнтаційне зміщення надмолекулярних рідкокристалічних структур, що входить до їх складу. Внаслідок цього формується власне магнітне поле, яке відповідно до правила Ленца послаблює зовнішнє. Цей діаманітний ефект найбільшою мірою проявляється в фосфолідних компонентах біологічних мембран.

При розгляді взаємодії змінного магнітного поля з біологічними тканинами більшість авторів вважає основним діючим фактором вихрове електричне поле, що виникає внаслідок явища електромагнітної індукції. Напруженість індукovanого електричного поля при методиках, які використовуються у фізіотерапії може сягати 50 В/м . Електричні поля такої

напруженості суттєво впливають на поляризацію мембран, активуючи біофізичні та біохімічні процеси в різних тканинах організму. На результуючу картину індукovanого електричного поля впливають також потенціальні електричні поля, які виникають на межі середовищ з високою та низькою електропровідністю завдяки дії вихрового поля на заряджені частинки.

Вказані особливості приводять до змін рідко-кристалічного стану фосфолідних компонентів біологічних мембран, зниження мембранних потенціалів. Таким чином, змінні магнітні поля здатні модулювати фізико-хімічні властивості, а також метаболічну та ферментативну активність клітин та тканин живих організмів. З підвищенням частоти магнітного поля вихрові струми ефективно поглинаються електропровідними тканинами і здатні викликати значний тепловий ефект.

Важливо зауважити, що магнітобіологія перебуває в стані свого становлення і фізична природа дії магнітного поля на біологічні об'єкти є ще не до кінця вивченою.

3.4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ

Електромагнітні коливання – це процеси, в яких такі величини, як заряд, струм, напруженості електричного та магнітного полів тощо, змінюються періодично. Електромагнітні коливання мають дуже широкий спектр практичного використання: майже всі області електротехніки, оптика, радіотехніка. Окремим випадком є електричні коливання.

3.4.1. Рівняння електричних коливань

Розглянемо коло, до якого входить джерело струму з електрорушійною силою \mathcal{E} (в загальному випадку – змінною), індуктивність L , ємність C та активний опір R , що з'єднані послідовно (рис. 3.25). Запишемо вираз, який пов'язує спад напруги на опорі $U_R = IR$, напругу на конденсаторі $U_C = q/C$, напругу на індуктивності $U_L = L di/dt$ та е.р.с. джерела \mathcal{E} :

$$U_R + U_C + U_L = \mathcal{E}$$

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = \mathcal{E}.$$

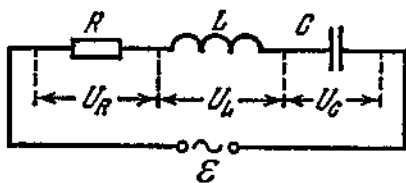


Рис. 3.25

Оскільки за означенням $I = dq/dt$, після диференціювання за часом, одержимо **диференціальне рівняння електричних коливань**:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}. \quad (3.66)$$

Це рівняння виражає залежність сили струму від часу і є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами. Аналогічне рівняння можна отримати і для інших електричних величин (наприклад, заряду на конденсаторі q).

Вільні гармонічні коливання. Якщо джерело має постійну в часі ЕРС, тобто $d\mathcal{E}/dt = 0$, то рівняння (3.66) стає однорідним. За аналогією з механічними коливаннями це є рівняння згасаючих коливань

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \quad (3.67)$$

За відсутності опору ($R = 0$) рівняння (3.67) перетворюється в рівняння вільних гармонічних коливань

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C} = 0.$$

Розділивши ліву частину цього рівняння на L , матимемо:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \omega_0^2 I = 0, \quad (3.68)$$

де ω_0 – власна частота вільних електричних коливань

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3.69)$$

Рівняння (3.68) має своїм розв'язком гармонічну функцію

$$I = I_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (3.70)$$

Вираз, котрий стоїть під знаком синуса (або косинуса), називають **фазою коливань** φ . У даному випадку $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$, де φ_0 – початкова фаза. Мінімальний проміжок часу, через який фаза повторює своє значення, називається **періодом коливань**. Період власних коливань

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (3.71)$$

Ця формула носить назву **формули Томсона**. Із зменшенням індуктивності котушки L та ємності конденсатора C зменшується період коливань, а значить зростає їхня частота.

3.4.2. Вимушені електричні коливання, змінний струм

Розглянемо тепер електричні коливання, які виникають при наявності в колі генератора ЕРС, яка періодично змінюється.

Коло з активним (омічним) опором. Спочатку розглянемо частинний випадок, коли генератор змінного струму замкнений на зовнішнє коло, яке містить лише активний опір R (рис. 3.26). Припустимо, що в колі існує змінний струм:

$$I = I_m \sin \omega t.$$

Застосовуючи закон Ома, визначимо, за яким законом змінюється напруга на активному опорі

$$U = I \cdot R = I_m R \sin \omega t = U_m \sin \omega t,$$

де

$$U_m = I_m R. \quad (3.72)$$

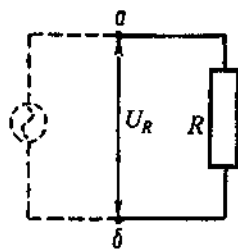


Рис. 3.26

Ця рівність показує, що між коливаннями U та I немає зсуву фаз: напруга і струм одночасно досягають максимальних значень і одночасно перетворюються в нуль (рис. 3.27). Наочно це можна зобразити за допомогою векторної діаграми. Величини, які змінюються за гармонічним законом (U та I), будемо розглядати як вектори, модуль яких дорівнює їхньому

амплітудному значенню, а кут між ними – різниці фаз. Вісь діаграми виберемо так, щоб вектор I збігівся з нею за напрямком. Цю вісь називають *віссю струмів*. Тоді вектор, що зображає коливання напруги, буде направлений вздовж осі струмів (рис. 3.28). Довжина цього вектора $U_m = I_m R$.

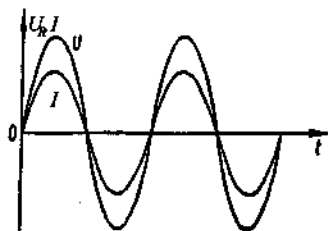


Рис. 3.27

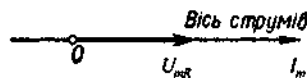


Рис. 3.28

Коло з індуктивністю. Розглянемо випадок, коли ділянка кола містить лише індуктивність (рис. 3.29). Тоді за законом електромагнітної індукції Фарадея електрорушійна сила (ЕРС) індукції \mathcal{E}_i визначається швидкістю зміни магнітного потоку Φ , тобто $\mathcal{E}_i = -d\Phi/dt$. У випадку самоіндукції магнітний потік Φ прямо пропорційний силі струму I , що тече по контуру, тобто $\Phi = LI$, де L – індуктивність контура. Таким чином, при наявності змінного струму в котушці індукується ЕРС самоіндукції, величина якої дорівнює $\mathcal{E}_{is} = -Ldi/dt$. Відповідно до закону Ома

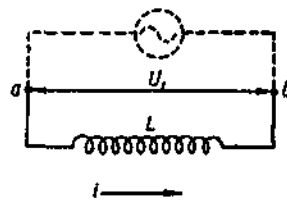


Рис. 3.29

$$U_L = IR - \mathcal{E}_{is}.$$

За відсутності активного опору ($R=0$)

$$Ldi/dt = U_L.$$

Якщо сила струму в колі змінюється за законом $I = I_m \sin \omega t$, то для U_L отримуємо:

$$U_L = I_m \omega L \cos \omega t = U_{mL} \sin(\omega t + \pi/2),$$

де

$$U_{mL} = I_m \omega L. \quad (3.73)$$

Порівнюючи відношення для амплітудних значень I_m та U_m із законом Ома, бачимо, що роль опору відіграє величина $X_L = \omega L$, яку називають *індуктивним опором*.

Також видно, що сила струму I та напруга U зсунуті за фазою одна відносно іншої (рис. 3.30) на величину $\varphi = \pi/2$, причому напруга в будь-який момент часу випереджає силу струму. На векторній діаграмі це зобразиться так, як показано на рис. 3.31.

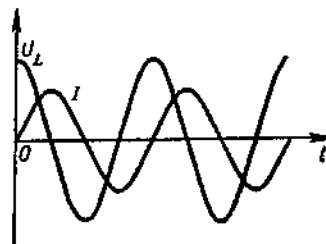


Рис. 3.30

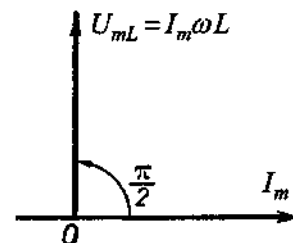


Рис. 3.31

Коло з ємністю. Розглянемо третій частинний випадок, коли ділянка кола містить лише конденсатор ємності C (рис. 3.32). Як і раніше, будемо вважати, що сила струму змінюється за законом $I = I_m \sin \omega t$. Різниця потенціалів між пластинами конденсатора $U_C = q/C$. Але ж сила струму $I = dq/dt$. Тоді

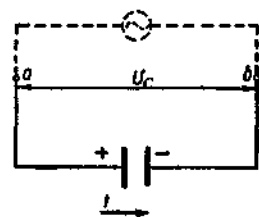


Рис. 3.32

$$q = \int Idt = I_m \int \sin \omega t dt = -\frac{I_m}{\omega} \cos \omega t + q_0.$$

Постійна інтегрування визначає заряд, який не пов'язаний з коливаннями струму, і тому можна покласти $q_0 = 0$. Отже,

$$U_C = -(I_m/\omega C) \cos \omega t = U_{mC} \sin(\omega t - \pi/2),$$

де $U_{mC} = I_m/\omega C.$

Порівнюючи (3.75) із законом Ома, бачимо, що роль опору відіграє величина $X_C = 1/\omega C$, яка називається *ємнісним опором*. Ємнісний опір зменшується із зростанням частоти. Бачимо також, що сила струму та напруга зсунуті по фазі на величину $\pi/2$, причому сила струму в будь-який момент часу випереджає напругу (рис. 3.33).

Отриманий результат зобразимо за допомогою векторної діаграми (рис. 3.34).

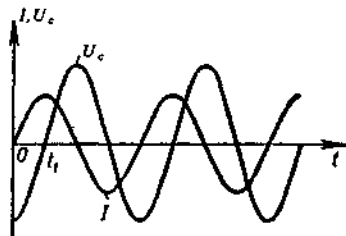


Рис. 3.33

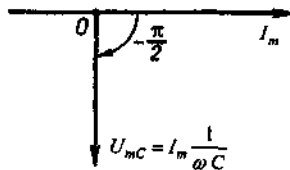


Рис. 3.34

Вектор, що відповідає коливанням напруги, повернений у від'ємному напрямі (за годинниковою стрілкою) на кут $\pi/2$. Довжина вектора дорівнює амплітуді напруги $I_m/\omega C$.

3.4.3. Повний опір кола змінного струму (імпеданс). Закон Ома для кола змінного струму

Отримані результати дозволяють знайти співвідношення між коливаннями сили струму та напруги в будь-якому колі. Розглянемо спочатку коло, в яке *послідовно* ввімкнені *активний опір R, ємність C та індуктивність L* (рис. 3.35). Сила струму в загальному випадку відрізняється за фазою від напруги U і є однаковою для кожного елемента кола: $I = I_m \sin \omega t$.

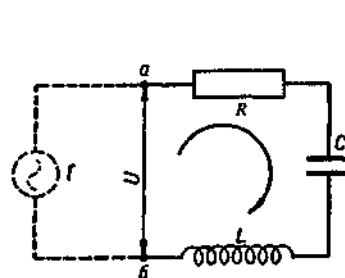


Рис. 3.35

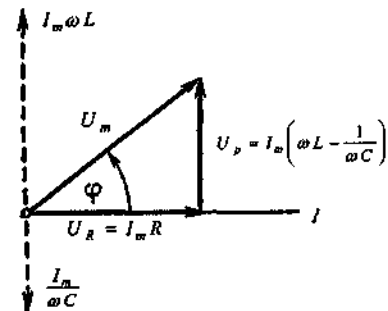


Рис. 3.36

Оскільки при послідовному з'єднанні додаються напруги, то шукану напругу можна подати як суму спадів напруг на окремих ділянках: $U = U_R + U_L + U_C$. Для додавання цих трьох гармонічних коливань скористаємося векторною діаграмою. Врахуємо, що напруга на омичному опорі синфазна з силою струму, напруга на індуктивності випереджає силу струму на $\pi/2$, а на ємності ж відстає на $\pi/2$ (рис. 3.36). Додаючи U_L і U_C , ми отримаємо реактивну складову напруги, яка зображується вектором U_p , перпендикулярним до осі струмів; довжина цього вектора $U_p = I_m(\omega L - 1/\omega C)$. Опір $(\omega L - 1/\omega C)$ називається *реактивним опором*. Таким чином, повний спад напруги можна розглядати як суму двох гармонічних коливань: активної складової та реактивної, які відрізняються за фазою на $\pi/2$. Величину U_m можна знайти за теоремою Піфагора (рис. 3.36):

$$U_m^2 = (I_m R)^2 + (I_m \omega L - I_m / \omega C)^2. \quad (3.76)$$

Для максимального значення повного спаду напруги в контурі закон Ома має вигляд

$$U_m = I_m Z,$$

де Z – повний опір кола змінного струму, або імпеданс. Порівнюючи два останніх рівняння, отримуємо вираз для імпедансу Z . При послідовному увімкненні в коло змінного струму активного опору, індуктивності і ємності повний опір кола (імпеданс) дорівнює:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (3.77)$$

Зсув фаз φ між силою струму і напругою визначається із трикутника напруг (рис. 3.36):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (3.78)$$

Із (3.77) бачимо, що при $X_C = X_L$ реактивний опір $(\omega L - 1/\omega C)$ дорівнює нулю, а імпеданс Z дорівнює активному опору R . У цьому випадку $\operatorname{tg} \varphi = 0$ і $\varphi = 0$. Це означає, що сила струму I і напруга U змінюються в однакових фазах. Цей випадок має назву *резонансу напруг*. При резонансі напруг частота генератора збігається з власною частотою, тобто задовольняє формулу Томсона.

При паралельному з'єднанні ємності C , індуктивності L та активного опору R імпеданс Z можна знайти із співвідношення

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}. \quad (3.79)$$

У випадку рівності ємнісного та індуктивного опорів при паралельному сполученні спостерігається *резонанс струмів*. Опір кола при цьому буде максимальним, а сила струму мінімальною, хоча струми через конденсатор та котушку можуть бути достатньо великими, однак вони взаємноврівноважуються.

3.4.4. Імпеданс біологічних тканин

Як показує експеримент, для біологічних тканин характерні великі значення кута зсуву фаз між силою струму і напругою, причому сила струму випереджає за фазою напругу. Це свідчить,

що частка ємнісного опору в біологічних об'єктах значна. Наведемо деякі значення кута зсуву фаз φ при частоті 1 мГц для різних біооб'єктів:

нерв жаби	-64°
м'яз кролика	-65°
шкіра жаби	-55°
шкіра людини	-55°
ламінарія	-78°

Як правило, індуктивністю біологічних об'єктів нехтують (при частотах $\nu \ll 10^{10} \text{ Гц}$) і вважають, що їхній імпеданс дорівнює геометричній сумі активного R і ємнісного X_C опорів. Для характеристики пропускання струму живими клітинами використовують еквівалентні електричні схеми, тобто такі комбінації C і R , які можуть моделювати електричні параметри біологічних тканин. Розглянемо найпростіші з них.

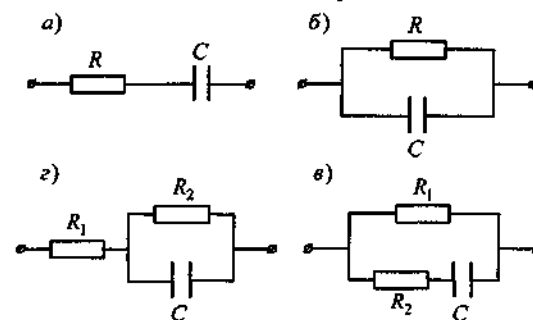


Рис. 3.37

При послідовному сполученні R і C (рис. 3.37, а) існують суттєві розбіжності при пропусканні постійного струму. Якщо $\omega \rightarrow 0$, то схема чинить нескінченно великий опір постійному струмові ($Z_0 \rightarrow \infty$), що не відповідає досліду з біологічними тканинами. Якщо ж C і R з'єднати паралельно (рис. 3.37, б), то при високих частотах ($\omega \rightarrow \infty$) $Z_\infty \rightarrow 0$, що теж не відповідає дійсності. Для біологічних тканин характерне більш складне поєднання ємності й активного опору. Найбільш вдалим є схеми, що приведені на рис. 3.37, в, г. При пропусканні через такі схеми височастотного струму ($\omega \rightarrow \infty$, а отже і $X_C \rightarrow 0$) їх

імпеданс асимптотично наближається до деякої константи Z_∞ (у випадку ϵ : $Z_\infty = R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$), а у випадку z : $Z_\infty = R_1 + R_2$). Ці схеми з певним наближенням можуть бути еквівалентними електричними схемами біологічних тканин, але ні одна з них не може повністю відтворювати закономірності пропускання електричного струму через біологічні системи.

На рис. 3.38 приведені графіки дисперсії (частотної залежності) імпедансу рослинної тканини: 1 – крива для нормальної здорової тканини; 2 – для нагрітої до $t = 50^\circ\text{C}$ протягом 2 хв; 3 – те ж саме протягом 4 хв; 4 – після кип'ятіння в воді протягом 20 хв.

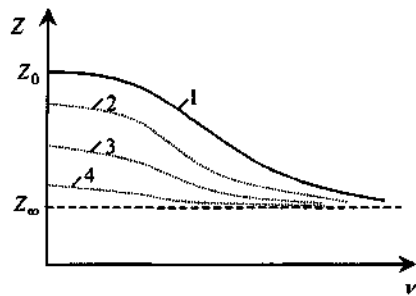


Рис. 3.38

З рисунка видно, що крутизна кривої в міру відмирання тканини зменшується, тобто спостерігається зменшення низькочастотного опору, тоді як при високих частотах імпеданс практично залишається постійним. Причиною є те, що при відмиранні руйнуються мембрани – “живі конденсатори”, і нежива біологічна тканина володіє

суто омичним опором. Вказані особливості використовуються для оцінки фізіологічного стану об'єктів. Як правило, розраховується коефіцієнт дисперсії K , який дорівнює відношенню імпедансу при низьких частотах (10^2 – 10^4 Гц) до імпедансу при високих (10^6 – 10^8 Гц) частотах:

$$K = \frac{Z_{нч}}{Z_{вч}}; \quad (3.80)$$

У нормальних тканинах K залежить від положення організму в еволюційному ряді. Наприклад, коефіцієнт дисперсії печінки ссавців дорівнює приблизно 9–10, печінки жаби – 3–4. При відмиранні тканин вказаний коефіцієнт наближається до одиниці. Критерієм життєздатності є також частотна залежність тангенса

кута зсуву фаз між силою струму і напругою. Вона дає уявлення про співвідношення між величинами активного і реактивного опорів:

$$\operatorname{tg} \varphi = (X_C - X_L) / R \approx X_C / R.$$

Імпеданс тканин залежить також від їх функціонального стану, і це використовується в діагностиці. Імпеданс кровоносних судин залежить від їх кровонаповнення, а значить і від серцево-судинної діяльності. На цьому базується діагностичний метод, який називають *реографією*. Реографія вивчає залежність активної складової імпедансу біологічної тканини від її деформації в процесі серцевої діяльності. Отримують реограми серця, головного мозку, магістральних судин, легень тощо. Відповідно до методики Кедрова вважається, що відносна зміна об'єму ділянки кровоносної судини (чи іншої біологічної тканини) $\Delta V/V$ прямо пропорційна зміні опору $\Delta R/R$:

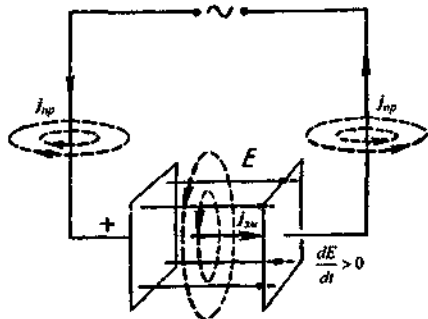
$$\Delta V/V \sim \Delta R/R.$$

Співвідношення між активною та реактивною складовими опору може змінюватись при зміні фізіологічного стану та деяких патологіях. Наприклад, при запаленні на перших стадіях спостерігається збільшення активного опору тканин. Цей ефект обумовлений тим, що струм низької частоти йде переважно через міжклітинну рідину, яка володіє суто омичним опором. При запаленні клітини набухають і переріз міжклітинних ділянок зменшується, що й призводить до підвищення омичного опору. Ємнісний опір при цьому практично не змінюється, оскільки не змінюється структура клітин. Очевидним є той факт, що за незмінного ємнісного опору збільшення омичного опору свідчить про набухання клітин, а зменшення омичного опору, навпаки, свідчить про зменшення об'єму клітин. Зворотний ефект спостерігається на ранніх стадіях онкологічних захворювань. Перетворення нормальних клітин у ракові супроводжується появою молодих клітин і підвищенням ємнісного опору.

3.5. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

3.5.1. Струм зміщення

Повернемося ще раз до причини виникнення магнітного поля. Ми говорили про те, що причиною виникнення магнетизму є рух електричних зарядів. А що ж відбувається у випадку розімкненого електричного кола, коли відсутній сам провідник (наявність конденсатора означає по суті розрив кола)? Як пояснити наявність змінного струму в такому колі?



Фізичне пояснення дав видатний фізик Джеймс Кларк Максвелл (1831–1879 рр). Це пояснення базується на понятті *струміє зміщення*, які є свого роду продовженням звичних струмів провідності. Максвелл припустив, що *магнітне поле може збуджуватись не тільки електричним струмом, а й змінним електричним полем*.

Знайдемо вираз для сили струму зміщення. Для цього розглянемо проходження змінного струму по колу, в яке увімкнений конденсатор (рис. 3.39). Конденсатор не перешкоджає протіканню змінного струму і можна вважати, що звичайний струм провідності I_{np} замикається в конденсаторі струмом зміщення I_{zm} :

$$I_{zm} = I_{np} = dq/dt.$$

Заряд на обкладках плоского конденсатора

$$q = CU = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} Ed = \varepsilon\varepsilon_0 SE.$$

Тоді сила струму зміщення в конденсаторі

$$I_{zm} = \frac{d(\varepsilon\varepsilon_0 SE)}{dt} = \varepsilon\varepsilon_0 S \cdot \frac{dE}{dt},$$

а густина струму зміщення ($j_{zm} = I_{zm}/S$):

$$j_{zm} = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot \frac{dE}{dt}, \quad (3.81)$$

або, враховуючи зв'язок між векторами напруженності E й індукції електричного поля (3.3),

$$j_{zm} = \frac{dD}{dt}. \quad (3.82)$$

Отже, *густина струму зміщення дорівнює швидкості зміни з часом індукції електричного поля*. Із (3.81) випливає, що вектор j_{zm} направлений в той самий бік, що й dE/dt . Тобто, якщо конденсатор заряджається ($dE/dt > 0$), то вектори E і j_{zm} мають однаковий напрям, якщо ж $dE/dt < 0$, то вектори E і j_{zm} протилежні за напрямом.

Пригадаємо, що у діелектрику вектор індукції електричного поля пов'язаний з векторами напруженості E і поляризації P співвідношенням

$$D = \varepsilon_0 E + P.$$

Тоді густина струму зміщення в діелектрику складається з двох доданків:

$$j_{zm} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} + \frac{dP}{dt}. \quad (3.83)$$

Перший доданок має місце і у вакуумі, другий доданок характеризує зміщення електричних зарядів у діелектрику, яке й зумовлює нагрівання діелектрика.

Найголовніша властивість струму зміщення полягає в тому, що він, як і струм провідності, *створює вихрове магнітне поле*.

Струм зміщення виникає завжди, коли змінюється з часом електричне поле. Він може бути і в провідниках, і в діелектриках, і в вакуумі. *Густина повного струму* дорівнює сумі густин струмів провідності і зміщення:

$$j_{\text{пов}} = j_{\text{пр}} + j_{\text{зм}} = \sigma E + \varepsilon \varepsilon_0 dE/dt. \quad (3.84)$$

Залежно від електропровідності середовища і швидкості зміни поля (частоти) доданки в рівнянні (3.84) відіграють різну роль. Припустимо, що напруженість поля змінюється за гармонічним законом $E = E_0 \sin \omega t$, тоді густина струму зміщення: $j_{\text{зм}} = \varepsilon \varepsilon_0 \omega E_0 \cos \omega t$; густина струму провідності $j_{\text{пр}} = \sigma E_0 \sin \omega t$. Відношення максимальних (амплітудних) значень густини струму провідності та зміщення: $j_{\text{зм}}/j_{\text{пр}} = \varepsilon_0 \varepsilon \omega / \sigma$. Для біологічних тканин ($\varepsilon \approx 100$, $\sigma \approx 10^{-5} \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$) при частотах, близьких до 10^5 Гц , амплітудні значення цих струмів є величинами одного порядку. Із збільшенням частоти електромагнітних коливань зростає вклад струму зміщення в повний струм.

Проходження струму зміщення в різних середовищах супроводжується виділенням теплоти, яка може бути розрахована за законом Джоуля–Ленца (3.41):

$$q = j_{\text{зм}} E = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} E. \quad (3.85)$$

Якщо напруженість поля змінюється за гармонічним законом $E = E_0 \sin \omega t$, то $dE/dt = E_0 \omega \cos \omega t$, а $q = \varepsilon \varepsilon_0 E_0^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t$. Тобто

$$q \sim \varepsilon E_0^2 \omega. \quad (3.86)$$

У випадку однорідного діелектрика кількість теплоти може бути розрахована за формулою:

$$q = k \varepsilon \varepsilon_0 E_0^2 \omega^2 \text{tg} \delta, \quad (3.87)$$

де δ – кут між вектором напруженості E та вектором поляризації P , його називають кутом діелектричних втрат, а k – деякий сталий коефіцієнт.

3.5.2. Рівняння Максвелла

Дж. К. Максвелл записав свої геніальні рівняння в 1865 р. Рівняння Максвелла – це фундаментальні рівняння електродинаміки, які описують електромагнітні явища в будь-якому середовищі. Вони узагальнюють експериментальні і теоретичні праці фізиків першої половини XIX ст. і, насамперед, дослідження М. Фарадея. Основні закони електродинаміки Максвелл сформулював у вигляді чотирьох рівнянь, які подамо в інтегральній формі, як в найбільш простій і наочній.

Перше рівняння Максвелла спирається на закон Біо–Савара–Лапласа та поняття струму зміщення. Виділимо в провіднику, в якому існує змінний струм, довільну площадку S , обмежену контуром l . Тоді

$$\int_l H_l dl = \int_S (j_n + \frac{\partial D_n}{\partial t}) dS, \quad (3.88)$$

де H_l – проекція вектора напруженості магнітного поля на напрям дотичної до контура l у даній точці, j_n – нормальна до вибраної площадки складова густини струму провідності, D_n – нормальна до площадки складова вектора електричної індукції. Тут вжита частинна похідна $\partial D/\partial t$, щоб врахувати факт залежності D як від часу, так і від просторової координати. Струм зміщення виникає лише тоді, коли D змінюється з часом. Це рівняння показує, що магнітне поле вихрове і що воно виникає незалежно від наявності постійних магнітів. Виникнення магнітного поля зумовлене двома факторами: рухом електричних зарядів (струм провідності) і зміною в часі електричного поля (струм зміщення).

Друге рівняння відображає закон електромагнітної індукції Фарадея:

$$\varepsilon_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B_n dS.$$

ЕРС, як відомо, дорівнює роботі сторонніх сил по переміщенню одиничного заряду, тобто $\int_l E_l dl$, тому матимемо

$$\int_l E_t dl = -\partial\Phi/\partial t,$$

$$\int_l E_t dl = -\int_s (\partial B_n / \partial t) dS, \quad (3.89)$$

де E_t – проекція вектора напруженості електричного поля на напрям дотичної до контура у даній точці, B_n – нормальна до поверхні складова вектора магнітної індукції. З цього рівняння видно, що крім електростатичного поля в природі існує електричне поле, джерелом якого є змінне магнітне поле. Всяка зміна електричного поля зумовлює появу змінного магнітного поля, лінії напруженості якого замкнені і охоплюють лінії електричного поля (перше рівняння); всяка зміна магнітного поля зумовлює появу змінного електричного поля, лінії напруженості якого замкнуті й охоплюють лінії магнітного поля (друге рівняння).

Третє рівняння Максвелла показує, що джерелом електричного поля є електричні заряди:

$$\int_s D_n dS = q.$$

Ліва частина цього рівняння – потік вектора індукції електричного поля через замкнену поверхню площею S .

Четверте рівняння відображає факт відсутності магнітних зарядів. Повний потік вектора магнітної індукції B через замкнену поверхню площею S дорівнює нулю:

$$\int_s B_n dS = 0.$$

Наведені рівняння Максвелла не враховують будову речовини і взаємодію електромагнітного поля з частинками речовини. Вплив середовища на електромагнітне поле задається через його електропровідність, а також діелектричну ϵ і магнітну μ проникності. Тому до рівнянь Максвелла слід додати ще три рівняння, які називаються матеріальними:

$$D = \epsilon\epsilon_0 E,$$

$$B = \mu\mu_0 H,$$

$$j = \sigma E.$$

Рівняння Максвелла описують величезне коло явищ (електродинаміка, оптика, електротехніка, радіотехніка, астрофізика, фізика плазми тощо). Теорія Максвелла не тільки пояснила вже відомі факти, а й передбачила нові і важливі явища. Абсолютно новим у цій теорії було припущення Максвелла про магнітні поля струмів зміщення. На основі цього припущення Максвелл предбачив існування електромагнітних хвиль, тобто змінного електромагнітного поля, яке поширюється в просторі з певною швидкістю. Теоретичне дослідження властивостей електромагнітних хвиль привело згодом Максвелла до створення електромагнітної теорії світла. Пізніше експериментально вдалося отримати електромагнітні хвилі і провести досліди, які блискуче підтвердили електромагнітну теорію світла, а з нею і всю теорію Максвелла.

3.5.3. Плоскі електромагнітні хвилі. Вектор Умова-Пойнтінга

Періодичні зміни електричного чи магнітного поля в деякій області простору дають початок сукупності послідовних взаємопов'язаних перетворень цих полів, котрі охоплюють все нові області простору. Обидва ці поля є вихровими, причому вектори E та H розміщені у взаємно перпендикулярних площинах. Електромагнітне поле, яке періодично змінюється, поширюючись у просторі, утворює *електромагнітну хвилю*.

Для ізотропного діелектрика, в якому немає вільних електричних зарядів, з рівнянь Максвелла випливає:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}. \quad (3.90)$$

Таке ж рівняння можна отримати і для напруженості магнітного поля H . Рівняння (3.90) свідчить, що напруженість електричного E (а значить, і магнітного H) поля задовольняє хвильовому рівнянню, і швидкість поширення електромагнітних хвиль

$$v = 1/\sqrt{\epsilon_0\epsilon\mu_0\mu}, \quad (3.91)$$

де $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ – електрична стала, $\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ – магнітна стала, ϵ і μ – відносні діелектрична та магнітна проникності середовища. У вакуумі швидкість поширення електромагнітних хвиль дорівнює $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$, тоді як в середовищі $v = c/\sqrt{\epsilon \mu} = c/n$. Величину $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ називають **абсолютним показником заломлення** середовища. Він показує, у скільки разів швидкість електромагнітної хвилі в середовищі менша, ніж у вакуумі.

Розв'язок (3.90) має вигляд плоскої хвилі:

$$E = E_m \cos \omega(t - x/v), \quad (3.92)$$

або, якби хвильове рівняння було записано для магнітної компоненти поля H , то

$$H = H_m \cos \omega(t - x/v),$$

де E і H – миттєві, а E_m та H_m – амплітудні значення напруженості електричного та магнітного полів, ω – циклічна частота коливаний, v – швидкість поширення хвилі. Вектори E і H одночасно досягають максимуму і одночасно перетворюються в нуль, тобто коливаються в однаковій фазі; вони взаємно перпендикулярні і перпендикулярні до вектора швидкості v , тобто електромагнітна хвиля поперечна (рис. 3.40).

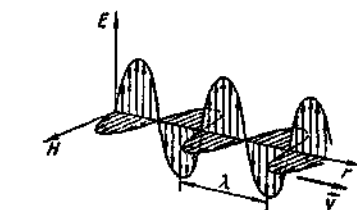


Рис. 3.40

Електромагнітна хвиля в напрямку свого поширення переносить певну енергію. Енергія електромагнітного поля в одиниці об'єму (густина енергії електромагнітного поля) дорівнює

$$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (3.93)$$

Перший доданок – густина енергії електричного поля, другий – магнітного. З рівнянь Максвелла випливає, що в довільний момент часу має місце рівність

$$\epsilon_0 \epsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2, \text{ або } \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} \cdot E = \sqrt{\mu_0 \mu} \cdot H. \quad (3.94)$$

Таким чином, в електромагнітній хвилі напруженості електричного і магнітного полів пропорційні одна одній: $E = \sqrt{\mu_0 \mu / \epsilon_0 \epsilon} \cdot H$. Множник перед H називають **хвильовим опором середовища**. Для вакууму ($\epsilon = 1$, $\mu = 1$) хвильовий опір дорівнює приблизно 377 Ом . Крім того, з (3.94) видно, що електрична і магнітна складові електромагнітного поля рівноправні. Використавши (3.94), вираз для густини енергії (3.93) можна переписати у вигляді:

$$w = \epsilon_0 \epsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2 = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} E \cdot H. \quad (3.95)$$

Густина потоку енергії електромагнітного поля I дорівнює добутку густини енергії w і швидкості поширення хвилі v :

$$I = wv = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} E \cdot H (1/\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}) = E \cdot H. \quad (3.96)$$

Вектор густини потоку енергії електромагнітного поля дорівнює $I = [E \times H]$, напрямком її перенесення збігається з векторним добутком $[E \times H]$, а значить, і з швидкістю поширення хвилі, тобто визначається за правилом правого гвинта. Цей вектор носить назву **вектора Умова-Пойнтинга.**

3.5.4. Шкала електромагнітних хвиль

Як відомо, залежно від частоти або довжини хвилі $\lambda = c/v$ електромагнітні хвилі поділяють на радіохвилі, інфрачервоне випромінювання, видиме світло, ультрафіолетове випромінювання, рентгенівські хвилі, γ -випромінювання. У таблиці 3.7 наведена частина спектра електромагнітного випромінювання. Розподіл електромагнітного випромінювання на окремі діапазони недостатньо чіткий, тому що в дійсності сусідні діапазони в значній мірі перекриваються.

Таблиця 3.7.

Частота ν , Гц	Вид випромінювання
$10^3 - 10^{12}$	Радіохвилі
$1,5 \cdot 10^{11} - 3,75 \cdot 10^{14}$	Інфрачервоне випромінювання
$(3,75 - 7,5) \cdot 10^{14}$	Видиме світло
$7,5 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{16}$	Ультрафіолетове випромінювання
$3 \cdot 10^{16} - 3 \cdot 10^{22}$	Рентгенівське
$> 3 \cdot 10^{18}$	γ -випромінювання

Той факт, що різні діапазони частот випромінювання мають свої назви, не повинен закривати основну особливість електромагнітних хвиль – всі вони мають однакову природу, а відрізняються лише частотою. Радіохвилі, які випромінюються антеною, повністю аналогічні за природою до γ -випромінювання, яке зароджується в атомному ядрі. Спосіб же взаємодії з речовиною визначальною мірою залежить від частоти. Наприклад, око чутливе лише до видимого світла, тоді як шкіра відчуває інфрачервоне випромінювання. Радіохвилі затримуються тонкою металевією пластинкою, тоді як γ -промені та рентгенівські проникають крізь неї. Величезна різноманітність проявів взаємодії електромагнітного поля з речовиною робить це випромінювання надзвичайно цікавим для використання у різних галузях, включаючи медицину.

Згідно з Міжнародним регламентом радіозв'язку радіохвилі ділять на дванадцять діапазонів (табл. 3.8).

У цій же таблиці наведена класифікація електромагнітних хвиль, назва яких традиційно вживається у медичній літературі.

Таблиця 3.8.

Частота ν , Гц	Діапазон випромінювання	Довжина хвилі λ , м	Назва діапазону електромагнітних хвиль у медичній літературі
3–30	Крайньонизькі	$10^8 - 10^7$	
30–300	Наднизькі (мегаметрові)	$10^7 - 10^6$	
$(0,3-3) \cdot 10^3$	Інфранизькі (гекакілометрові)	$10^6 - 10^5$	
$(3-30) \cdot 10^3$	Дуже низькі	$10^5 - 10^4$	

$(30-300) \cdot 10^3$	Низькі частоти (кілометрові)	$10^4 - 10^3$	
$(0,3-3) \cdot 10^6$	Середні частоти (гектометрові)	$10^3 - 10^2$	ВЧ
$(3-30) \cdot 10^6$	Високі частоти (декаметрові)	100–10	ВЧ
$(30-300) \cdot 10^6$	Дуже високі (метрові)	10–1	УВЧ
$(0,3-3) \cdot 10^9$	Ультрависокі (УВЧ) (дециметрові)	1–0,1	НВЧ
$(3-30) \cdot 10^9$	Надвисокі (НВЧ) (сантиметрові)	0,1–0,01	НВЧ
$(30-300) \cdot 10^9$	Крайньовисокі (КВЧ) (міліметрові)	0,01–0,001	КВЧ
$(0,3-3) \cdot 10^{12}$	Гіпервисокі (ГВЧ) (дециміліметрові)	$(1-0,01) \cdot 10^{-3}$	КВЧ

3.5.5. Дія електромагнітного поля на біологічні тканини

Характер взаємодії електромагнітного поля з біологічними тканинами значною мірою визначається електричними та магнітними властивостями цих тканин – питомою електропровідністю (σ), діелектричною (ϵ) та магнітною (μ) проникністю. Біологічні тканини складні за своєю природою. Складність їх будови визначається складністю функцій, які вони виконують. Деякі із тканин (м'язова, нервова) мають специфічні властивості (наприклад, збудливість, скоротливість тощо), основу яких складають процеси електричної природи. До складу біологічних тканин входять заряджені частинки (здебільшого це іони), а також системи зарядів схожі до диполів, мультиполів, цілі заряджені структури (такими є, наприклад, мембрани). Біологічні тканини не мають яскраво виражених магнітних властивостей, вони в основному є діаманетиками (вода, білки, вуглеводи тощо); деякі молекулярні структури (вільні радикали, геми, що містять іони заліза тощо) є парамагнетиками або феромагнетиками.

Електромагнітні поля залежно від частоти випромінювання можуть чинити на людський організм як локальну, так і загальну дію. На частотах $\nu \leq 300$ МГц довжина хвилі λ

перевищує 1 м. Дія такого випромінювання може бути як загальною, так і локальною залежно від того, все тіло чи його частина знаходяться в електромагнітному полі. На частотах $\nu > 300$ МГц довжина хвилі λ менша за розміри тіла людини, чим обумовлена лише локальна дія таких полів.

З підвищенням частоти зменшується глибина проникнення електромагнітного поля в біологічні тканини (як і у всякі інші середовища). Глибиною проникнення L_e електромагнітного поля називають відстань, на якій амплітуда коливань зменшується в $e \approx 2,718$ разів. Цій відстані відповідає зменшення інтенсивності у $e^2 \approx 7,3$ разів, тобто на 87 відсотків. Глибина проникнення електромагнітних хвиль визначається не тільки частотою цих хвиль, а й здатністю даної тканини поглинати енергію, яка, в свою чергу, залежить від будови тканини. Визначальним в більшості випадків є вміст молекул води. Для жирової та кісткової тканин глибина проникнення на порядок (у десятки разів) більша, ніж для м'язової.

Якщо опромінення електромагнітними хвилями ведеться дистанційно, то має місце часткове (яке може сягати 75%) відбивання хвилі від поверхні біологічної тканини. Ступінь відбивання залежить від різниці хвильових опорів середовища (повітря) та біологічної тканини. При контактному опроміненні втрати потужності на відбиванні значно менші.

З лікувальною метою здебільшого використовуються такі прояви взаємодії електромагнітного поля з біологічними системами:

- збудження, подразнення;
- лікувальне прогрівання;
- специфічна дія.

З метою подразнення використовують низькочастотні поля та струми з імпульсами прямокутної, трапецієподібної, трикутної, експоненціальної форми. При частоті 0,5 МГц зміщення іонів біологічних тканинах під дією електричного поля мають такий самий порядок як при теплових коливаннях, тому поля та струми, частота яких $\nu \geq 0,5$ МГц, не мають подразнювального впливу.

Як вже зазначалося, для лікувального прогрівання через небезпеку не придатні ні низькочастотні, ні постійні струми, оскільки суттєвий тепловий ефект може бути лише при значних струмах. З метою прогрівання використовують високочастотні поля та струми. Цей механізм дії електромагнітного поля вивчений найбільш досконало. Тепловий ефект, як правило, оцінюють за кількістю теплоти, яка виділяється в одиниці об'єму за одиницю часу:

$$q = \frac{Q}{Vt}. \quad (3.97)$$

Для знаходження q , що виникає в біологічних тканинах під дією електричного струму, використовують закон Джоуля – Ленца у диференціальній формі

$$q = \rho j^2 = jE, \quad (3.98)$$

де ρ – питомий опір, j – густина струму, E – напруженість електричного поля

Серед методів, дія яких базується на тепловому ефекті, розрізняють діатермію, індуктотермію, УВЧ-, НВЧ- терапію тощо.

До специфічної дії відносять: зміну структури біологічно активних молекул (білків, вуглеводів, нуклеїнових кислот), зміни в процесах переносу через мембрани (спотворення роботи іонних насосів, зміну локальних концентрацій іонів та мембранних потенціалів), зміну швидкості хімічних реакцій тощо.

Характерною особливістю специфічної дії є реакція біологічних систем на надзвичайно низькі інтенсивності, котрі недостатні для збудження та прогрівання. Цей механізм охоплює весь діапазон довжин хвиль і характеризується високою селективністю (досить вузьким діапазоном частоти $\Delta\nu$ для створення того чи іншого ефекту).

Дія постійного електричного та магнітного поля, а також дія електромагнітного поля низької частоти на біологічні тканини розглядалася у п.п. 3.1.4, 3.2.4 та 4.3.5. У даному параграфі зупинимось детальніше на процесах, що виникають у біологічних тканинах під дією електромагнітного поля високої (ВЧ), ультрависокої (УВЧ), надвисокої (НВЧ), крайньовисокої (КВЧ) та гіпервисокої (ГВЧ) частоти, а також розглянемо

лікувальні методики, що використовують електромагнітні поля цих діапазонів.

Зауважимо, що у фізіотерапії до НВЧ-коливань традиційно відносять коливання діапазону 300 МГц – 3 ГГц (область дециметрових та сантиметрових хвиль) і називають відповідні методики дециметровхвильовою та сантиметровхвильовою терапією. Лікування електромагнітними хвилями, частота яких більша за 3 ГГц, називають КВЧ-терапією.

У механізмі дії електромагнітних хвиль зазначених частотних діапазонів умовно виділяють нетепловий та тепловий компоненти. Перший із них обумовлений селективним поглинанням енергії окремими групами молекул, частоти релаксації яких близькі до частоти зміни зовнішнього поля, є провідним при дії електромагнітного поля низької інтенсивності. При збільшенні інтенсивності електромагнітних хвиль проявляється тепловий складник механізму лікувальної дії.

Лікувальне прогрівання високочастотними струмами провідності використовують при *діатермії, електротомії, електрокоагуляції*. Високочастотні струми не викликають специфічного подразнення, притаманного низькочастотним струмам, як це має місце, наприклад, при електростимуляції. Основний діючий фактор – це теплота, яка виділяється при проходженні струму.

Струми провідності виникають при наявності замкненого електричного кола між біологічними тканинами та джерелом струму. Густина струму визначається за законом Ома: $j_{\text{пр}} = \sigma E = -\sigma \text{grad } \varphi$, а тепловий ефект струмів провідності оцінюють за законом Джоуля–Ленца: $q = \rho j^2$. З останньої формули випливає: а) чим більша густина струмів провідності у середовищі, тим ефективніше відбувається прогрівання тканин; б) при одній і тій самій густині струму j більше нагріваються тканини, що мають більший питомий опір ρ . Відповідно, нагріваються сильніше шкіра, кісткова тканина, і слабо нагріваються кров, клітинна і позаклітинна рідини, м'язи тощо.

При незначній густині струму здійснюється прогрівання ділянок тканин (приємне відчуття теплоти), які знаходяться між електродами (діатермія). Збільшення густини струму може

привести до значного зростання кількості теплоти. Температура сягає значень, при яких розпочинається процес коагуляції білків (електрокоагуляція). Цей режим використовується, зокрема, для зупинки кровотечі із судин при операціях. Збільшуючи густина струму між електродами до величини $j_{\text{max}} \approx 40 \text{ mA/mm}^2$, можна отримати режим, при якому за рахунок теплоти, що виділяється, почнеться процес кипіння рідини. Пара, яка створюється між електродами, розриває тканини (методика електротомії або діатермотомії). Подальше збільшення густини струму тканини призводить до обуглювання тканин в результаті горіння.

Апарати для діатермії містять генератор високої частоти (робоча частота 1,76 або 12,56 МГц) і декілька вихідних контурів, індуктивно пов'язаних з контуром генератора. Виходи можуть бути біактивними і моноактивними. В першому випадку високочастотна напруга подається на два електроди з однаковою площею. Нагріву підлягають всі тканини, що розміщені між електродами. В другому випадку розрізняють активний електрод (електроніж) і пасивний, площа якого в багато разів більша площі активного електрода. В цьому разі виділення теплоти відбувається тільки під активним електродом. Сучасні апарати для діатермії мають в своєму складі і систему електричного захисту, яка спрацьовує при небезпечних для пацієнта високочастотних струмах втрат.

Ще один вид струмів, які використовуються з метою лікувального прогрівання – *індукційні*. Ці струми виникають в провідному середовищі, котре пронизане змінним магнітним потоком Φ , за рахунок наведеної ЕРС електромагнітної індукції

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Величину індукційних струмів (ще їх називають *вихровими струмами* або *струмами Фуко*) оцінимо для випадку, коли магнітна індукція B змінюється за гармонічним законом $B = B_0 \cos \omega t$. Тоді маємо:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = - \frac{d(BS)}{dt} \cdot \frac{1}{R} = - \frac{S}{R} \cdot \frac{dB}{dt} = \frac{S^2 \omega}{\rho l} \cdot B_0 \sin \omega t \quad (3.99),$$

Густина індукційного струму

$$j = \frac{I}{S} = \frac{S\omega B_0}{\rho l} \sin \omega t \quad (3.99, б)$$

Отже, амплітуда вихрових струмів залежить як від геометричних розмірів ділянки (S , l) електричних параметрів тканини (питомого опору ρ), так і від характеристик зовнішнього магнітного поля (амплітуди магнітної індукції B_0 та частоти ω).

Тепловий ефект *вихрових* струмів оцінимо за законом Джоуля–Ленца в диференціальній формі: $q = \rho j^2$. Враховуючи формулу (3.99, б) для густини індукційного струму, матимемо

$$q = \left(\frac{\omega S B_0}{\rho l} \cdot \sin \omega t \right)^2 \rho = k \frac{\omega^2 B^2}{\rho},$$

де k – коефіцієнт пропорційності, який залежить від геометричних розмірів ділянки тканини і електродів.

Висновок: індукційні струми прогривають середовища, які мають малий питомий опір ρ (кров, лімфа, м'язи тощо).

Методики: *індуктотерія* – прогрів тканин височастотними вихровими струмами, *загальна дарсонвалізація*.

Третім типом струмів, що використовуються у фізіотерапії, є *струми зміщення*. Із теорії електромагнітного поля відомо, що змінне магнітне поле створює електричне, зміна якого, в свою чергу, породжує магнітне поле. Струми, які обумовлені змінним в часі електричним полем, мають назву струмів зміщення (див. п. 3.5.1):

$$j_{зм} = \frac{dD}{dt} = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} + \frac{dP}{dt} = \epsilon_0 \epsilon \frac{dE}{dt},$$

де D – індукція електричного поля, E – напруженість, P – вектор поляризації.

Враховуючи струми провідності і зміщення, можна визначити густину повного струму в середовищі:

а)

$$j = \sigma E + \epsilon \epsilon_0 \frac{dE}{dt}.$$

Розглянемо механізми прогрівання різних середовищ струмами зміщення. Молекули діелектрика здійснюють коливально-обертальний рух в змінному електричному полі (рис. 3.41, а), тоді як для електролітів дія змінного електричного поля призводить до коливально-поступального руху іонів (рис. 3.41).

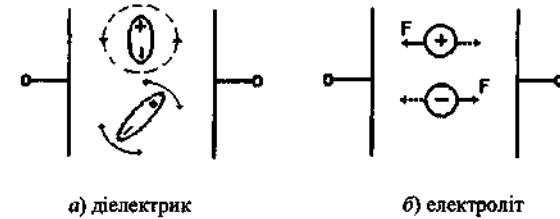


Рис. 3.41

Амплітуда таких вимушених коливань залежить як від зовнішньої сили, так і від властивостей середовища (наприклад, в'язкості електроліту, розміру молекул, ступеня гідратації іонів тощо).

Оцінимо тепловий ефект струмів зміщення за формулою (3.98). Припустимо, що напруженість E електричного поля змінюється за гармонічним законом $E = E_0 \sin \omega t$, тоді:

$$q = j_{зм} E = E \epsilon \epsilon_0 \frac{dE}{dt} = E_0^2 \epsilon \epsilon_0 \omega \cos \omega t \sin \omega t = k \epsilon \epsilon_0 E_0^2 \omega \quad (3.100)$$

Отже, прогрів тканин струмами зміщення залежить від амплітуди напруженості електричного поля, частоти його зміни і діелектричних властивостей середовища. Для однорідного діелектрика, який знаходиться у полі конденсатора, величина q визначається за формулою:

$$q = K(\omega) E_0^2 \omega^2 \operatorname{tg} \delta \quad (3.101)$$

де δ – кут діелектричних втрат, який характеризує різницю фаз

коливань напруженості векторів E і дипольного моменту P (див. п. 3.1.4), $K(\omega)$ – коефіцієнт пропорційності, який в загальному випадку залежить від частоти ω .

Струми зміщення викликають ефективне прогрівання як тканин, котрі є діелектриками, так і тих, які мають добру електропровідність, чим і обумовлене широке використання лікувальних методик мікрохвильової терапії, яка використовує метрові, сантиметрові та міліметрові електромагнітні хвилі. Для цих методик характерна відсутність електричного контакту між електродами і тканинами пацієнта, тобто створюються умови, які попереджують виникнення струмів провідності, основними діючими факторами є струми зміщення та резонансне поглинання енергії.

Групи атомів, що входять до складу біологічно активних молекул, мають власні частоти, які переважно відносяться до колиально-обертальної області спектра. Тому при УВЧ, НВЧ і КВЧ на відповідних частотах може спостерігатися резонансне поглинання енергії. Завдяки цьому можуть відбуватися структурно-функціональні зміни різних біологічно активних молекул без підвищення температури, а також теплові ефекти різної інтенсивності та локалізації.

Електромагнітне поле метрового діапазону при *УВЧ-терапії* взаємодіє з біологічними тканинами у всьому міжелектродному просторі, викликаючи стійке та тривале прогрівання в зоні дії. Максимальна кількість теплоти утворюється в тканинах з великою діелектричною проникністю (кісткова тканина, з'єднувальна, жирова тощо), у тканинах із значною електропровідністю (кров, лімфа, м'язова тканина) кількість теплоти на порядок менша. При УВЧ-терапії діаметр капілярів збільшується в 3–10 разів, значно підсилюється крово- та лімфовідтоки. Під дією УВЧ-поля низької інтенсивності у тканинах організму відбуватиметься селективне поглинання енергії гліко- та фосфоліпідами, водорозчинними білками. Наслідком цих процесів є нетепловий механізм лікувальної дії, який проявляється у зміні проникності та функціональних властивостей мембран, конформаційних перебудовах гліколіпідів тощо.

Електромагнітне поле *дециметрового діапазону* при НВЧ-терапії характеризується локальною дією на обмежену ділянку тіла, оскільки довжина хвилі цього випромінювання менша за розміри тіла людини. Під дією НВЧ-поля дециметрового діапазону активізується метаболізм органів та тканин і відновлюється втрачена при хворобі функціональна активність. Характер лікувального ефекту визначається здебільшого локалізацією НВЧ-опромінення. Так, при дії на залози внутрішньої секреції відбувається активізація ендокринної системи (приводить до збільшення продукції рилізінг-факторів у гіпоталамусі, стимулює гормоносинтетичні процеси в у щитовидній залозі). Дециметрові хвилі можуть стимулювати скорочувальну функцію міокарда, відновлювати порушену функцію зовнішнього дихання, зменшувати периферичний опір капілярного русла та посилювати коронарний кровообіг. Внаслідок активації парасимпатичних нервових волокон відбувається зниження артеріального тиску та частоти серцевих скорочень. При значних інтенсивностях НВЧ-поля виникає гіпертермія внутрішніх органів, яку використовують зокрема при лікуванні злоякісних пухлин (у гінекології та урології).

Механізм лікувальної дії електромагнітних хвиль *сантиметрового діапазону* при НВЧ-терапії є аналогічним до механізму дії хвиль дециметрового діапазону. Водночас зменшення довжини хвилі обумовлює участь у процесах поляризації на глибинах проникнення до 1–2 см молекул з більшою частотою релаксації – переважно молекул вільної неструктурованої води, бокових ланцюжків фосфоліпідів та амінокислот. Суттєве відбивання хвиль даного діапазону від поверхні шкіри створює умови для виникнення стоячих хвиль, а, отже, і перегріву шкіри та підшкірного жирового шару.

Найновіші праці дослідників засвідчують специфічну дію електромагнітних хвиль *міліметрового діапазону*, яка пов'язана з резонансним поглинанням енергії, запуском автоколивальних процесів та конформаційними перебудовами в біологічних структурах. *КВЧ-терапія* – лікувальне застосування дії електромагнітних хвиль міліметрового діапазону. Через малу довжину хвилі даного діапазону також добре поглинаються

молекулами води, колагеновими волокнами, гідратованими білками. Вони мають малу проникну здатність (десяті долі міліметра) і значну просторову неоднорідність.

На частотах порядку $\nu \approx 5 \cdot 10^{10}$ Гц = 50 ГГц відбувається також резонансне поглинання електромагнітних хвиль в мембранних структурах клітин. Вперше цей факт отримав теоретичне обґрунтування в роботах відомого фізика Г. Фр'юліха, котрий показав, що власні частоти структурних елементів біологічних мембран лежать саме в КВЧ-діапазоні.

В останні роки дія слабоінтенсивних електромагнітних хвиль міліметрового діапазону досить широко використовується в медичній практиці при лікуванні різних хвороб (так звана "мікрохвильова резонансна терапія", або "квантова медицина"). Зокрема, це стало можливим завдяки створенню потужної кооперації вчених різних спеціальностей (фізиків, медиків, біологів, інженерів), об'єднаних в Міжгалузевому науково-дослідному центрі "Відгук" під керівництвом проф. С.П. Ситько.

Узагальнена інформація про лікувальні методики, які базуються на дії електромагнітного поля на біологічні тканини, подана в табл. 3.9.

Таблиця 3.9.

Метод	Діючий фактор	Частота	Ефекти у біологічних тканинах
Гальванізація, електрофорез	Постійне електричне поле Постійний електричний струм $I = 10 \text{ mA}$, $U = 60-80 \text{ V}$	0	Поляризаційні ефекти
Франклінізація (статдуш)	Постійне електричне поле високої напруженості $E = 10^4-10^6 \text{ V/m}$	0	Поляризаційні ефекти
Електро-стимуляція	Імпульсні струми	1-150 Гц	Подразнення

Дарсонвалізація – локальна – загальна	Низькочастотний розряд, аеріони, змінне магнітне поле (індукційні струми)	110 кГц 440 кГц	Подразнення нервових рецепторів шкіри або слизових оболонок. Зміна магнітних властивостей біологічно активних молекул
Діатермія – хірургічна – терапевтична	Високочастотний електричний струм	0,5-2 МГц	Виділення теплоти $q = \rho j^2$
Індуктотермія	Змінне магнітне поле (індукційні струми)	10-15 МГц	Виділення теплоти $q \sim B^2 \omega^2 / \rho$
УВЧ-терапія	Змінне електричне поле (струми зміщення)	40-300 МГц	Виділення теплоти $q \sim \epsilon \omega E^2$ Резонансне поглинання енергії $q \sim \epsilon_0 \epsilon \omega^2 E^2 \operatorname{tg} \delta$
Мікрохвильова терапія	Електромагнітні хвилі НВЧ-діапазону (струми зміщення). Резонансне поглинання	10^4-10^6 МГц 50-60 ГГц	Виділення теплоти $q \sim \epsilon \omega^2 E H$ Специфічна нетеплова дія

3.6. СЕМІНАР "ВЗАЄМОДІЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ З БІОЛОГІЧНИМИ ТКАНИНАМИ"

Мета семінару: вивчити основні механізми дії електричного, магнітного та електромагнітного полів на біологічні об'єкти.

Контрольні питання для підготовки до семінару

1. Основні характеристики електричного та магнітного полів.
2. Основні процеси, які обумовлюють дію електромагнітного поля на біологічні тканини:
 - 2.1. Виникнення електричних струмів:

- а) іонні струми провідності (постійні, змінні: низько- та високочастотні);
 - б) індукційні струми;
 - в) струми зміщення.
- 2.2. Явища поляризації.
- 2.3. Резонансне поглинання енергії електромагнітного поля.
3. Основні фізіотерапевтичні методики, в яких використовують електричні струми; явища поляризації та резонансне поглинання енергії електромагнітного поля з лікувальною метою.
 4. Теплова дія електромагнітного поля:
 - 4.1. Кількість теплоти, яка виділяється при діатермії, індуктотермії, УВЧ- і НВЧ- терапії.
 - 4.2. Механізм прогрівання тканин з різною електропровідністю (діелектриків, низько- та високоомних провідників).
 5. Специфічна дія ЕМП на БТ. Фізичні основи процесів, які викликають зміну структури біологічно активних молекул, функцій біологічних мембран, кінетики ферментативних процесів тощо.

Для підготовки до семінару детально ознайомитися з матеріалом, викладеним в параграфі 3.5.5.

Додаткова література

1. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1992.
2. Ливенцев Н.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1978.

Контрольні запитання та задачі

3. Назвіть основні характеристики електричного і магнітного полів та поясніть їх фізичну суть. Поясніть природу лікувального і вражаючого фактора при електротравмі або фізіотерапії.
4. Що таке поляризація, які види поляризації найбільш важливі при дії електромагнітного поля на біологічну тканину? Яким чином виникають у тканинах струми провідності, індукційні струми і струми зміщення, від чого залежить їх величина?
5. Чим обумовлене прогрівання біологічної тканини при дії електромагнітного поля і від яких факторів (зовнішніх і внутрішніх) залежить кількість виділеної теплоти?
6. У діапазоні яких частот змінного струму (при незмінних інших характеристиках електромагнітного поля) електротравма найбільш небезпечна для організму?

7. Чому резонансне поглинання енергії електромагнітного поля проявляється в області УВЧ і НВЧ?
8. Поясніть особливості специфічної дії електромагнітного поля на біологічну тканину.
9. При яких фізіотерапевтичних методиках спостерігається найбільш ефективний прогрів внутрішніх тканин, що мають: а) добру електропровідність; б) незначну електропровідність; в) є діелектриками?
10. У скільки разів зміниться питома тепловіддача $Q/(Vt)$ для методик діатермії, індуктотермії і УВЧ-терапії відповідно, якщо частота коливань зросла вдвічі, питомий опір зменшився у п'ять разів, амплітуди векторів магнітної індукції і напруженості електричного поля зменшилися у два рази?

3.7. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

3.7.1. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

“Визначення величини артеріального тиску за допомогою ємнісного датчика”

Мета роботи: оволодіти методом вимірювання і реєстрації тиску крові за допомогою ємнісного датчика (сфігмоманометра).

Прилади і матеріали: сфігмопристрій з приймачем пульсу, манжетка з манометром, реєструючий пристрій (осцилограф, самописець чи векторкардіоскоп).

Контрольні питання для підготовки до лабораторної роботи

1. Датчики, їх основні види і типи.
2. Вільні електричні коливання. Коливальний контур. Власна частота коливань.
3. Ємність. Конденсатори, їх види і способи з'єднання.
4. Вимушені електричні коливання.
5. Кінематика плинну рідини.
6. Пульсові хвилі. Сфігмографія.

Додаткова література

1. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1992.
2. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1987. – С. 370–373; 204–210; 171–174; 323–326.
3. Ливенцев Н.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1978. – Ч. 1, с. 242–249.

Короткі теоретичні відомості

Пристрій сфїгмографічний (від грец. σφύζοζ – пульс і γράφο – пишу) використовується для реєстрації пульсових хвиль. За його допомогою можна фіксувати малі зміни об'ємів замкнених порожнин, отримувати криві коливань стінок артерій і вен. Він дає змогу стежити за змінами артеріального тиску протягом кардіоциклу. За наявності двох сфїгмопристроїв можна визначити швидкість поширення пульсової хвилі по судині.

Принцип вимірювання тиску за допомогою сфїгмоманометра базується на перетворенні малих змін об'єму в зміну частоти електричних коливань Δv коливального контура. Зміна тиску в судині ΔP супроводжується зміщенням поверхні шкіри (пунктирна лінія на рис. 3.42), яке викликає зміну об'єму ΔV приймача пульсу (ПП). По з'єднувальній трубці T ці зміни передаються в порожнину датчика D , одна із стінок якого є одночасно і пластинною конденсатора, що й призводить до зміщення цієї пластини. Ємність конденсатора змінюється, а значить і змінюється власна частота коливального контура:

$$(v \pm \Delta v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C \pm \Delta C)}}$$

Детектор виділяє зміну напруги ΔU , величина якої залежить від ΔC , а значить і від ΔP . Тобто має місце такий ланцюжок перетворень: $\Delta P \rightarrow \Delta V \rightarrow \Delta C \rightarrow \Delta v \rightarrow \Delta U$. Ці зміни напруги ΔU подаються на Y -пластини осцилографа і реєструються. За їх величиною і знаходять зміни тиску ΔP .

Технічні характеристики:

1. Максимальна різниця тисків у камерах I і II датчика – 5 мм рт.ст.

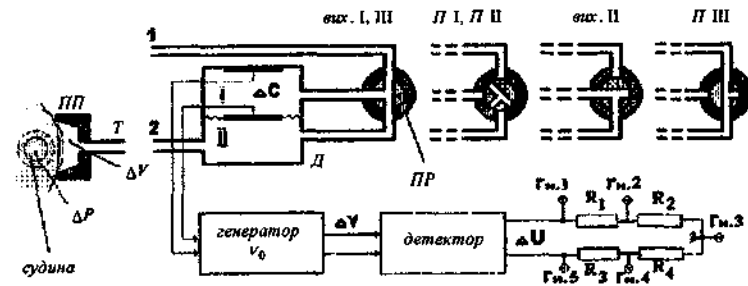


Рис. 3.42

2. Верхня межа компресивного тиску в камерах (при одночасній його подачі) – 200 мм рт.ст.

3. Чутливість – не менше 5 мВ/мм рт.ст.

4. Нелінійність амплітудної характеристики – 10–15%.

Режими роботи:

Вих. I, III – камери I і II з'єднані між собою і патрубком 1 – вихідна позиція.

PI, PII – камери I, II і патрубок 1 роз'єднані (якщо приймач пульсу ПП під'єднаний до патрубку 2, то зміна тиску в ПП надходить в камеру II) – робочий режим.

Вих. II – камери I і II з'єднані між собою, патрубок 1 – від'єднаний (режим вирівнювання тиску в камерах, застосовується при реєстрації пульсових хвиль у венах).

PIII – камера I роз'єднана з камерою II, і камера II з'єднана з патрубком 1 (застосовується для визначення синхронної різниці пульсових тисків у різних ділянках судини).

Хід роботи

Підключити сфїгмопристрій до осцилографа. Перевірити наявність приймача і манжетки з манометром.

Завдання 1. Реєстрація артеріальних пульсацій.

1. Зафіксуйте приймач пульсу на плечовій артерії.

2. Поставте перемикач ПР в положення I.

3. Під'єднайте до штуцера II гумовий трубопровід приймача пульсу.

4. Переведіть кран у положення PI, PII.

5. Налаштуйте осцилограф на необхідну чутливість для візуального спостереження сфігмоколивань.

6. Замалюйте коливання, які спостерігаєте.

7. Кран поверніть у початкове положення Вих. I, III.

Завдання 2. Визначення систолічного артеріального тиску.

1. Одягніть манжетку на передпліччя руки, на якій закріплено приймач пульсу.

2. Отримайте стійке зображення пульсової хвилі в променевій артерії на екрані осцилографа.

3. Виконайте повільне нагнітання повітря в манжетку, спостерігаючи за амплітудою пульсацій. Визначте величину тиску в манжетці, коли пульсації зникнуть. Величина тиску в манжетці дорівнює систолічному артеріальному тиску ($P_{сис} = P_m$).

4. Поверніть кран у початкове положення Вих. I, III.

Завдання 3. Реєстрація об'ємного пульсу передпліччя.

1. Поставте перемикач ПР в Вих. I, III.

2. Під'єднайте до штуцера II трубку манжетки.

3. Під'єднайте до штуцера I ручний насос з манометром.

4. Здійсніть повільне нагнітання повітря в систему до тиску 30 мм рт.ст.

5. Переведіть перемикач ПР у положення П I і П II.

6. Підберіть необхідну чутливість осцилографа для спостережень змін об'ємного пульсу передпліччя.

7. Замалюйте криву, яка спостерігається, в зошит.

8. Зменшіть тиск до нуля, відкривши вентиль манометра.

9. Кран переведіть у положення Вих. I, III.

Завдання 4. Реєстрація залежності амплітуди об'ємного пульсу від тиску в манжетці.

Схема комутації пристрою, манжетки і манометра аналогічна, як і при виконанні завдання 3.

1. Здійсніть повільне нагнітання повітря в манжетку до тиску, який перевищує систолічний на 10 мм рт.ст.

2. Переведіть кран ПР в П I, П II. Переконайтесь у відсутності пульсових коливань на екрані (повинні спостерігатись пульсації тиску, які викликані змінами об'єму манжетки в проксимальній ділянці).

Виміряйте величину пульсацій. Поставте ПР в Вих. I, III.

Забороняється різко зменшувати тиск, якщо кран не переведено в положення "Вих. I, III" – 0.

3. Повільно зменшіть тиск на 10 мм рт.ст. і переведіть кран в положення П I, П II.

4. Виміряйте ΔP . Повторіть процедуру 2 і 3, зменшуючи тиск кожний раз на 10 мм рт.ст., поки P_m не стане дорівнювати нулю.

5. Виміряйте значення амплітуди пульсових коливань ΔP для всіх значень тиску в манжетці P_m і занесіть до таблиці.

6. Побудуйте графік (рис. 3.43). Відзначте систолічний тиск. Максимальний пульсовий тиск має величину, близьку до діастолічного тиску.

Величина $\Delta P_x = P_{сис} - P_{діаст}$ дорівнює ΔP_y . Таким чином, ми можемо проградувати шкалу пульсових коливань. Заповніть таблицю повністю, виконавши перехід від мм рт.ст. до Па (1 мм рт.ст. = 133 Па).

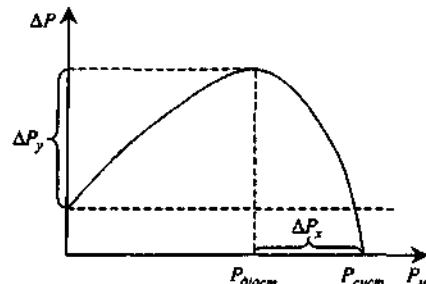


Рис. 3.43

Таблиця. Залежність амплітуди пульсових коливань від тиску в манжетці

P_m	мм рт.ст.								
	кПа								
P	мм								
	кПа								

Контрольні питання

1. Назвіть значення основних параметрів, якими характеризується датчик (чутливість, функція перетворення).

2. Як зміниться власна частота коливального контура, якщо відстань між пластинами плоского конденсатора збільшити у два рази?
3. Знайти зміну частоти коливального контуру $\Delta \nu$ при збільшенні відстані між пластинами плоского конденсатора від $d_1 = 4$ мм до $d_2 = 12$ мм, площа пластин $S = 4$ см², індуктивність котушки $L = 2$ мГн.
4. Визначити, у скільки разів сума поперечних перерізів судинно-капілярної ділянки більша, ніж поперечний переріз аорти, якщо об'ємна швидкість течії в аорті 5.6 л/хв, її діаметр 3.0 см. Середня лінійна швидкість течії крові в капілярі $v_{сер} = 0.5$ мм/с.
5. Порівняти величину густин кінетичної та потенціальної енергії потоку крові в аорті, якщо $R_{аорт} = 90$ мм рт. ст., хвилинний об'єм 5.6 л/хв, частота пульсу 70 уд/хв, діаметр аорти 3 см.

3.7.2. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2 “Напівпровідниковий діод”

Мета роботи: вивчення принципу дії напівпровідникового діода й одержання його вольт-амперної характеристики.

Прилади та матеріали: германієвий діод, міліамперметр, мікроамперметр, два вольтметри, джерело ЕРС, перемикач, з'єднувальні провідники.

Контрольні питання для підготовки до лабораторної роботи

1. Види провідності в напівпровідниках (електронна та діркова, власна і домішкова).
2. Напівпровідники *n*- та *p*-типу.
3. Контактні явища в напівпровідниках.

Додаткова література

1. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1992.
2. Ливенцев Н.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1974. – С. 279–283.
3. Ливенцев Н.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1978. – Ч. 1, с. 242–249.

Короткі теоретичні відомості

Тонкий шар напівпровідника, в якому має місце просторова зміна типу провідності від електронної до діркової, називається електронно-дірковим або *p-n*-переходом. Електропровідність

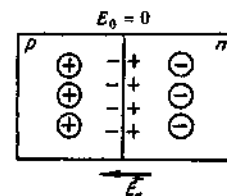


Рис. 3.44

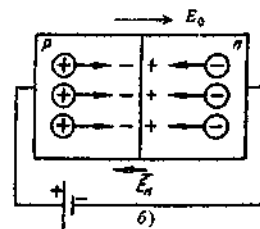
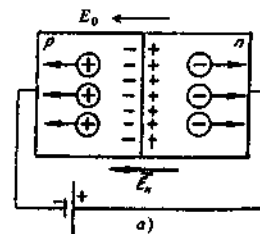


Рис. 3.45

p-n-переходу залежить від напрямку струму: в одному напрямку (прямо-му) вона велика, в іншому (зворотному) – мала.

Розглянемо *p-n*-перехід за відсутності зовнішнього поля. Вільні електрони дифундують із *n*-області в *p*-область, де їх концентрація набагато менша і там рекомбінують з дірками. В результаті цього в *p*-області залишаються негативно заряджені акцепторні атоми, в *n*-області – позитивно заряджені донорні атоми. Оскільки акцепторні та донорні атоми нерухомі, на межі *p-n*-переходу виникає подвійний шар просторового електричного заряду (рис. 3.44), який називають запираючим шаром. Він створює контактне електричне поле E_k , яке протидіє подальшій дифузії основних носіїв. Різниця потенціалів, якою характеризується контактне поле, має величину кілька десятків мілівольт, її називають контактною

різницею потенціалів або висотою потенціального бар'єра. В умовах теплової рівноваги і при відсутності зовнішнього електричного поля струм через *p-n*-перехід дорівнює нулю: існує динамічна рівновага між струмом неосновних і основних носіїв.

Зовнішнє електричне поле змінює висоту бар'єра і порушує рівновагу потоків основних та неосновних носіїв. Якщо зовнішнє електричне поле має напрямок, протилежний до контактного E_k , то висота потенціального бар'єра зменшується (рис. 3.45). Через контакт йтиме струм, величина якого залежить від величини зовнішнього поля E_0 . Цей напрям називається прямим або пропусковим.

Якщо напрямок зовнішнього електричного поля E_0 збігається з напрямком E_k , то модулі їхніх напруженостей додаються, що й

приводить до збільшення контактної різниці потенціалів. За цієї умови струм основних носіїв через контакт буде дорівнюватиме нулю. Такий напрямок поля і відповідний спосіб підключення називають зворотним.

На рис. 3.46 показана залежність сили струму від напруги. Кривій OA відповідає прямий струм, а кривій OB – незначний обернений струм, що обумовлений рухом неосновних носіїв електричного заряду.

Як видно з графіка, сила прямого струму залежить від напруги – вона збільшується із збільшенням напруги. Сила зворотного струму від напруги практично не залежить. Вона визначається кількістю неосновних носіїв, які виникають за одиницю часу. А ця кількість незмінна при фіксованих зовнішніх умовах (температура, освітленість тощо). Умовне зображення напівпровідникового діода показано на рис. 3.47.

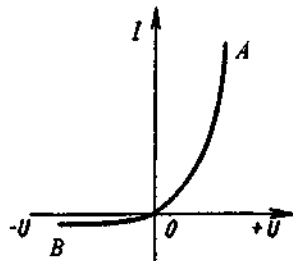


Рис. 3.46

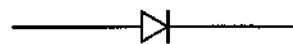


Рис. 3.47

Порядок виконання роботи

1. Зібрати електричне коло за схемою, показаною на рис. 3.48.
2. З'єднати за допомогою провідників зібране коло з джерелом живлення.
3. Поставити повзунок реостата в крайнє положення (як зображено на схемі).

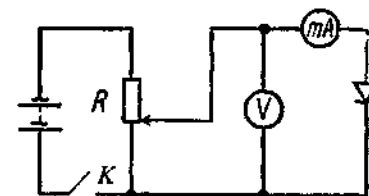


Рис. 3.48

4. Подати напругу на реостат (потенціометр) замкнутого кола за допомогою ключа K .

5. Переміщуючи повзунок вздовж реостата, спостерігати за показниками вольтметра і міліамперметра. Записати 5–6 показників вольтметра і відповідних їм показників міліамперметра. Дані занести в таблицю.

6. Змінити полярність напруги, яка подається на діод (витягнути вилку з діодом із гнізда, повернути її на 180° і знову увімкнути).

7. Дії п. 5 повторити.

8. За знятими показниками вольтметра і міліамперметра побудувати вольт-амперну характеристику.

9. Обчислити коефіцієнт випрямлення для максимального значення напруги, яка використовується в роботі.

Контрольні питання

1. Поясніть фізичні процеси, які відбуваються в $p-n$ -переході за відсутності зовнішнього електричного поля.
2. Перерахуйте способи увімкнення діода в електричне коло. Намалюйте схеми.
3. Які фізичні процеси лежать в основі роботи діода як випрямляча?
4. За якими характеристиками і параметрами оцінюється діод?
5. Які характеристики діода є нелінійними і чому?
6. У чому полягає подібність характеристик діодів та біологічних тканин?
7. Як впливає підвищення температури на концентрацію вільних носіїв?

3.7.3. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3 “Вивчення роботи транзистора”

Мета роботи: ознайомитись з принципом роботи транзистора, навчитись отримувати входні та вихідні характеристики і за ними визначати основні параметри транзистора.

Прилади та обладнання: транзистор, міліамперметр, мікроамперметр, два вольтметри, два потенціометри, з'єднувальні провідники.

Контрольні питання для підготовки до лабораторної роботи

1. Напівпровідники. Температурна залежність питомого опору.
2. Електронно-дірковий перехід. Контактна різниця потенціалів. Залежність величини контактної різниці потенціалів від напрямку зовнішнього поля.
3. Підсилювачі. Коефіцієнт підсилення.

Додаткова література

1. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1992.
2. Ливенцев Н.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1974. – С. 277–279.
3. Ливенцев Н.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1978. – Ч. 1, с. 110–113; 172–178.

Короткі теоретичні відомості

Транзистор – напівпровідниковий прилад, що складається із двох, близько розміщених *p-n* переходів. Тобто – це напівпровідниковий монокристал, в якому створені три області з різними типами провідності. Залежно від виконуваних функцій їх називають: **емітер** (від лат. *emittio* – випускаю) – область, яка є джерелом вільних носіїв електричного заряду; **колектор** (від лат. *colligo* – збираю, з'єдную) – область транзистора, в яку потрапляють вільні носії електричного заряду, випуще-

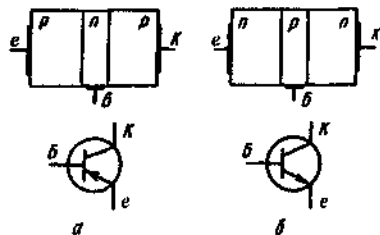


Рис. 3.49

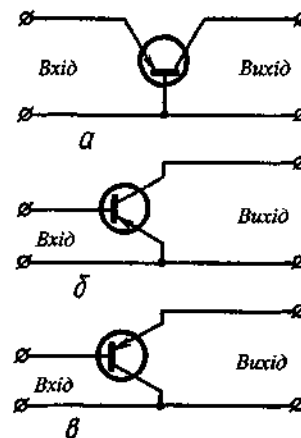


Рис. 3.50

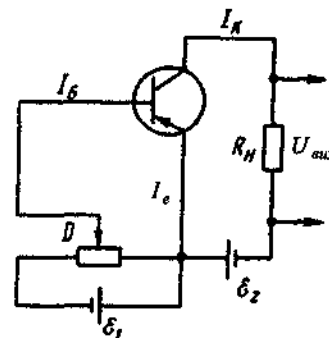


Рис. 3.51

напрямку, а до колекторного переходу набагато більшу напругу в зворотному напрямку. Такий спосіб увімкнення зменшує контактну різницю потенціалів переходу емітер – база і виникає струм, обумовлений рухом дірок I_e . Вільні носії, які при цьому потрапляють в базу, частково рекомбінують, але, завдяки малій товщині бази і низькій концентрації електронів в ній, більшість дірок досягає колекторного переходу внаслідок дифузії. Зворотна

ні емітером. Між емітером і колектором, котрі мають один і той самий тип провідності, знаходиться база (від грец. $\beta\alpha\sigma\iota\zeta$ – основа) – досить тонка область, концентрація вільних носіїв в якій набагато менша, ніж у емітері і колекторі. Якщо транзистор виготовлений так, що база має електронну провідність, то його називають **транзистором *p-n-p* типу** (рис. 3.49, а), якщо ж база має діркову провідність, то – ***n-p-n* типу** (рис. 3.49, б).

Транзистор використовують для підсилення сили струму, напруги, потужності, а також для узгодження параметрів у складних електричних схемах. Залежно від призначення, можливі три способи включення транзистора: із спільною базою (рис. 3.50, а), із спільним емітером (рис. 3.50, б) і спільним колектором (рис. 3.50, в).

Розглянемо фізичні процеси, які відбуваються в *p-n-p*-транзисторі, увімкненому за схемою із спільним емітером (рис. 3.51). Прикладемо до емітерного переходу невелику напругу в прямому

напруга, що прикладена до колектора, створює сильне електричне поле $E = U_x / d$, d – товщина p - n -переходу, вона має досить малі значення (типово 50–60 мкм). Це поле втягує дірки, що є в базі, в колектор, збільшуючи їх швидкість. Таким чином, всі дірки, які досягли колекторного переходу, будуть брати участь в утворенні струму колектора I_K , їх концентрацію можна виразити як:

$$n = n_e - n_g + n_k,$$

де n_e – концентрація дірок, випущених емітером, n_g – концентрація тих дірок, які рекомбінували в базі, n_k – концентрація вільних носіїв власне в колекторі.

Різниця потенціалів між емітером і колектором у десятки разів більша за різницю потенціалів між емітером і базою. А це означає, що змінами струму бази можна керувати вихідним струмом I_K , зміни якого будуть відповідними за формою I_e , але значно більшими за величиною.

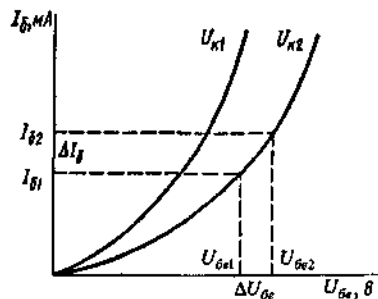


Рис. 3.52

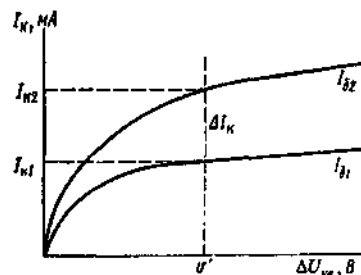


Рис. 3.53

Транзистори характеризуються сукупністю вхідних і вихідних статичних характеристик:

1. **Вхідні характеристики** відображають залежність вхідного струму від вхідної напруги: $I_B = f(U_{be})$ при $U_{ce} = \text{const}$ (рис. 3.52).

2. **Вихідні характеристики** відображають залежність вихідного струму від вихідної напруги при сталому вхідному струмі (рис. 3.53):

$$I_K = f(U_{ce}) \text{ при } I_B = \text{const}.$$

За цими характеристиками визначають основні параметри транзистора:

1. **Вхідний опір** $R_{вх} = \Delta U_{be} / \Delta I_B$ при $U_{ce} = \text{const}$.

2. **Вихідний опір** $R_{вих} = \Delta U_{ce} / \Delta I_K$ при $I_B = \text{const}$.

3. **Коефіцієнт підсилення струму** $\beta = \Delta I_K / \Delta I_B$ при $U_{ce} = \text{const}$.

Хід роботи

Схема пристрою наведена на передній панелі приладу (рис. 3.54).

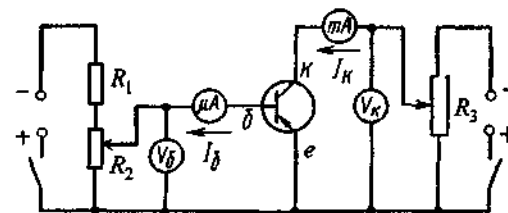


Рис. 3.54

Напруга живлення 6 В. На вхідну ділянку напруга подається через дільник із опорів R_1 і R_2 . За допомогою потенціометра R_2 можна плавно змінювати напругу, що подається на емітерний перехід (U_{be}). Ця напруга вимірюється мілівольтметром, а струм I_B – мікроамперметром. За допомогою R_3 можна плавно змінювати напругу вихідного кола, яка вимірюється мілівольтметром, якщо перемикач на панелі знаходиться в положенні “ U_{ce} ”. Для вимірювання струму I_K необхідно перемикач мікрометра перемістити в положення “ I_K ”.

Завдання 1. Отримання вхідних і вихідних статичних характеристик транзистора і визначення його параметрів.

1. Повернути ручки регуляторів напруги на базі та колекторі в крайнє ліве положення. Увімкнути вилку живлення в мережу так, щоб “+” вилки збігався з “+” розетки.

2. Регулятором напруги на колекторі встановити 2 В.

3. Підтримуючи напругу на колекторі постійною, змінювати напругу на емітерному переході потенціометром R_2 і виміряти струм через перехід. Значення напруги змінювати відповідно до таблиці 1.

Таблиця 1.

$U_{be}, мВ$	0	50	100	150	200	250	300
$I_b, мкА$							

4. Регулятором напруги R_2 встановити струм бази $I_b = 20$ мкА.

5. Перемикачем напруги на панелі встановити положення " $U_{ке}$ ".

Регулятором напруги R_3 встановлювати значення напруги відповідно до таблиці 2, при цьому підтримувати за допомогою регулятора R_2 струм $I_b = 20$ мкА.

6. Перемикач на панелі – в положення " I_k ". Занести значення сили струму I_k в таблицю 2.

7. Повторити пункти 4 і 5 з тією різницею, що струм бази $I_b = 40$ мкА.

Таблиця 2.

$I_b = 20$ мкА	$U_k, В$	0.1	0.2	0.5	0.8	1	2	3	4	5
	$I_k, мА$									
$I_b = 40$ мкА	$U_k, В$									
	$I_k, мА$									

Завдання 1. Опрацювання результатів.

1. За отриманими даними побудувати одну вхідну і дві вихідні характеристики.

2. Обчислити вхідний опір транзистора $R = \Delta U_{be} / \Delta I_b$ при $U_k = 2$ В.

3. Обчислити вихідний опір транзистора $R_{вих} = \Delta U_{ке} / \Delta I_k$ при $I_b = 40$ мкА.

4. Обчислити коефіцієнт підсилення струму $\beta = \Delta I_k / \Delta I_b$ при $\Delta U_{np} = \Delta U_{ze}$.

Контрольні питання

1. Що таке транзистор? Які види транзисторів ви знаєте? Як називаються області транзистора?

2. Які процеси відбуваються в $p-n$ -переході за відсутності зовнішнього електричного поля?
3. Що таке контактна різниця потенціалів?
4. Які бувають схеми увімкнення транзистора?
5. Поясніть фізичні процеси, які відбуваються, якщо транзистор увімкнено за схемою із спільним емітером.
6. Перерахуйте основні параметри транзистора і поясніть, яким чином їх можна отримати.
7. Намалюйте загальний вигляд сукупності вхідних характеристик.
8. Намалюйте загальний вигляд сукупності вихідних характеристик.
9. Наведіть приклади застосування транзистора.

3.7.4. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4

"Електрофоретичний метод визначення рухливості іонів"

Мета роботи: оволодіти методом електрофорезу для визначення рухливості іонів.

Обладнання: електрофоретична установка, буферний розчин-електроліт для ванни, електроліт для визначення рухливості іонів, секундомір, лінійка.

Контрольні питання для підготовки до лабораторної роботи

1. Електричний струм і його основні характеристики.
2. Питома електропровідність. Закон Ома в диференціальній формі.
3. Електропровідність речовин. Рухливість та концентрація вільних носіїв.
4. Електрофорез та його використання.

Додаткова література

1. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996.
2. Ливенцев Н.М. Курс физики. – М.: Высшая школа. – С. 227–232.
3. Ремизов А.Н. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1976. – Ч. 2, с. 64–67.
4. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1987. – С. 286–290; 342–343.

Короткі теоретичні відомості

У грубому (але достатньому для наших цілей) наближенні можна вважати, що на іон в електроліті діють дві сили: сила електричного поля $F = qE$, де q – заряд іона, E – напруженість електричного поля, і сила опору F_m електроліта. Сила F_m

обумовлена дією молекул, які оточують іон; ця дія приводить до того, що іон, подібно до кульки у в'язкому середовищі, при своєму русі долає опір, величина якого пропорційна швидкості v :

$$F_m = -kv.$$

Тільки в початковий момент часу іон рухається прискорено, потім $F = F_m$, а рух іона між електродами можна розглядати як рівномірний і прямолінійний, тому

$$qE = kv, v = qE/k.$$

Пригадуючи означення рухливості $b = v/E$, бачимо, що рухливість у нашому випадку дорівнює:

$$b = q/k.$$

Установка для визначення рухливості іонів (рис. 3.55) являє собою електролітичну ванну (на схемі це посудини 5 і 6), заповнену електролітом. У ванні знаходяться електроди 1 і 4. На скляну пластину 3 накладається спеціальний папір 2 розмірами $2,5 \times 40$ см, змочений тим самим електролітом. Від джерела постійного струму до електродів підводиться напруга, яка вимірюється вольтметром.

Незначну кількість (0,005–0,01 мл) електроліту, рухливість іонів якого визначається, наносять на середину паперової смужки (якщо електроліт безколірний, то фарбування проводять після переміщення іонів в електричному полі).

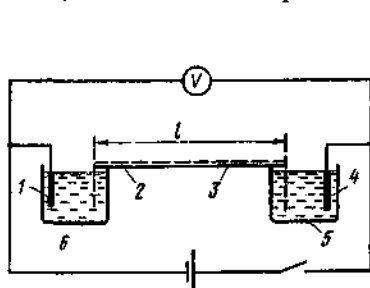


Рис. 3.55

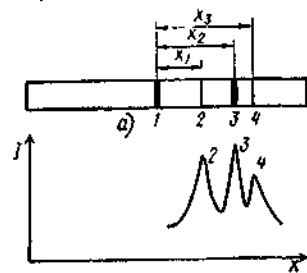


Рис. 3.56

Для того щоб визначити рухливість іонів досліджуваного електроліту, необхідно знати швидкість цих іонів v і напруженість поля E , в якому вони переміщувалися. При

замиканні електричного кола іони починають переміщуватись по смужці фільтрувального паперу і за час t , який фіксується секундоміром, переміщуються на деяку відстань x . На рис. 3.56 показана електрофореграма: 1 – місце нанесення електроліту, який складається із трьох фракцій; 2, 3, 4 – місця знаходження фракцій після розділення в електричному полі. Вимірявши відповідні позиції x_i , знайдемо швидкість:

$$v_i = x_i / t.$$

Як відомо, $E = -\text{grad}U$, або у випадку однорідного поля

$$E = U/l,$$

де U – спад напруги, який вимірюється вольтметром, а l – відрізок, на якому відбувається спад напруги, в даному випадку – це довжина фільтрувального паперу, який лежить на скляній підкладці 3. Результати вимірювань підставимо в формулу:

$$b = v/E = xl/Ut.$$

Щоб запобігти висиханню фільтрувального паперу протягом досліду, пристрій розміщують під ковпаком, де створюється насичена пара.

Рухливість іонів – величина, характерна для даного типу іонів. Тому за рухливістю можна визначити вид іона, або, якщо є суміш іонів, розділити їх в електричному полі.

У медицині електрофорез використовують для аналізу білкового складу сироватки крові. Фракції білків (альбуміни, α -, β -, γ -глобуліни) мають різні рухливості, тому можуть бути розділені електричним полем. Після отримання електрофореграм їх підсушують і фарбують спеціальними барвниками. Якщо використати фотометричні методи для дослідження електрофореграм, то можна знайти кількісні співвідношення між цими фракціями. Електрофорез використовують також для аналізу білкового складу шлункового соку, розділення нуклеїнових кислот, амінокислот та інших біологічно важливих речовин.

Хід роботи

1. Вивчити будову електрофорезичної установки ПВ ЕФ-1.
2. Регульовальними гвинтами встановити камеру горизонтально.

РОЗДІЛ 4. ЕЛЕКТРОННА МЕДИЧНА АПАРАТУРА

“У міру поглиблення наших знань з біології ми зіткнемося з тим, що різниця між біологією і електронікою буде все більше стиратись”.

Фрімен Дайсон

3. Залити буферним розчином.

4. Підготувати смужки хромографічного паперу (нарізати вздовж волокон смуги 25×400 мм, змочити буферним розчином і закрити так, щоб кінці смуг були опущені в буфер).

Ванну щільно закрити!

5. Через отвори в кришці нанести бюреткою досліджуваній препарат.

Таблиця.

№	$x, \text{мм}$	$\Delta x, \text{мм}$	Δx^2	$l, \text{мм}$	$\Delta l, \text{мм}$	Δl^2
1						
4						
Середні	$\Sigma \Delta x^2 =$		$\Sigma \Delta l^2 =$			

5. Підключити ванну до блока живлення (дотримуватись полярності), увімкнути в мережу. Зафіксувати час, за який відбудеться помітне зміщення забарвленої смужки вздовж паперу. Виміряти їх і дані занести в таблицю.

Обробка результатів вимірювань

1. Розрахуйте рухливість.
2. Визначте похибку вимірювань.

Контрольні питання

1. Від чого залежить густина струму в провіднику?
2. Що є носіями електричного заряду в тканинах організму?
3. Знайти густину струму в електроді, якщо концентрація іонів у ньому $n = 10^5 \text{ см}^{-3}$; їх рухливості $b_+ = 4,65 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$; $b_- = 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ і напруженість електричного поля $E = 10 \text{ В}/\text{см}$. Вважаючи густину струму всюди однаковою, знайти силу струму, якщо площа кожного електрода $S = 1 \text{ дм}^2$. Іони одновалентні.
4. Знайти кількість іонів йоду, які будуть введені пацієнту за 10 хв, при густині струму $0,05 \text{ А}/\text{см}^2$ з електрода площею 5 см^2 .

Електронна медична апаратура – один з основних розділів дисципліни “Біофізика, інформатика і медична апаратура”. Значення глибоких знань і практичних навичок, які повинні мати випускники вищих медичних навчальних закладів в області використання сучасної медичної апаратури для охорони здоров’я, важко переоцінити.

Нині в Україні склалося достатньо складне положення з підготовкою лікарів, які є спеціалістами в області використання сучасної електронної медичної техніки для діагностики та терапії. Вищі медичні навчальні заклади практично не готують таких спеціалістів. У навчальних планах немає спеціальної дисципліни з сучасної медичної техніки. По суті тільки в цьому порівняно невеликому розділі курсу “Біофізика, інформатика і медична апаратура” студенти знайомляться з принципами роботи медапаратури. Окремі відомості з питань стосовно медапаратури викладаються в таких дисциплінах, як “Факультетська терапія з фізіотерапією”, “Променева діагностика і променева терапія”, “Радіаційна медицина” і в спецкурсах на вибір у субординатурі “Радіологія”, “Клінічна лабораторна діагностика” та в деяких інших.

Разом з тим необхідність у таких спеціалістах існує. Доцільність поглибленої підготовки студентів-медиків в області сучасної медичної апаратури впливає з таких факторів:

1. Кількість спеціалістів, діяльність яких пов’язана з медапаратурою і які працюють в медичних лікувальних закладах у розвинутих країнах, становить приблизно 20–30 % від загального числа медичних працівників. У нас ця цифра значно менша.

2. Швидко зростає кількість і якість сучасних медичних приладів, які використовуються при діагностиці, лікуванні та профілактиці різних захворювань. Прикро, але випускники

вищих медичних навчальних закладів України недостатньо уявляють собі можливості і напрямки використання сучасних електронних медичних апаратів і систем.

3. Зростає увага різних закордонних і вітчизняних, комерційних і некомерційних організацій до діяльності, пов'язаної з використанням сучасної медичної техніки. Велика увага надається проблемам медичної техніки (біомедичної інженерії) вченими в різних країнах. Про це говорить принаймні той факт, що існує Всесвітня федерація медичної і біологічної інженерії, яка кожного року проводить міжнародні симпозиуми, а раз на три роки – Всесвітні конгреси з медичної фізики і біомедичної інженерії.

У Національному медичному університеті імені О.О. Богомольця спільно з іншими провідними вузами України (Національним технічним університетом України “Київський політехнічний інститут”, Київським національним університетом імені Тараса Шевченка, Національним авіаційним університетом та іншими) розпочата велика і складна робота, яка має за мету підняти рівень використання сучасної медичної техніки для охорони здоров'я населення України, а саме:

– забезпечити поглиблену підготовку лікарів в області використання сучасної медапаратури для діагностики, профілактики і лікування різних захворювань;

– забезпечити поглиблену підготовку спеціалістів з вищою інженерно-технічною й університетською освітою в області проектування, експлуатації і ремонту сучасної медапаратури.

У даному розділі містяться короткі теоретичні відомості про медичну апаратуру (класифікація, техніка безпеки при роботі з нею, технічні характеристики медапаратури, питання взаємодії фізичних полів з біооб'єктами), методичні розробки лабораторних робіт з циклу “Електронна медична апаратура”, перелік контрольних питань і завдань для самостійної роботи студентів.

4.1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ЕЛЕКТРОННУ МЕДИЧНУ АПАРАТУРУ (ЕМА)

Медична електроніка – галузь науки і техніки, яка використовує принципи, методи і прилади фізичної електроніки, для розв'язання медичних задач.

4.1.1. Класифікація електронної медичної апаратури

Узагальнюючи досвід застосування електроніки в медицині, можна сказати, що вона, в основному, використовується для розв'язання таких задач:

- а) отримання первинної медичної інформації;
- б) обробки й автоматичного аналізу отриманої первинної інформації;
- в) створення силових полів для впливу на організм, у тому числі й отримання адекватних подразників (електростимуляція);
- г) моделювання процесів, які відбуваються в організмі;
- д) автоматичне управління органами і системами, протезування органів і систем, слідування за функціональним станом організму пацієнта.

Можна виділити два основних класи електронної медичної апаратури (ЕМА): діагностична і фізіотерапевтична.

1. *Діагностична електронна медична апаратура* призначається для:

- а) реєстрації біопотенціалів (прикладом таких приладів є електрокардіограф, електроенцефалограф, реєстратори міограм, шкірногальванічних реакцій тощо);
- б) реєстрації неелектричних величин (наприклад, ФКГ – фонокардіограф, БКГ – баллістокардіограф тощо);
- в) передачі медичної інформації на відстані (ендо- і телеметрична апаратура);
- г) отримання рентгеноконтрастних зображень;
- д) ультразвукового сканування органів і тканин;
- е) радіоізотопного дослідження функцій органів і систем.

Сучасна медична апаратура, яка реалізує складні діагностичні методи (рентгено- і ультразвукові томографи, аналізатори біопотенціалів тощо), працює, як правило, в комплексі з ЕОМ.

2. *Фізіотерапевтична електронна медична апаратура* використовується для терапевтичної дії на органи і тканини різними фізичними факторами, що створюються цими апаратами. Можна виділити такі типи фізіотерапевтичної апаратури:

а) апаратура, в якій використовується дія постійного фізичного поля (апарати для гальванізації, електрофорезу, франклінізації);

б) низькочастотна ЕМА (частоти до 20 кГц; апарати для електростимуляції, електроімпульсації);

в) високочастотна ЕМА (частота 70 кГц – 30 МГц; апарати для дарсонвізації, діатермії, індуктотермії);

г) ультрависокочастотна ЕМА (частота 30–300 МГц; апарати для УВЧ-терапії);

д) надвисокочастотна і крайньовисокочастотна ЕМА (частота понад 300 МГц; НВЧ-апарати, апарати КВЧ-терапії).

Крім перерахованих вище, у фізіотерпії використовуються апарати для отримання рентгенівського і гамма-випромінювання, потоків елементарних частинок, ультразвукового і лазерного випромінювання тощо; їх застосовують для дії на патологічні ділянки органів і тканин.

Електронна техніка широко використовується також в інших галузях медичної науки і практики:

а) в експериментальній медицині і наукових дослідженнях;

б) в організації охорони здоров'я і профілактичній медицині;

в) у навчальному процесі.

У цих напрямках відбувається створення складних вимірювальних комплексів, функціональних кабінетів, обчислювальних центрів, обладнаних різноманітною електронною технікою.

4.1.2. Техніка безпеки

Медична апаратура має бути безпечною при всіх передбачених функціональними можливостями і вказаних у правилах користування умовах її експлуатації. Захист досягається дотриманням трьох основних вимог:

1) правильною конструкцією апарата, яка гарантує безумовну безпеку;

2) використанням спеціальних засобів зовнішнього захисту, які забезпечують умовну безпеку;

3) зазначенням умов, за яких робота з обладнанням є безпечною (описова безпека).

За способом захисту персоналу і пацієнта від електроудару і електротравми все медичне устаткування, в якому використовується зовнішнє живлення, ділиться на п'ять класів (окремо виділяється устаткування з внутрішніми джерелами живлення, наприклад, батареями).

Клас 0 – апаратура має тільки один основний захист (ізоляцію); це – побутова апаратура, а також апаратура, що використовується для господарських потреб медичних закладів, вона не призначена для безпосередньої роботи з пацієнтом.

Клас I – апаратура, котра, крім основного захисту, має і додатковий у вигляді заземлення, яке здійснюється одночасно із вмиканням приладу в мережу за допомогою вилки з провідником заземлення.

Клас 0I – апаратура класу 0 і I, яка має спеціальну клему для заземлення приладу окремим провідником.

Клас II – апаратура цього класу характеризується використанням, крім основної ізоляції, ще й додаткової – у вигляді посиленої ізоляції устаткування або його частин, які знаходяться під напругою, небезпечною для життя пацієнта та персоналу. Це устаткування не має захисного заземлення, але може мати клему для робочого заземлення з метою зменшення шумів від мережі.

Клас III – апаратура цього класу характеризується низькою (не більш 24 В) напругою живлення, що є, поряд з основною ізоляцією, додатковою мірою захисту від електроудару, причиною якого може бути мережа. Це обладнання не має внутрішніх і зовнішніх кіл з високою напругою. Обладнання III класу, як правило, не заземлюється.

За допустимим струмом відтоку (струми через ізоляцію на корпус, а при дотику до нього людиною – струми через тіло людини) розрізняють такі типи електромедичних приладів (міжнародна класифікація):

H – прилади з нормальним ступенем захисту (основна ізоляція струмопровідних частин); еквівалентні класу 0, I, 0I; можливий струм відтоку $I \approx (0,25-0,5) \text{ мА}$;

B – підвищений ступінь захисту; прилади еквівалентні класу II [$I \approx (0,1 - 0,25) \text{ мА}$];

BF – прилади з підвищеним ступенем захисту й ізольованою від пацієнта робочою частиною [$I < (0,1 - 0,25) \text{ мА}$];

GF – прилади з найвищим ступенем захисту й ізоляцією робочої частини, котра має контакт з внутрішніми органами (особливо з серцем); струм відтоку $I < (0,01 - 0,05) \text{ мА}$.

4.1.3. Правила безпеки

1. У разі підозри несправності під час підготовки приладу до роботи необхідно від'єднати його від мережі. Несправний прилад категорично забороняється використовувати та експлуатувати. Підозра у несправності виникає при нестабільній роботі вимірювальних та індикаційних пристроїв, відсутності або неможливості плавної регуляції приладу, виникненні підозрілих шумів, тріску, запахів тощо.

2. Перешкоди (шуми) не можна усувати, накладаючи додатковий електрод заземлення на пацієнта, оскільки при цьому можливий небезпечний витік струму крізь тіло пацієнта. Ймовірність такої загрози особливо велика при використанні декількох вимірювальних приладів; якщо таке заземлення все ж необхідне, то воно має бути єдиним (винятком є заземлення двома нейтральними електродами при діатермії).

3. Заземлення шляхом під'єднання до труб опалення та водопроводу не можна вважати задовільними, оскільки завжди існує ймовірність, що в іншому приміщенні на цю ж трубу заземлено прилад із значним витоком струму, який може поширитися на пацієнта й обслуговуючий персонал.

4. Якщо одночасно використовується декілька приладів, вони повинні мати одну спільну точку заземлення. Не можна під'єднувати прилади до "землі" послідовно, у цьому випадку утворюється "петля заземлення", по якій циркулюють струми втрат.

5. Заміна патронів, вилок та інших з'єднувачів повинна виконуватись лише фахівцями, хоча на перший погляд ця робота здається досить простою.

6. Забороняється експлуатація приладів за умов, не вказаних у правилах їх використання.

7. Забороняється самостійно змінювати конструкцію апарата без дотримання умов його безпечної експлуатації.

4.1.4. Технічні характеристики ЕМА

Нижче розглядаються основні (найбільш загальні) технічні характеристики електронної медичної апаратури. В основному ці характеристики стосуються діагностичної апаратури і містяться у технічній інструкції. З огляду на ці характеристики, можна судити про переваги приладу, можливості його використання для розв'язання клінічних задач.

1. *Чутливість S* визначається мінімальними змінами сигналу, котрі можна незмінно спостерігати і реєструвати. Завдяки електроніці стало можливим вимірювати надто малі величини, що нас цікавлять (напруги $U = 10^{-6}-10^{-7} \text{ В}$, струми $I = 10^{-9} \text{ А}$, відстані $L = 10^{-8} \text{ м}$ тощо). Якщо пристрій має перетворювач (датчик, підсилювач тощо), чутливість *S* визначається відношенням амплітуди вхідного сигналу $A_{\text{вх}}$ до амплітуди сигналу на виході $A_{\text{вих}}$:

$$S = A_{\text{вх}} / A_{\text{вих}}$$

Наприклад, чутливість датчика тиску $S = 20 \text{ мкВ/мм Нг}$ означає, що при зміні вхідного сигналу (тиску) на 1 мм Нг на виході генерується сигнал амплітудою в 20 мкВ .

Багато приладів налагоджені на стандартну чутливість за допомогою регулювачів сигналу на виході. Так, стандартна чутливість електрокардіографа 10 мм/мВ (максимальна чутливість $15-20 \text{ мм/мВ}$).

2. *Лінійність* – здатність пристрою зберігати постійну чутливість в усьому діапазоні величини, яка вимірюється або реєструється. Для лінійного перетворювача справедливе співвідношення:

$$A_{\text{вих}} = S A_{\text{вх}},$$

де S – постійна чутливість пристрою.

Якщо чутливість пристрою залежить від параметрів вхідного сигналу (наприклад, амплітуди або частоти), то виникають нелінійні спотворення при утворенні сигналу. Для нелінійного перетворювача характерною є така залежність:

$$A_{\text{вих}} = S(A_{\text{вх}}) A_{\text{вх}}.$$

Нелінійні спотворення обумовлені наявністю частотнозалежних опорів у ланцюгу пристрою (опори ємності, індуктивності), а також нелінійністю робочих характеристик перетворювачів та функціональних елементів (транзисторів, електронних ламп тощо).

У технічних характеристиках ЕМА лінійність оцінюється за частотною характеристикою приладів, а також за величиною амплітуди сигналу, який реєструється без спотворення. Відхилення від лінійної характеристики подають у відсотках або у децибелах. Наприклад, “завал” на граничних частотах не більше 10% означає, що амплітуда сигналу, який реєструється, відрізняється від істинної $A_{\text{вх}}$ на $\Delta A = 0,1 A_{\text{вх}}$; затухання на верхніх частотах 10 дБ (або 1 Б) свідчить, що ці величини відрізняються у 10 разів, оскільки за означенням $1 \text{ Б} = \lg(A_2/A_1)$, при $A_2 = 10 A_1$.

Амплітудні спотворення визначають ефективну ширину запису сигналу пристроєм, який записує цей сигнал. У технічних даних приладу, як правило, вказані ефективні значення і відсоток нелінійних спотворень.

3. *Динамічний діапазон* – визначається межами вимірюваної величини ($A_{\text{min}} - A_{\text{max}}$). Мінімальний сигнал A_{min} визначається чутливістю приладу, максимальний A_{max} – нелінійними спотвореннями і міцністю конструкції. Частотний динамічний діапазон залежить від величини нелінійних спотворень на граничних частотах.

4. *Інерційність* визначається здатністю чутливого елемента перетворювача стежити за змінами вхідної величини. Перетворювач, що має більшу інерційність, не здатний реагувати на

сигнал, що швидко змінюється; нелінійні спотворення у цьому випадку перевищують припустимі значення. Наприклад, на першому записуючому пристрої кардіографа неможливо здійснити без спотворення запис фонокардіограми (ФКГ), оскільки рухлива головка пристрою, що записує, не встигає слідкувати за швидкозмінними сигналами ФКГ.

5. *Точність* визначається похибками вимірювань, реєстрації, перетворень. Клас точності вимірювальної медичної апаратури визначають величиною відносної похибки у відсотках. Наприклад, клас точності реографа 2,0 означає, що похибка вимірювань не перевищує 2%.

6. *Стабільність роботи* визначається здатністю пристрою зберігати під час роботи свої характеристики постійними. Стабільність оцінюється зміною фізичної величини на виході ΔA за одиницю часу при незмінному вхідному сигналі A . Величина цього відхилення (дрейф) визначається з відношення

$$D = \frac{\Delta A / A}{\Delta t} \cdot 100\%,$$

де Δt – проміжок часу.

Наприклад, дрейф підсилювача постійного струму не перевищує 0,5% за хвилину. Це означає, що для даного підсилювача протягом хвилини сигнал на виході може змінитися на 0,5% A свого значення за рахунок нестабільної роботи елементів підсилювача. Дрейф може суттєво збільшитись при зміні умов роботи приладу (температури, тиску, вологості). У цьому випадку в паспортних даних приладу приводиться величина дрейфу, віднесена до величини зміни зовнішнього фактора (наприклад, $D = 0,3\% / ^\circ\text{C}$).

Медичні прилади та пристрої повинні задовольняти певним специфічним вимогам, які зумовлені особливостями їх експлуатації у клінічній практиці:

а) атравматизм (безпечність експлуатації, особливо при введенні апаратів або їх частин всередину організму);

б) обмеженість лінійних розмірів пристроїв, які використовуються для отримання даних під час досліджень (особливо внутрішньоорганних та порожнинних);

в) можливість багаторазової стерилізації окремих частин апарата;

г) підвищена надійність, безвідмовність роботи в умовах інтенсивної експлуатації тощо.

4.2. СЕМІНАР “МЕТОДИКА ОДЕРЖАННЯ, РЕЄСТРАЦІЇ ТА ПЕРЕДАЧІ МЕДИКО-БІОЛОГІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ”

Мета семінару: знайомство з принципами дії приладів, які дозволяють проводити виміри різноманітних електричних параметрів.

Контрольні питання для підготовки до семінару

1. Електричне поле і його основні характеристики (напруженість E , потенціал ϕ , зв'язок між ними).
2. Електричний диполь (дипольний момент, диполь в однорідному і неоднорідному електричному полі).
3. Електричне поле в речовині (поляризація та її види, відносна діелектрична проникність і поляризованість речовини, діелектрична проникність біологічних тканин, сегнетоелектрики).
4. П'єзоелектричний ефект і його застосування.
5. Основні характеристики електричного струму (сила та густина струму, закони Ома та Джоуля–Ленца, питома електропровідність, рухливість вільних носіїв).
6. Магнітне поле і його основні характеристики (індукція B і напруженість H магнітного поля). Закон Біо–Савара–Лапласа.
7. Дія магнітного поля на провідники зі струмом та рухомі електричні заряди (сила Ампера, сила Лоренца).
8. Магнітні властивості речовини (намагніченість, магнітна проникність). Діа, пара- і феромагнетики.

Додаткова література

1. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996.
2. Ливенцев Н.М. Курс физики, ч. II. – М.: Высшая школа, 1978. – Гл. 6–10, с. 108–181.
3. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1987. – Разд. 4–5, с. 245–441.

Типові задачі з еталонами розв'язків

Після вивчення теоретичного матеріалу слід ознайомитися з еталонами розв'язку задач і перевірити свою підготовку до семінару.

Задача 1.

Знайти густину струму в електроліті, якщо концентрація іонів у ньому $n = 10^{10} \text{ см}^{-3}$, їх рухливості $b_+ = 4,65 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$, $b_- = 6,55 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$. Напруженість електричного поля $E = 10^3 \text{ В}/\text{см}$. Вважаючи густину струму однаковою, знайти силу струму, якщо площа кожного електрода $S = 4 \text{ см}^2$. Іони одновалентні.

Розв'язок.

Згідно із законом Ома в диференціальній формі густина струму дорівнює $j = \sigma E$, де σ – питома електропровідність. У випадку електролітів з (3.37) маємо:

$$\sigma = n z e (b_+ + b_-).$$

За умовою задачі валентність $z = 1$. Остаточо отримаємо:

$$j = n e (b_+ + b_-) E.$$

За означенням $j = I/S$, тобто сила струму $I = jS$.

Виконаємо обчислення:

$$j = 10^{10} \text{ см}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot (3,65 + 6,55) \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с} \cdot 10^3 \text{ В}/\text{см} = 1,78 \cdot 10^{-9} \text{ А}/\text{см}^2.$$

$$I = 7,1 \cdot 10^{-9} \text{ А}.$$

Задача 2.

Знайти потенціал поля, створеного диполем, заряди котрого $q = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$ та плече $l = 2 \text{ см}$, в точці, яка знаходиться на відстані $r = 20 \text{ см}$ від осі диполя, якщо вектор r і вісь диполя утворюють кут $\alpha = 60^\circ$. Диполь знаходиться в воді.

Розв'язок.

Потенціал поля, створеного диполем в достатньо віддаленій точці $r \gg l$, визначається за формулою (3.16):

$$\varphi = \frac{p \cos \alpha}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2},$$

де ϵ – відносна діелектрична проникність середовища, її значення для води можна знайти в таблиці ($\epsilon = 81$), $p = ql$ – електричний момент диполя. Виконаємо обчислення:

$$\varphi = \frac{2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 0,5}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \cdot 0,04 \text{ м}^2} = 0,1 \text{ В}.$$

Задача 3.

Лінійний нескінченно довгий провідник зі струмом силою I робить петлю радіусом R . Знайти напруженість магнітного поля в центрі петлі.

Розв'язок.

Напруженість магнітного поля в точці O дорівнює геометричній сумі напруженостей полів, створених нескінченно довгим провідником H_1 і коловим струмом H_2 (рис. 4.1). Згідно з (3.48)

$$H_1 = I/2\pi R,$$

де R – відстань від точки O до провідника. А напруженість поля, створеного коловим струмом H_2 відповідно до (3.47), дорівнює:

$$H_2 = I/2R.$$

Скориставшись правилом свердлика, бачимо, що напрямки векторів H_1, H_2 збігаються, тому геометричну суму можна замінити арифметичною:

$$H = \frac{I}{2\pi R} + \frac{I}{2R} = \frac{\pi+1}{2\pi} I.$$

Рис. 4.1

Теоретичні питання, що розглядаються на семінарі

4. Вимірювальні прилади та їх класифікація:
 - а) класифікація приладів за принципом їх дії;
 - б) чутливість приладів.
5. Вимірювання сили струму і напруги та інших електричних величин.
6. Вимірювання опорів за допомогою місткової схеми.

7. Вимірювання невідомої ЕРС компенсаційним методом. Дільники напруги.
8. Осцилограф і його основні характеристики.
9. Електроди та датчики медико-біологічної інформації.
10. Підсилення і генерація електричних сигналів.
11. Структурна схема кола для одержання, передачі і реєстрації медико-біологічної інформації.

Додаткові теоретичні відомості

4.2.1. Прилади для вимірювання електричних параметрів та їх класифікація

Електровимірювальні прилади – це пристрої, за допомогою яких здійснюють порівняння деякої фізичної величини з еталоном, прийнятим за одиницю вимірювання. Для цього використовують різні прояви дії електричного струму. Найбільш широко застосовуються прилади, принцип роботи яких базується на механічних проявах електромагнітної взаємодії, в результаті яких рухома частина приладу обертається, переміщуючи покажчик вздовж шкали. В сучасній техніці все більш широко використовуються електровимірювальні прилади з цифровою індикацією.

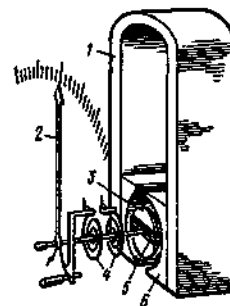


Рис. 4.2

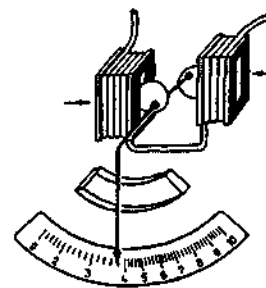


Рис. 4.3

а) У приладах *магнітоелектричної системи* використовується дія моменту сил на рамку зі струмом, яка знаходиться в полі постійного магніту (рис. 4.2). Момент сил M прямо пропорційно залежить від сили струму I , тому і кут, на який

повертається рамка, прямо пропорційний I . Напрямок M залежить від напрямку струму. Жорстко зв'язаний з рамкою покажчик відзначає на проградуйованій шкалі числові значення вимірюваної величини. Прилади цієї системи високочутливі, достатньо точні, мають рівномірну шкалу. Використовуються для вимірювання лише постійних електричних величин. Належність приладу до цієї системи позначається символом \square .

б) Прилади *електромагнітної системи* базуються на явищі втягування залізного сердечника в магнітне поле соленоїда (рис. 4.3). Сила, з якою сердечник втягується в соленоїд, залежить від величини і не залежить від напрямку сили струму. Сердечник закручує пружину і переміщує покажчик вздовж шкали. Прилади цієї системи прості, надійні, дешеві, але малочутливі, мають нерівномірну шкалу і невисоку точність. Вони придатні для вимірювання як постійних, так і змінних електричних величин. Позначаються знаком \boxtimes .

в) У приладах *електродинамічної системи* для вимірювання використовується обертання рамки зі струмом в магнітному полі соленоїда. Кут повороту рамки залежить від сили струму як в рамці, так і в соленоїді. Напрямок повороту залежить від напрямку обох струмів. Ці прилади достатньо точні, мають нерівномірну шкалу, придатні для вимірювання постійних і змінних величин.

г) Прилади *теплової системи*. Принцип роботи базується на тепловій дії струму і на термічному розширенні металів. Прилади цієї системи придатні для вимірювання як постійних, так і змінних величин (діапазон частот досить широкий). Належність приладу до даної системи позначається знаком \surd .

Вивчення принципу роботи *електронних цифрових приладів* виходить за рамки цього курсу.

Крім позначення системи приладу, на його шкалі вказується характер вимірюваної величини – змінна “~”, постійна “=”, обидві “≅” і клас точності приладу.

Точність вимірювальних приладів

На всіх електровимірювальних приладах вказано їх клас точності (цифра на шкалі, як правило, в колі). Клас точності

показує максимальну відносну похибку вимірювань при повному відхиленні стрілки приладу, виражену у відсотках. Наприклад, амперметр класу точності 1,5 з верхньою межею вимірювання 1 А дає при повному відхиленні стрілки абсолютну похибку

$$\Delta I = (1 \text{ А} / 100) \cdot 1,5 = 15 \text{ мА}.$$

Ця абсолютна похибка однакова при рівномірній шкалі, а для нерівномірної збільшується в напрямку до початку шкали. Відносна похибка завжди зростає при зміщенні до початку шкали. Тому прилад необхідно вибирати так, щоб вимірювання відбувалось у другій половині шкали.

4.2.2. Вимірювання сили струму, напруги, ЕРС, опору в електричному колі

За призначенням електровимірювальні прилади поділяють на:

а) Прилади для *вимірювання сили струму*: амперметри (А), міліамперметри (мА), мікроамперметри (мкА) і гальванометри (G), шкали яких проградуйовані у відповідних одиницях. На пристроях для комутації (клеми, гнізда, перемикачі границь вимірювання) вказані верхні межі вимірювання при відповідній комутації. Межі вимірювання розширюють за допомогою шунтів – спеціальних резисторів, які вмикаються паралельно до приладу.

б) Прилади для *вимірювання напруги* – вольтметри, мілівольтметри, кіловольтметри, а також гальванометри. На шкалі позначають одиниці вимірювання чи назву приладу. Межі вимірювання розширюють за допомогою резисторів, які підключають послідовно; верхні межі вимірюваної величини вказані на пристроях для комутації.

На всіх приладах, перерахованих в пунктах а) та б), вказані і значення величини їх опору, а на гальванометрах також ціна поділки і чутливість.

в) Прилади для *вимірювання потужності* – ватметри – виконують множення сили струму на напругу. Ці прилади, як правило, електродинамічної системи.

Комбіновані прилади, призначені для одночасного вимірювання сили струму, напруги й опору, є приладами магніто-

електричної системи, мають декілька шкал і додаткових опорів, систему комутації, джерела струму та випрямляч.

Крім перерахованих приладів, які вимірюють основні електричні величини, існує ще ряд приладів спеціального призначення – частотоміри, фазоміри, вимірювачі ємності, індуктивності, добротності контурів тощо.

Вимірювання опорів

Опір будь-якого провідника найбільш просто можна визначити за допомогою амперметра і вольтметра: $R = U/I$. При цьому вважають, що струм, який йде через вольтметр, малий порівняно зі струмом у провіднику. Точність такої методики визначається точністю амперметра і вольтметра і, як правило, не дуже велика (7 ~ 10%).

Для більш точних вимірювань опорів використовують метод порівнянь невідомого опору з відомим. Це здійснюють за допомогою місткової схеми, зображеної на рис. 4.4: r_1, r_2, r_3 – відомі опори, r_x – невідомий, G – чутливий гальванометр. Опори плечей моста змінюють і підбирають таким чином, щоб струм гальванометра дорівнював нулю. В цьому випадку:

$$r_1/r_2 = r_3/r_x \rightarrow r_x = (r_2 \cdot r_3)/r_1. \quad (4.1)$$

Отже, знаючи опори r_1, r_2, r_3 , можна знайти невідомий опір r_x . Доведемо рівність (4.1). Струм через гальванометр не йтиме, якщо

$$I_1 r_1 = I_2 r_2, \rightarrow I_1/I_2 = r_2/r_1. \quad (4.2)$$

З іншого боку, сили струму у ділянках обернено пропорційні до опору цих ділянок:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_3 + r_x}{r_1 + r_2}. \quad (4.3)$$

Підставивши (4.3) у (4.2), отримаємо (4.1).

Місткова схема використовується в багатьох приладах, наприклад, в *болومترі* – приймачі теплового випромінювання. У цьому випадку одним із чотирьох плечей електричного моста є чутливий до змін температури елемент, найчастіше напівпровідниковий резистор (термістор). При попаданні потоку випромінювання на теплочутливий елемент баланс моста порушується і через гальванометр йде струм, величина якого залежить від інтенсивності падаючого потоку.

У *реографі* місткова схема використовується для спостереження змін опору провідника (яким є ділянка біологічної тканини), обумовлених змінами його об'єму, котрі відбуваються протягом кардіоциклу.

Вимірювання невідомої ЕРС компенсаційним методом.

Дільники напруги

Дільники напруги. Якщо напруга на затискачах джерела більша, ніж потрібно для живлення споживача, то використовують дільники напруги. Їх принцип роботи базується на простій залежності опору провідника від його довжини: $R = \rho L/S$. Якщо напругу потрібно змінювати в ході експерименту, то використовують реостати із ковзаючим контактом. В коло струму вмикають один кінець обмотки реостата і ковзаючий контакт (рис. 4.5), таким чином отримують простий пристрій, який дозволяє знімати напругу в межах $0 \leq U \leq U_0$, де U_0 – напруга між кінцями реостата, U – напруга між розімкненими точками b і c : $U = U_0 r_1/r$, де r – повний опір реостата, r_1 – опір його частини між затискачем d і ковзаючим контактом. Такий пристрій називають дільником напруги.

Схема, яка використовується для вимірювання ЕРС \mathcal{E}_1 компенсаційним методом, зображена на рис. 4.6. Два джерела \mathcal{E} та \mathcal{E}_1 увімкнені назустріч одне одному. Опори R_1 та R_2 – змінні, причому: $R_1 + R_2 = R = \text{const}$.

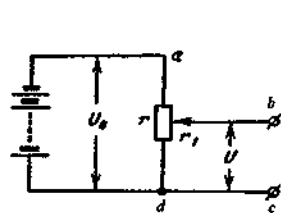


Рис. 4.5

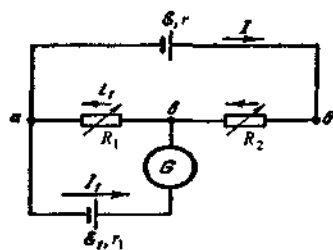


Рис. 4.6

Якщо можна обмежитись не дуже високою точністю ($\sim 1\%$), то r – однорідний провідник з ковзаючим контактом (реоход). У більш точних вимірюваннях R_1 і R_2 – магазини опорів.

Виберемо позитивний напрямок обходу контура і обмежимося при цьому частинним випадком, коли внутрішні опори джерел значно менші за R_1 та R_2 . Припустимо, що R_1 і R_2 підібрані таким чином, що струм через гальванометр дорівнює нулю. Тоді

$$I = i_1, I(R_1 + R_2) = \mathcal{E}, IR_1 = \mathcal{E}_1.$$

З двох останніх рівностей маємо

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \frac{R_1}{R}. \quad (4.4)$$

Ця рівність і лежить в основі вимірювання ЕРС \mathcal{E}_1 компенсаційним методом.

4.2.3. Осцилографи, генератори, підсилювачі, датчики

Електронний осцилограф – прилад, який використовується для дослідження періодичних та аперіодичних процесів. За його допомогою можна спостерігати криві періодичного процесу, вимірювати напругу, фазу, глибину модуляції.

Блок-схема найпростішого осцилографа представлена на рис. 4.7 і містить: електронно-променевою трубку (ЕПТ); блок живлення (БЖ), генератор горизонтальної розгортки (ГР), який

подає пилоподібну напругу, підсилювач вертикального відхилення (ПідсУ), який дозволяє збільшувати амплітуду досліджуваного сигналу, блок синхронізації (БС), дільники напруги.

До складу **електронно-променевої трубки**, яка являє собою вакуумну колбу, входить ряд електродів (електронна гармата), котрі фокусують пучок на екрані трубки і надають електронам необхідну швидкість (рис. 4.8).

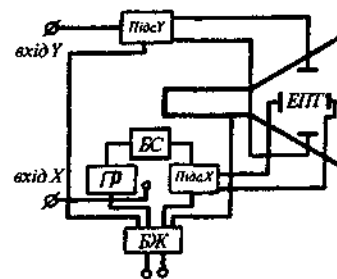


Рис. 4.7

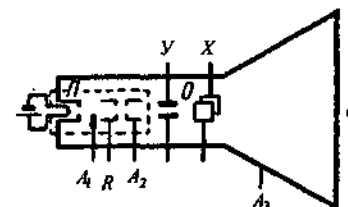


Рис. 4.8

Крім вказаних електродів, у трубці знаходяться вертикально (У) і горизонтально (Х) відхиляючі пластини, а також електрод A_3 , завдяки якому відводять електрони, що накопичуються на екрані.

Блок синхронізації. Частота генератора не зовсім стабільна з ряду причин – флуктуації напруги й опору залежно від змін навколишніх умов та інших причин. Джерела досліджуваних сигналів також не стабільні. Це приводить до нестійкості осцилограмів. Для усунення цього недоліку генератор горизонтальної розгортки узгоджують з досліджуваним сигналом, примушуючи їх працювати синхронно. Цю функцію в електронному осцилографі виконує блок синхронізації.

Блок живлення. Забезпечує необхідну постійну напругу на електродах електронно-променевої трубки. До катода трубки прикладається негативна напруга більше 1000 В, а до анода – позитивна напруга до 5 кВ. Блок забезпечує також живлення нитки розжарення електронно-променевої трубки.

Генератор розгортки. Для виявлення на екрані електронно-променевої трубки осцилограм необхідно на горизонтальний вхід осцилографа подати пилкоподібну регульовану за амплітудою і частотою напругу. На рис. 4.9 показана така напруга: t_1 – час наростання напруги, t_2 – час спаду напруги, T – період коливання. В ідеальній системі t_2 дорівнює нулю.

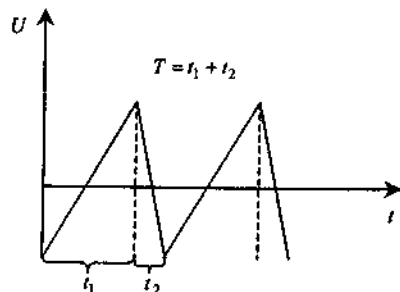


Рис. 4.9

Для спостереження синусоїдальних коливань (напруг) служить неперервна розгортка. Якщо спостерігаються процеси, які повторюються через неоднакові проміжки часу чи мають вигляд аперіодичних або одноразових імпульсів, то тривалість розгортки повинна бути трохи більшою, ніж трива-

лість досліджуваного сигналу. Такі розгортки називаються очікуваними чи одноразовими. Генератори такої розгортки приводяться в дію за допомогою зовнішнього пускового сигналу, під дією якого генератор очікуючої розгортки створює тільки один пилкоподібний імпульс. Часто генератор очікуючої розгортки сам виробляє сигнал, тоді відпадає необхідність синхронізації.

Генератор міток часу. Сучасні осцилографи високого класу мають генератор міток часу або калібратор тривалості. Короткі імпульси цього генератора певної частоти підсилюються і подаються на модулятор. Позитивний потенціал модулятора утворює на осцилограмі ряд яскравих точок, негативний – утворює ряд менш яскравих, ніж осцилограми, точок. Точність визначення тривалості процесів зростає зі збільшенням кількості відміток часу на осцилограмі.

Генератор калібрувального сигналу. Щоб вимірювати напругу, необхідно порівняти досліджуваний сигнал із сигналом каліброваної напруги – тобто такої, що має точно визначену величину. Для її отримання в осцилографі існує спеціальний

генератор, який працює від стабілізатора напруги. За допомогою калібрувального сигналу визначають ціну поділки $Z = U_k (B)/A_k$ (мм) або, якщо сітка екрана проградуєрована, перевіряють правильність роботи приладу. Генератор калібрувального сигналу є не тільки в осцилографі, а і в більшості вимірювальних приладів (цифрових вольтметрах, реографах, кардіографах тощо).

Отримання осцилограм. На екрані електронно-променевої трубки буде видно вертикальну світну лінію, якщо на вертикально відхилюючі пластини (X) подати змінну напругу. Якщо змінну напругу подати на горизонтально відхилюючі пластини (Y), то на екрані трубки буде горизонтальна лінія. Якщо ж змінну напругу одночасно подати на вертикально та горизонтально відхилюючі пластини, то на екрані буде осцилограма, вигляд якої залежатиме від співвідношення частот, амплітуд і фаз сигналів, які подані на пластини X та Y.

Для того щоб отримати стійку осцилограму на екрані електронно-променевої трубки, необхідно на Y-пластини подавати досліджувану напругу, а на X – пилкоподібну напругу. Частоти цих напруг повинні бути або рівними або кратними одна одній.

Отже, основними параметрами ЕО є:

1. Чутливість S електронно-променевої трубки – відношення зміщення електронного променя (в мм) до величини напруги (у Вольтах) на відхиляючих пластинах, якою викликано це зміщення:

$$S_y = Y/U_y \text{ (мм/В)}; S_x = X/U_x \text{ (мм/В)}.$$

2. Коефіцієнт підсилення за напругою K , який дорівнює відношенню амплітуди напруги на виході до амплітуди вхідного сигналу відповідного підсилювача (X чи Y):

$$K = \frac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}}.$$

3. Частотна смуга пропускання підсилювачів.

Підсилення і генерація електричних сигналів

Підсилювачами електричних сигналів називають пристрої, які збільшують ці сигнали за рахунок енергії стороннього джерела.

Залежно від призначення розрізняють підсилювачі напруги, сили струму, потужності. Основною характеристикою підсилювача є коефіцієнт підсилення, який дорівнює відношенню зміни вихідного сигналу до зміни вхідного, якою вона обумовлена:

$$k_U = \frac{\Delta U_{вих}}{\Delta U_{вх}}, \quad k_I = \frac{\Delta I_{вих}}{\Delta I_{вх}}, \quad k_P = \frac{\Delta P_{вих}}{\Delta P_{вх}}.$$

При підсиленні синусоїдальних сигналів, як правило, користуються відношенням амплітуд вхідного і вихідного сигналів:

$$k = \frac{A_{м. вих}}{A_{м. вх}},$$

де A_m – амплітуда підсилюваної величини (I , U , P). Суттєвою вимогою до підсилювачів є повторення вхідного сигналу без спотворення його форми. Для цього необхідно, щоб коефіцієнт підсилення не залежав від величини вхідного сигналу, тобто, щоб залежність $A_{вих} = f(A_{вх})$, яку називають **амплітудною характеристикою**, була лінійною.

Варто відзначити, що індуктивні та ємнісні властивості провідників, наскільки малими вони б не були, при збільшенні частоти можуть суттєво впливати на коефіцієнт підсилення, викликаючи так звані частотні спотворення. Необхідною умовою їх відсутності є постійність коефіцієнта підсилення $k = f(\nu) = \text{const}$. Діапазон частот $\Delta \nu$, для якого це справедливо, називають **смужою пропускання підсилювача**.

Принцип дії конкретного підсилювача розглядається у лабораторній роботі "Вивчення роботи транзистора".

Для досягнення необхідних значень досліджуваного сигналу сполучають іноді декілька підсилювачів, які утворюють **каскад підсилення**.

Генераторами називають пристрої, які перетворюють енергію джерел постійної ЕРС в енергію електромагнітних хвиль

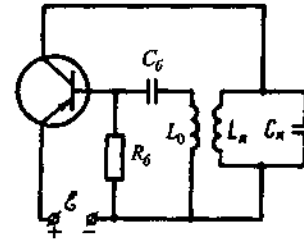


Рис. 4.10

різної частоти та форми. Генератори використовуються в фізіотерапевтичній апаратурі, електричних стимуляторах, в окремих діагностичних приладах.

Схему найпростішого автоколивального генератора на транзисторі зображено на рис. 4.10. В схемі генеруються коливання, частота яких дорівнює частоті власних коливань LC контура: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Котушка L_0 здійснює індуктивний зв'язок кола емітер-база з колом емітер-колектор. Джерелом енергії служить батарея \mathcal{E} . Елементи R_0 та C_0 необхідні для вибору оптимального режиму роботи (щоб була лінійною амплітудна характеристика і частота генерації ω_0 відповідала смужі пропускання).

Поряд з автоколивальними генераторами, які виробляють сигнали синусоїдальної форми, використовуються генератори із зовнішнім збудженням. За допомогою них можна отримувати періодичні імпульсні послідовності (релаксаційні коливання). Прикладом таких генераторів є генератор пилоподібної напруги в осцилографі; мультівібратор, який використовують для імітації роботи серця при дослідженні кардіограми.

Електроди та датчики медико-біологічної інформації

Датчиком називають пристрій, який перетворює величину, що вимірюється чи спостерігається, в сигнал, зручний для передачі (як правило, електромагнітний сигнал). Датчики поділяються на **генераторні** та **пара-метричні**.

Генераторні – це датчики, які під дією електровимірюваної величини безпосередньо генерують сигнал електромагнітної природи. Основними типами цих датчиків є п'єзоелектричні, термоелектричні, індукційні, фотоелектричні.

Параметричні – це датчики, в яких під дією вимірюваної величини змінюється деякий параметр. Основні їх типи: ємнісні, індуктивні, омичні.

Датчик характеризується *функцією перетворення*, тобто функціональною залежністю вихідної величини Y від вхідної X , яка задається або аналітично $Y = f(X)$, або графічно.

Чутливість датчика показує, в якій мірі вихідна величина реагує на зміни вхідної:

$$Z = \Delta Y / \Delta X.$$

Суттєву роль відіграє *інерційність* датчика, яка обумовлена тривалістю фізичного процесу, що відбувається в датчику й призводить до запізнення змін вихідної величини відносно змін вхідної.

Електроди – це провідники, що з'єднують біологічну систему з вимірювальним колом або колом, за допомогою якого подається електромагнітний сигнал на біооб'єкт.

Електроди мають задовольняти цілому ряду вимог. Вони повинні легко зніматись і закріплюватись, мати стабільні електричні параметри, не створювати шумів, не подразнювати біологічну тканину.

Структурна схема кола для одержання, передачі і реєстрації медико-біологічної інформації

Структурна схема кола для одержання, передачі і реєстрації медико-біологічної інформації зображена на рис. 4.11.



Рис. 4.11

Припустимо, що X – деякий параметр біологічної системи, який потрібно визначити; Y – величина, яка отримується на реєструючому пристрої. Для обчислення повинна бути відомою залежність $Y = f(X)$, а також значення коефіцієнта підсилення k за даних умов.

Завдання для перевірки кінцевого рівня знань

- Визначити ціну поділки приладів (в A /поділку і B /поділку) для різних меж вимірювання: 5 А, 2 мА, 10 мкА, 1 кВ, 2 мВ. Прилад має 20 поділок.
- Визначити максимальну відносну похибку для цих приладів, якщо клас точності: а) 1; б) 2.
- Амперметр має 25 поділок і розрахований на вимірювання сили струму 5 мА. Клас точності 1. Знайти відносну похибку, якщо стрілка вказує на 5, 15, 20 поділок. Зробити висновок.
- Чому дорівнює невідомий опір в схемі, зображеній на мал. 4.44, якщо $r_1 = 2 \text{ Ом}$, $r_2 = 3 \text{ Ом}$, $r_3 = 6 \text{ Ом}$?
- Назвіть основні блоки осцилографа.
- Яким вимогам повинна задовольняти напруга, що подається на X -пластини осцилографа і чому?
- Що таке калібрувальний сигнал і для чого він використовується?
- На які пластини осцилографа подається досліджувана напруга?
- Які електричні величини можна виміряти за допомогою осцилографа?
- Що таке чутливість приладу?
- За якими параметрами оцінюють підсилювач?
- Що таке дільник напруги і де він використовується?
- Знайти потенціал поля, створеного диполем $p = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}\cdot\text{м}$, в точці, віддаленій на відстань $r = 25 \text{ мм}$ в напрямку під кутом $\alpha = 30$ відносно напрямку p . Середовище – кров ($\epsilon = 95$).
- Через поперечний переріз провідника проходять електрони зі швидкістю $v = 1,5 \text{ см/с}$. Концентрація електронів $n = 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Знайти густину струму. Знайти силу струму, створеного цими зарядами, якщо переріз провідника $S = 0,3 \text{ мм}^2$.
- Який максимальний момент сили діє на молекулу води в електричному полі з напруженістю $E = 20 \text{ кВ/м}$, якщо для молекул води дипольний момент $p = 1,84 \text{ Дебая}$?
- Знайти максимальне значення ЕРС, яка індукується в рамці площею $S = 400 \text{ см}^2$, якщо магнітна індукція має максимальне значення $B = 10^{-2} \text{ Тл}$ і змінюється за гармонічним законом з періодом $T = 0,1 \text{ с}$.
- Знайти напруженість магнітного поля в центрі півкільця радіусом 2 м, по якому тече струм силою 5 А.
- В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,25 \text{ Тл}$ знаходиться прямолінійний провідник завдовжки 1,4 м, на який діє сила 2,1 Н. Визначити кут між напрямком струму в провіднику і напрямком магнітного поля, якщо сила струму в провіднику 12 А.

30. На відстані 3 см від прямолінійного нескінченно довгого провідника зі струмом індукція магнітного поля дорівнює 10 Тл. Знайти силу струму в провіднику.
31. Соленоїд завдовжки 60 см має три шари витків по 120 витків в кожному шарі. Знайти силу струму, котрий живить соленоїд, якщо індукція поля на осі соленоїда 0,6 Тл.
32. Потік протонів, прискорених різницею потенціалів $2 \cdot 10^5$ В, влітає в однорідне магнітне поле напруженістю $1,59 \cdot 10^{-8}$ А/м. Швидкість частинок перпендикулярна до напрямку магнітного поля. Знайти силу, що діє на кожний із протонів.

4.3. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1 “РОБОТА З ФІЗИОТЕРАПЕВТИЧНОЮ АПАРАТУРОЮ”

Мета роботи: вивчити основи взаємодії ЕМП з БТ і набути навичок роботи на деяких фізіотерапевтичних апаратах.

Контрольні запитання для підготовки до лабораторної роботи

33. Класифікація фізіотерапевтичної електронної медичної апаратури.
34. Тепловий ефект, викликаний ВЧ-струмами провідності та індукційними ВЧ-струмами. Діатермія. Індуктотермія.
35. Поняття про струми зміщення. Механізм прогрівання електролітів і діелектриків. Поняття про діелектричні втрати.
36. Спрощена схема УВЧ-апарата (будова, призначення основних блоків, робочий процес апарата).
37. Дарсонвалізація (фізичний зміст методу, природа лікувального фактора, спрощена схема апарата для місцевої дарсонвалізації. Робочий процес).
38. Специфічна дія УВЧ- і НВЧ- полів на біологічні тканини.

Додаткова література

1. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1992.
2. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1987. – Гл. 18 (параграф 9), гл. 20, 23.
3. Ремизов А.Н. Курс физики, электроники, кибернетики для медицинских институтов. – М.: Высшая школа, 1982. – Гл. 24 (параграф 7), гл. 39 (параграф 3).
4. Ливенцев Н.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1978. – Т. 2 (параграфы 151, 152, 153).

5. Ливенцев Н.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1974 (параграфы 107, 108).

Додаткові теоретичні відомості

4.3.1. Робота з УВЧ-апаратом

УВЧ-терапія – лікувальний метод, у якому використовується вплив електричного поля ультрависокої частоти (від 30 до 300 МГц) на тканини організму.

Лікувальний фактор. Біологічні тканини знаходяться в електричному полі конденсатора, обкладинки якого – ізольовані пластини електродів. На ці пластини подається високочастотна ($\nu = 40,68$ МГц) напруга амплітудою декілька сотень вольт. Для уникнення електричного контакту пацієнта з електродами (і, як наслідок, виникнення УВЧ-струму провідності) електроди вкриті ізолюючим шаром діелектрика. Основним діючим фактором при цьому є *струми зміщення*, що виникають у біологічних тканинах під впливом електричного поля змінної напруженості E :

$$j_{zm} = \epsilon_0 \epsilon dE/dt.$$

Механізм прогрівання тканин. Струм зміщення існує, якщо напруженість електричного поля змінюється з часом. При збільшенні частоти (а, отже і швидкості зміни E) струм зростає. Величина струму зміщення суттєво залежить від типів зарядів, які знаходяться в електричному полі (іонів, диполів, мультиполів тощо), і особливостей їх поведінки у змінному електричному полі.

Прогрівання електроліту. У змінному електричному полі напруженості E іони електролітів зміщуються у напрямку дії кулонівської сили $F = qE$. Якщо вважати, що сила, так само як і напруженість, змінюється за гармонічним законом, то можна припустити, що іон здійснює коливально-поступальний рух відносно положення рівноваги (рис. 4.12).

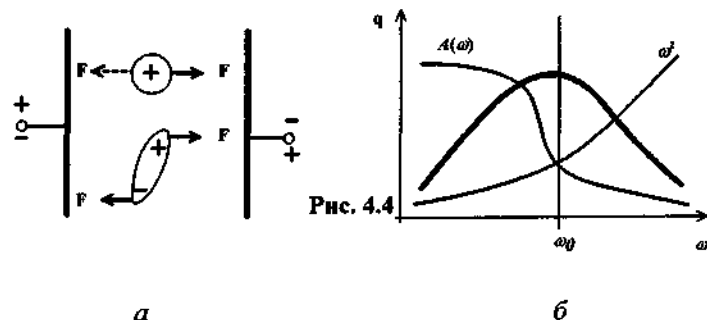


Рис. 4.12

Кінетична енергія коливальної системи W_k (іон + гідратна оболонка) залежить від частоти й амплітуди коливань ($W_k \sim \omega^2 A^2$), амплітуда коливання A залежить від E , ω , маси системи та в'язкості середовища. Врахувавши, що кінетична енергія одиниці об'єму рідини дорівнює сумі енергій усіх частинок об'єму, можна показати, що кількість теплоти, виділена в одиниці об'єму за одиницю часу, визначається за формулою

$$q \sim n A^2(\omega) \omega^2 = k(\omega) \omega^2 n E^2,$$

де n – концентрація іонів; $k(\omega)$ – коефіцієнт пропорційності. Із цієї формули видно, що результуючий ефект нагрівання залежить від частоти складним чином – при збільшенні ω , з одного боку, збільшується q пропорційно квадрату частоти ω^2 ; з іншого боку, зі збільшенням частоти зменшується амплітуда коливань і, як наслідок, зменшується кінетична енергія. Якісний аналіз показує, що W_k набуває максимального значення (рис. 4.12, б) у деякому інтервалі частот $[\omega_0 \pm \Delta\omega]$.

Прогрів діелектрика (вважаємо, що молекули діелектрика мають власний дипольний момент $P = ql$). Полярні молекули (молекули води, білків, ліпідів тощо) у змінному електричному полі під впливом моменту сил $M \sim PE$ здійснюють коливально-обертальний рух відносно осі, яка проходить через центр маси молекули (див. рис. 4.12, а).

Кінетична енергія системи у цьому випадку може бути оцінена за частотою обертання і моментом інерції молекули (точний розрахунок досить складний тому, що необхідно враховувати міжмолекулярні сили взаємодії). Приблизну величину для даного випадку можна оцінювати за струмами зміщення, які виникають у діелектрику за рахунок орієнтаційних (коливально-обертальних) рухів диполя:

$$q = E j_{zm} = k(\omega) \omega \epsilon_0 \epsilon E^2, \quad (4.5)$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Тобто для діелектрика, який знаходиться в однорідному полі конденсатора, q визначається за формулою (4.5).

Отже, прогрівання діелектрика буде залежати від амплітуди напруженості, діелектричних властивостей середовища та частоти. Кількісно залежність прогріву діелектрика від частоти описує крива, яка подібна до наведеної на рисунку 4.12, б, але з максимумом, зміщеним у бік більш високих частот.

Кількість виділеної теплоти в окремих структурах, ділянках тканини буде залежати від співвідношення об'ємів, які займають електроліти або полярні діелектрики.

Окрім теплового впливу на тканини, електричне УВЧ-поле чинить високоефективну специфічну дію на зміни певних біохімічних процесів у клітині за рахунок коливальної і коливально-обертальної дії на молекулярні структури, що в кінцевому результаті призводить до змін швидкості метаболічних реакцій і функцій клітинних структур і органів.

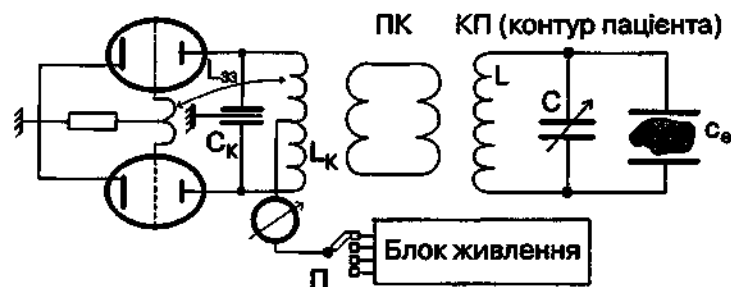


Рис. 4.13. Спрощена схема УВЧ-апарата

Апарат для УВЧ-терапії. Спрощена схема приладу зображена на рис. 4.5. Основні частини приладу: ламповий генератор з контуром L_k, C_k , що налагоджений на частоту $\nu = 40,68 \text{ МГц}$, контур зворотного зв'язку $L_{оз}$ для керування роботою ламп. Потужність електричних коливань регулюється напругою на аноді ламп (перемикач П – “потужність” у блоці живлення (БЖ) змінює напругу на виході блоку живлення). При збільшенні анодної напруги змінюється амплітуда коливань у контурі генератора.

Завдяки індуктивному зв'язку електромагнітні коливання через проміжний контур ПК передаються у контур пацієнта (L, C, C_e). Такий зв'язок забезпечує безпеку пацієнта від низько-частотної напруги у колах генератора УВЧ.

Контур пацієнта складається з котушки індуктивності L і змінної ємності C (перемикач – “настройка”). В ємність контура пацієнта входить також і міжелектродна ємність C_e . Зняття максимальної потужності з контуру генератора досягається при виконанні умов резонансу, тобто при

$$L_k C_k = L(C + C_e).$$

Ємність терапевтичного контуру або контуру пацієнта (КП) змінюється при кожній процедурі (у поле конденсатора вводяться різні частини тіла пацієнта). Змінюючи C , можна постійно підтримувати резонанс, при якому відбувається максимальна передача електромагнітної енергії контуру тканинам пацієнта.

Ступінь налагодження терапевтичного контуру у резонанс з коливальним контуром генератора визначається за яскравістю лампочки або за відхиленням стрілки індикатора на панелі приладу.

Перемикачі керування потужністю (П – “потужність”), налагодження (C – “настройка”), а також компенсатора падіння напруги кола живлення приладу (“мережа”), винесені на передню панель приладу. Зміна положення перемикача компенсатора змінює кількість витків у силовому трансформаторі і, відповідно, напругу на виході блоку живлення.

Завдання до лабораторної роботи

Завдання 1. Вивчити будову апарата УВЧ-66 і підготувати його до роботи.

Зовнішній вигляд передньої панелі апарата показано на рис. 4.14:

- 1 – вмикач електричного кола і регулятор вхідної напруги;
- 2 – кнопка індикації величини вхідної напруги;
- 3 – регулятор потужності УВЧ-випромінювання;
- 4 – регулятор настройки кола пацієнта;
- 5 – індикатор настройки з червоним сектором для регулювання вхідної напруги.

Увімкніть апарат у мережу. Натисніть кнопку індикації і регулятором вхідної напруги встановіть стрілку індикатора апарата в центрі червоного сектора.

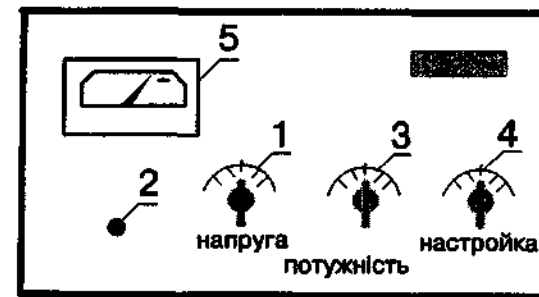


Рис. 4.14. Зовнішня панель УВЧ-66

Прогрійте апарат протягом 3–5 хвилин. Встановіть потужність 70 Вт . Спочатку відрегулюйте апарат за максимальним відхиленням стрілки, перевірте настройку за яскравістю розряду неоновий лампочки.

Завдання 2. Дослідження зміни температури прогрівання дистильованої води і розчину електроліту в УВЧ-полі.

Хід роботи. Розташуйте між електродами апарата склянки з дистильованою водою і розчином кам'яної солі. Наладьте апарат за максимальним відхиленням стрілки. Через кожні п'ять хвилин вимірюйте температуру води і розчину. Дані занесіть до таблиці.

		Час, хв						
		0	5	10	15	20	25	30
Температура, °С	Дистильована вода							
	Розчин NaCl							

Примітка. Уважно слідкуйте за положенням стрілки індикатора у процесі прогрівання. Резонанс у колі може порушуватись і потрібна постійна корекція.

Оформлення роботи. У протоколі повинно бути: а) стислий опис фізичної суті лікувального методу УВЧ-терапії; б) спрощена схема УВЧ-апарату з переліком основних блоків; в) таблиця вимірювань температури і графік її зміни з часом; г) висновок про механізми прогрівання рідин.

Контрольні запитання і задачі

1. Вкажіть діапазон зміни частот ЕМП для УВЧ-, НВЧ- і КВЧ-терапій. Чому дорівнює частота електромагнітних коливань, які генеруються УВЧ-апаратом?
2. Що таке струм зміщення? Який механізм прогрівання струмами зміщення діелектриків і електролітів? Які з цих речовин прогриваються більш ефективно?
3. Чому ефективність прогрівання речовини залежить від частоти?
4. Чому дія ультрависокочастотного поля не викликає ефекту подразнення, який притаманний низькочастотному полю?
5. З яких основних блоків складається УВЧ-апарат?
6. Яким чином змінюється потужність генератора УВЧ-коливань?
7. Що значить "настроїти (відрегулювати)" УВЧ-апарат? Чому в момент налагодження яскравість неонові лампочки або відхилення стрілки максимальні?

4.3.2. Ультразвуковий терапевтичний апарат

Механічні коливання з частотою, більшою 20 кГц, що розповсюджуються в пружних середовищах, називають ультразвуком (УЗ). УЗ-хвиля є процесом розповсюдження коливань тиску або густини пружного середовища в просторі з плином часу. Гармонічну УЗ хвилю можна описати таким рівнянням:

$$A(x, t) = A_m \sin[\omega(t - x/v)],$$

де $A(x, t)$ – миттєве значення змінної величини (тиску або густини середовища) у деякій точці простору, A_m – її амплітудне значення, x – координата точки, v – швидкість поширення УЗ-хвилі.

Біологічна дія ультразвуку обумовлена комплексною дією механічних, теплових та фізико-хімічних факторів і залежить від інтенсивності і частоти УЗ-випромінювання.

Механічна дія ультразвуку обумовлена деформаціями мікроstruktur тканин при періодичних стисках і розтягах, що виникають при проходженні ультразвукової хвилі. Збільшення потужності ультразвуку призводить до деструкції (руйнування) тканин, виникнення значного перепаду тиску в мікрооб'ємі тканини може стати причиною виникнення мікропорожнин, розривів. Це явище відоме під назвою "кавітація". Кавітація супроводжується тепловим ефектом, дисоціацією макромолекул, активацією специфічних хімічних реакцій.

Тепловий ефект ультразвуку обумовлений тим, що у біологічних тканинах відбувається процес поглинання акустичної енергії ультразвукової хвилі і перетворення її у теплову. Для зменшення теплового ефекту використовують імпульсне УЗ-випромінювання.

Кількість теплоти, яка виділяється в одиниці об'єму тканини, дорівнює

$$q \sim \rho \cdot \omega^2 \cdot A_m^2,$$

де ρ – густина середовища, ω – частота, A_m – амплітуда.

Фізико-хімічна дія ультразвуку обумовлена активацією деяких хімічних і біохімічних реакцій. Так, наприклад, дія ультразвуку прискорює реакції окислення і полімеризації. Ультразвук незначної потужності призводить до збільшення проникності клітинних мембран, активізує процеси обміну.

Ультразвук частотою 800 кГц низької інтенсивності використовується у фізіотерапії. В хірургії сфокусоване від декількох джерел УЗ-випромінювання високої інтенсивності використовується для дроблення каменів у сечовому міхурі, руйнування злоякісних пухлин, розпилення і "зварювання" кісток. З

діагностичною метою використовують УЗ-просвічування і УЗ-локацію. Ці методи базуються на відмінностях у ступені поглинання і відбивання ультразвукової хвилі тканинами з різними акустичними властивостями (густиною, пружністю).

Апарат УТП-1 – складається з генератора високої частоти (ГВЧ), який живить п'єзоелектричний перетворювач (кварту – КВ знаходиться між пластинами конденсатора і перетворює високочастотні електричні коливання в ультразвукові). При збігові частоти ГВЧ і власної частоти коливань кварцу в резонаторі досягається найбільша інтенсивність ультразвукового випромінювання.

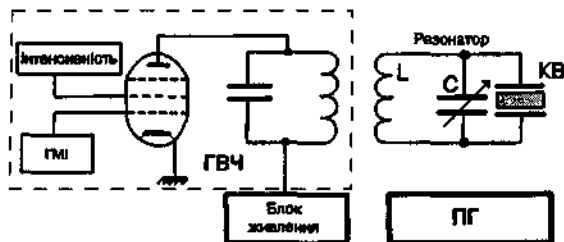


Рис. 4.15. Спрощена схема апарата УТП-1

Модулятор (ГМІ – генератор модульованих імпульсів) формує з напруги мережі імпульси негативної полярності, котрі закривають лампу генератора на деякий час, відповідно до положень покажчика “режим роботи” (безперервно, імпульсно – 10 мс, 4 мс). Регулятор потужності змінює напругу на екрануючій сітці лампи і, як наслідок, амплітуду коливань в анодному контурі, а значить, і інтенсивність випромінювання УЗ. Процедурний годинник (ПГ) задає час роботи генератора, роз'єднуючи через певний час блок живлення і генератор. Величина УЗ-тиску оцінюється за формулою

$$P = \sqrt{2\rho vI},$$

де ρv – акустичний опір (ρ – густина, v – швидкість поширення звуку в середовищі); I – інтенсивність звуку.

Завдання до лабораторної роботи

Завдання 1. Підготувати апарат до роботи.

1. Перевірити заземлення апарата.
2. Встановити ручки у такі положення:
 - “Компенсатор мережі” – Вимк.,
 - “Інтенсивність” – 0,
 - “Процедурний годинник” – 0,
 - “Площа випромінювання” – 4 см²,
 - “Режим роботи” – перервно.
3. Переконайтесь (не виймаючи випромінювач з горловини вимірювача), що під поверхнею кристалу відсутні повітряні бульбашки.
4. Ручкою “Компенсатор мережі” увімкнути прилад в мережу і встановити стрілку в червоний сектор. Дати можливість прогрітись приладу 5–10 хв.

Завдання 2. Виміряти потужність ультразвукового випромінювання апарата УТП-1 за допомогою вимірювача потужності ІМУ-3.

Вимірювач потужності ІМУ-3 (рис. 4.16) використовується для УЗ-випромінювання певної потужності. Чутливий елемент випромінювача (поплавок пружинних терезів) відхиляється під дією тиску, створеного ультразвуковими механічними коливаннями кварцового резонатора.

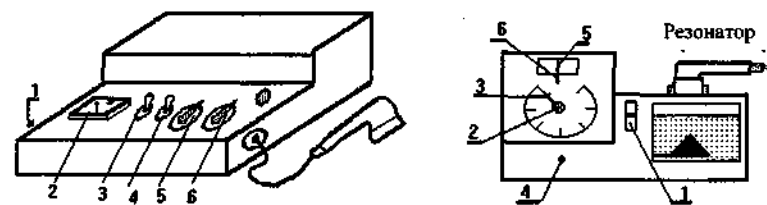


Рис. 4.16. Вимірювач потужності ІМУ-3

Послідовність вимірювання потужності:

1. Перевірити рівень води за відповідною позначкою.
2. Розаретувати прилад (ручку 1 перевести вгору).
3. Встановити ручкою 2 стрілку 3 на нуль шкали.
4. Якщо необхідно, ручкою 4 наблизити стрілку 5 до позначки 6 (регулятор 4 – багатообертовий). Прилад підготовлений для вимірювання потужності.

5. Перевірте відповідність положення ручки "Інтенсивність" реальній потужності. Для цього скористайтесь значеннями, наведеними в таблиці, і виконайте дії у такій послідовності:

– увімкніть процедурний годинник (20–25 хв), повинна загорітися сигнальна лампочка, яка свідчить про роботу генератора;

– встановіть ручку "Інтенсивність" у необхідне положення, стрілка індикатора 5 повинна відхилитись вправо;

– обертанням ручки 2 наблизьте стрілку 5 до позначки 6, показчик 3 буде показувати розвинуту потужність;

– дані занесіть у таблицю.

Аналогічну процедуру виконайте для інших положень ручки "Інтенсивність" та режимів випромінювання.

Таблиця. Вимірювання потужності УЗ-випромінювання

Положення ручки	Потужність за паспортом, Вт	Розвинена потужність	
		неперервний	імпульсний
0,9	$0,9 \cdot 4 = 3,6$		
2,0	$2,0 \cdot 4 = 8,0$		
3,0	$3,0 \cdot 4 = 12,0$		

Оформлення роботи. У звіті мають бути: а) опис фізичної суті лікувального фактора при УЗ-терапії; б) спрощена електрична схема апарата УТП-1; в) результати вимірювань потужності УЗ-випромінювання.

Контрольні запитання і задачі

1. Яка природа лікувального фактора при УЗ-терапії?
2. Які джерела УЗ-хвиль ви знаєте, у чому полягає принцип їх роботи?
3. Чому дорівнює довжина ультразвукової хвилі у воді, якщо $v = 1,4 \text{ км/с}$, а частота 880 кГц ?
4. Чому дорівнює УЗ-тиск при $I = 10 \text{ Вт/м}^2$?
5. Оцініть величину градієнта тиску, що утворюється УЗ-хвилею, яка має вказану вище інтенсивність та частоту.
6. Чому ефективність УЗ-терапевтичної процедури значно знижується, якщо між об'єктом та випромінювачем знаходяться повітряні бульбашки?
7. Поясніть принцип дії резонатора.

4.3.3. Апарат для дарсонвалізації "Іскра-1"

Дарсонвалізація – лікувальний метод, в якому використовуються імпульсні електромагнітні коливання високої частоти, а також низькочастотні електричні розряди, котрі супроводжують ці коливання.

Частота електромагнітних коливань при дарсонвалізації – 110 або 440 кГц.

Розрізняють два види дарсонвалізації: *загальну* та *локальну (місцеву)*. При загальній дарсонвалізації ЕМП діє на увесь організм пацієнта. Пацієнт знаходиться всередині соленоїда, який створює імпульсне високочастотне (110 або 440 кГц) магнітне поле. Частота проходження імпульсів – приблизно 50 Гц. Отже, лікувальним (або фізичним) фактором при загальній дарсонвалізації є *імпульсний високочастотний індукційний струм*.

При локальній (місцевій) дарсонвалізації дії піддається тільки певна ділянка тканини. У цьому випадку діючими факторами є:

а) *напруженість* високочастотного електричного поля. Між електродами (або електродом і пацієнтом) утворюється високочастотне амплітудно-модульоване електромагнітне поле. Форма модуляції "дзвоноподібна". Високочастотні коливання (рис. 4.17) виникають на короткий проміжок часу ($t = 0,5 \text{ мс}$). Період їх повторень – 20 мс (частота 50 Гц);

б) *іскровий розряд* (ІР). З наростанням амплітуди напруженості ВЧ-коливань у резонаторі зростає напруженість електричного поля між електродом та пацієнтом, внаслідок чого виникає іонізований пробій у повітрі (іскровий розряд). ІР є основним фактором, завдяки якому здійснюється місцеве припікання шкіри чи слизових оболонок, а також електро-стимуляція рецепторів, які знаходяться у полі дії іскри;

в) *легкі аероіони*, котрі утворюються у результаті іскрового розряду (озон, окиси азоту тощо).

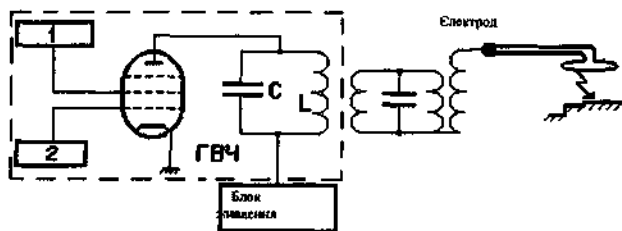


Рис. 4.17. Спрощена схема приладу

Спрощена схема апарата наведена нижче на рис. 4.9. Тут ГВЧ – генератор високої частоти, LC – контур генератора ($\nu = 110 \text{ кГц}$). Регулятор потужності (1) змінює напругу на екранній сітці лампи і, відповідно, струм через лампу, що призводить до зміни напруги у контурі (резонаторі). Саме це у кінцевому результаті і визначає потужність іскрового розряду. Модулятор (2) виробляє низькочастотні імпульси (частота 50 Гц), які відкривають лампу на короткий час (частки мілісекунди), внаслідок чого у контурі виникають модульовані високочастотні згасаючі коливання. Резонатор складається з контура і високовольтної котушки індуктивності, яка з'єднана з електродом. Напруга у контурі – 1800 В , на котушці індуктивності – декілька десятків кВ (напруга такого порядку необхідна для виникнення іскри). Графік коливань напруги у резонаторі наведений на рис. 4.18.

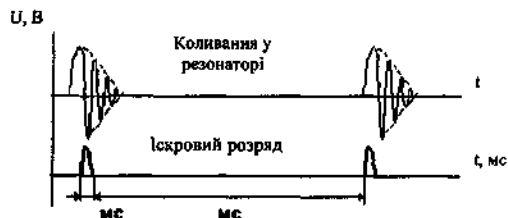


Рис. 4.18

Робота апарата: модулятор (2) на короткий час ($t = 0,1 \text{ мс}$) відкриває лампу, і в контурі генератора виникає серія згасаючих коливань тривалістю $0,5 \text{ мс}$. Завдяки індуктивному

зв'язку коливання передаються в резонатор, де на високовольтній обмотці виникає напруга U , достатня для виникнення іскри (рис. 4.18).

Завдання до лабораторної роботи

Завдання 1. Вивчіть будову приладу і увімкніть його в мережу.

1. Підключіть резонатор до вхідної клеми на панелі приладу.
2. Регулятор потужності переведіть у положення 0.
3. Увімкніть прилад у мережу і встановіть необхідну напругу регулятором напруги мережі.
4. Збільшуючи потужність іскрового розряду, отримайте газовий розряд у скляному електроді.
5. Подійте слабким іскровим розрядом на шкіру руки.

Оформлення роботи. У звіті мають бути: а) опис фізичної суті лікувального фактора при місцевій дарсонвалізації, б) спрощена електрична схема приладу.

Контрольні запитання і завдання

1. Назвіть основні фізичні фактори, які впливають на біологічні тканини: а) при місцевій дарсонвалізації, б) при загальній дарсонвалізації.
2. Назвіть основні блоки апарата для місцевої дарсонвалізації і поясніть принципи їх роботи.
3. Яким чином можна збільшити потужність іскрового розряду?
4. Що таке аеріони і як вони утворюються під час сеансів місцевої дарсонвалізації?

4.4. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2 "РОБОТА З ЕЛЕКТРОКАРДІОГРАФОМ ЕКСПЧТ-4"

Мета роботи: вивчити фізичні основи електрокардіографії, набути навичок роботи з електрокардіографом.

Контрольні запитання до лабораторної роботи

1. Поняття про електрограму (ЕГ). Види ЕГ.
2. Серце як електричний диполь та інтегральний електричний вектор серця (ІЕВ). Електричне поле диполя. Теорія Ейнтховена. Стандартна система відведень.
3. Поняття про вектор-електрокардіографію.
4. Серце як струмовий диполь. Потенціал поля струмового диполя.

5. Спрощена блок-схема електрокардіографа. Поняття про диференційний підсилювач. Принцип зниження шумів. Електроди для зняття ЕГ.

Література для підготовки до лабораторної роботи

1. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1992.
2. Владимиров Ю.А. и др. Биофизика. – М.: Высшая школа. – Гл. 9 (разделы 1–7).
3. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1987. – Гл. 14 (разделы 1–5), гл. 21 (разделы 2, 6), гл. 22 (разделы 1–5).
4. Ремизов А.Н. Курс физики, электроники, кибернетики для медицинских институтов. – М.: Высшая школа, 1982. – Гл. 15 (разделы 1, 3, 4).

Додаткові теоретичні відомості

Органи, тканини, окремі клітини та їхні частини є електрично активними, тобто процес їхнього функціонування супроводжується появою в навколишньому середовищі змінного електричного поля, характеристики якого (різниця потенціалів, електричний струм тощо) можна зареєструвати. Отриману інформацію використовують з діагностичною метою та з метою вивчення природи електричних явищ у біологічних тканинах. Ресстрація різниці потенціалів між точками середовища, яке оточує електрично активні тканини, називається електрографією, а результат цієї ресстрації – *електрограмою* (ЕГ).

Основні положення теорії Ейнтховена

1. Серце являє собою генератор струму. Збуджена ділянка міокарда має негативний потенціал по відношенню до незбудженої ділянки (рис. 4.19). Просторовий розподіл потенціалів на поверхні тканин, що оточують серце, аналогічний до просторового розподілу потенціалів поля, створеного електричним диполем.

2. Генератор струму розміщений в однорідному провіднику нескінченно великих розмірів.

3. Електричне поле, що створене серцем, можна характеризувати *інтегральним електричним вектором серця* $\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{D}_i$,

де $D=Il$, I – сила струму у колі генератора, l – відстань між полюсами генератора.

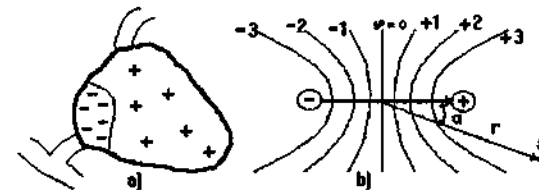


Рис. 4.19. Серце як електричний диполь

4. Величина потенціалу в кожній достатньо віддаленій від інтегрального електричного вектора точці середовища ($r \gg l$) дорівнює:

$$\varphi_a = \frac{\rho}{4\pi} \cdot \frac{E \cos \alpha}{r^2}.$$

де ρ – питомий опір середовища.

5. Вибір стандартної системи відведень. Ейнтховен запропонував знімати різницю потенціалів між вершинами рівностороннього трикутника, у центрі якого знаходиться вектор E (рис. 4.20). Можна показати, що в цьому випадку різниці потенціалів між вершинами трикутника пропорційні до відповідних проекцій вектора E на сторони трикутника:

$$\Delta\varphi_I : \Delta\varphi_{II} : \Delta\varphi_{III} = E_{ab} : E_{ac} : E_{bc},$$

де

$$E_{ab} = E \cos \alpha, E_{ac} = E \cos \beta, E_{bc} = E \cos \gamma.$$

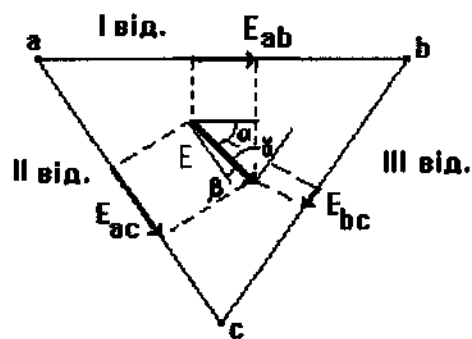


Рис. 4.20

Кожна з цих проекцій відповідає одному з стандартних відведень, прийнятих в електрокардіографії (в цьому випадку це – I, II, III стандартні відведення, для яких положення точки “a” відповідає положенню електрода на правій руці, “b” – на лівій, “c” – на лівій нозі). Використання інших електродів (нейтрального – на правій нозі і грудного, який накладається у відповідній точці грудної клітини) дозволяє використовувати також інші типи стандартних відведень, їх є в кардіології понад два десятки.

Завдання до лабораторної роботи

Завдання 1. Вивчіть технічний опис і інструкцію з експлуатації електрокардіографа та підготуйте його до роботи.

Короткий технічний опис і інструкція по експлуатації електрокардіографа

1. **Застосування:** електрокардіограф ЕКСПЧ-4 (одноканальний, мережовий, портативний, з чорнильним та тепловим записом) використовується для запису електрокардіограми при дослідженні функцій серця.

2. Технічні дані:

- відведення, які реєструє прилад без перестановки електродів: I, II, III, aVR, aVL, aVF, CR, CL, CF;
- швидкість руху стрічки – 50 мм/с,

- товщина запису: нульової лінії – не більше 1,5 мм, фронту калібрувального імпульсу – не більше 0,5 мм,
- максимальна чутливість приладу – 15–20 мм/мВ,
- частотна характеристика приладу рівномірна від 0,22 до 80 Гц з відхиленням на граничних частотах не більше 10%,
- ефективна ширина запису не більше 30 мм.

Будова електрокардіографа ЕКСПЧ-4.

На рис. 4.21 показано розміщення основних органів керування кардіографом:

1 – перемикач відведень на правій боковій панелі, за допомогою якого під'єднують одне з вказаних відведень до підсилюючого каналу і реєстратора;

2 – гніздо кабелю “земля”;

3 – клемма “земля”;

4 – чорнильниця;

5 – кнопка калібрівки 1 мВ, при натискуванні на неї подається імпульс в 1 мВ;

6 – ручка підсилення, обертанням якої можна плавно змінювати амплітуду сигналу, що записується;



Рис. 4.21

7 – ступінчастий перемикач підсилення (1:1, 1:2);

8 – ручка зміщення пера, обертанням якої забезпечується переміщення пера відносно діаграмної стрічки;

9 – кнопка заспокоєння, яку використовують для контролю відхилень пера та для швидкого повернення його в нульове положення;

10 – перемикач стрічкопротяжного механізму, що має три положення:

“З” – заправка стрічки, в цьому положенні права частина столика опускається, і при знятій кришці стрічку заправляють,

“К” – контроль, стрічкопротяжний механізм увімкнено, при притисненій кнопці “заспокоєння” можна контролювати положення пера,

“Р” – робочий режим;

11 – тумблер “мережа”;

12 – гніздо для підключення кабелю мережі.

Спрощена схема електрокардіографа наведена на рис. 4.22. Він містить вхідний блок (1 – перемикач відведень), підсилювальний блок – 2 і реєструючий пристрій – 3, а також різноманітні ручки та кнопки керування (для калібрування приладу “а”, зміщення пера “b”, підсилення “с”, перемикач режимів роботи “d”, увімкнення стрічкопротяжного механізму тощо), котрі забезпечують надходження і контроль сигналу при записі ЕКГ.

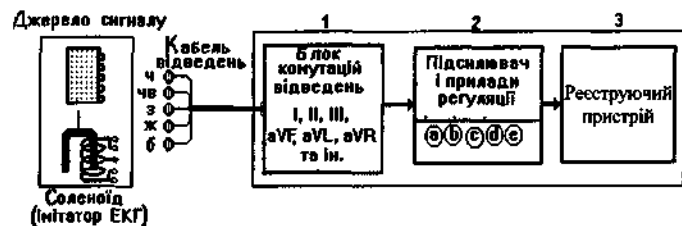


Рис. 4.22

УВАГА!

При від'єднанні кабелю відведень від приладу або обриві провідника і порушенні контакту з електродом штекера сигнал, який реєструється, значно перевищує допустимий рівень вхідного сигналу, що призводить до надмірних коливань пера, розбризкування чорнила і, як наслідок, до пошкодження гальванометра. У цьому випадку необхідно швидко перемикач відведень встановити в положення “0”.

Завдання 2. Підготовка приладу до роботи.

1. Поставити перемикачі керування в положення:

– перемикач відведень – “0”;

– перемикач підсилення – “1:1”;

– ручку підсилення в – “0”;

– зміщення пера – в середнє положення,

– важіль стрічкопротяжного механізму в положення “З”.

2. Якщо прилад не заправлений стрічкою, заправте його таким чином:

– вставте пальці у виїмки панелі приладу, натисніть вниз, виведіть верхній бортик стінки з під передньої панелі і підніміть її вгору;

– одягніть рулон стрічки на катушку і заправте папір уздовж столика на 10–15 см; встановіть важіль у положення “К”, просуньте кінець стрічки між притискним роликом і стрічкопротяжним валиком до виходу стрічки з віконечка.

3. Увімкнути прилад у мережу. Для цього:

– перевірте заземлення приладу;

– увімкніть тумблер “мережа” (повинна загорітися індикаторна лампочка);

– після 5–10 хв прогрівання встановіть перо в середнє положення.

Завдання 3. Калібровка електрокардіографа.

Для калібровки необхідно встановити стандартну чутливість приладу 10 мВ/мВ. З цією метою:

– встановіть важіль стрічкопротяжного механізму в положення “К”;

– поверніть ручку підсилення за годинниковою стрілкою на 4–6 поділок, і при натисненій кнопці “У” короткочасно натискуйте і відпускайте кнопку “1 мВ”. Проконтролюйте відхилення пера – воно має бути порядку 10 мм. У протилежному випадку – змініть підсилення, маючи на увазі досягнути відхилення 10 мм;

– увімкніть стрічкопротяжний механізм, встановивши важіль у положення “Р” і, короткочасно натискаючи і відпускаючи кнопку “1 мВ”, отримайте прямокутні імпульси калібрувального

сигналу 10 мм. (Якщо папір не рухається, легенько притисніть пальцем притискний валик).

Завдання 4. *Запис електричних сигналів на електрокардіографі.*

1. Приєднайте штекер кабелю відведень спочатку до соленоїда, а потім до мультівібратора, який імітує роботу серця відповідно до рис. 4.22 (чорний штекер кабелю відведень ПН – “права нога” слід приєднати до клеми, що відповідає середній точці соленоїда, всі інші штекери – довільним чином).

2. Проконтролюйте надходження сигналів на вхід кардіографа: для цього поставте важіль у положення “К” – контроль, переведіть перемикач відведень у позицію “Г” і натисніть кнопку заспокоєння “У”. За наявності сигналу перо буде відхилятися. Аналогічну процедуру виконайте і для інших відведень. Якщо сигнал відсутній або відбувається занадто велике відхилення пера і розбризування чорнила, переведіть перемикач відведень у позицію “0” і виявіть причину. Поставте перемикач відведень у позицію “0”.

3. Запис сигналу виконується таким чином:

– ручкою “зміщення пера” встановіть його посередині діаграмної стрічки;

– важіль стрічкопротяжного механізму поставте у положення “Р”;

– натисніть кнопку “заспокоєння” і перемикач відведень поставте у позицію “Г”. Зробіть запис кардіограми у першому відведенні. (Якщо стрічка не рухається, то легенько натисніть пальцем на притискний валик). Аналогічні операції виконуються і при записі інших відведень.

Загальне правило: зміна позиції перемикача відведень у режимі “Р – робота” проводиться при натисненій кнопці “У – заспокоєння”.

При закінченні запису електрокардіограми встановіть перемикач відведень у положення “0”, зніміть електроди, вимкніть прилад з мережі.

Оформлення роботи. У звіті мають наводитися:

– спрощена схема електрокардіографа та його технічні характеристики;

– фрагменти запису калібрувального сигналу, ЕРС соленоїда та сигналів імітатора ЕКГ з розрахунками амплітуди (в мВ) і частоти коливань (в Гц) та ударах за хвилину (амплітуда визначається за калібрівкою, частота – за періодом коливань, який знаходиться діленням відстані між зубцями на швидкість руху стрічки).

Контрольні запитання та задачі

1. Вкажіть, які припущення теорії Ейнтховена роблять її непереконливою.
2. У чому полягає істотна відмінність між двома розглянутими концепціями генезису ЕКГ?
3. Що таке електричний вектор серця, в яких одиницях він вимірюється, яка його фізіологічна природа?
4. Що таке еквівалентний струмовий диполь серця? Яка його фізіологічна природа?
5. З яких основних блоків складається електрокардіограф?
6. Яким чином пов'язані між собою вимірювання мембранних потенціалів кардіоміоцитів і електрокардіограма?
7. Що таке стандартна чутливість електрокардіографа і яким чином вона встановлюється?
8. Знайдіть потенціалу точки електричного поля диполя ($q = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$; $l = 2 \text{ мм}$), яка знаходиться на відстані 1 м від центра диполя. Кут між електричним вектором диполя і радіус-вектором дорівнює 60° . Навколишнє середовище – дистильована вода.
9. Визначити потенціал електричного поля струмового диполя, полюси якого віддалені один від одного на 5 мм, з $I = 5 \text{ мА}$ у точці, яка знаходиться на відстані $r = 0,1 \text{ м}$ від центра диполя, кут між r та L дорівнює 60° . Середовище – електроліт з питомим опором $\rho = 10 \text{ Ом}\cdot\text{м}$.

4.5. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3 “РОБОТА З РЕОГРАФОМ РГЧ-01”

Мета роботи: вивчити фізичні основи реографії, набути навичок роботи з клінічним реографом, дослідити зв'язок між змінами об'єму та опору еластичної судини.

Контрольні запитання для підготовки до лабораторної роботи

1. Змінний струм. Імпеданс електричного кола. Поняття про векторну діаграму.

- Електричні властивості біологічних тканин. Еквівалентна електрична схема. Імпеданс біологічних тканин.
- Елементи реології. Об'ємна деформація. Об'ємна швидкість плинину рідини. Пульсові хвилі. Особливості пульсацій у артеріальних та венозних судинах.
- Генезис реограми: зв'язок між деформацією та змінами імпедансу, пояснення природи реограми (амплітуди та форми сигналу) за допомогою основних рівнянь реології.

Література для підготовки до лабораторної роботи

- Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1992.
- Ремизов А.Н. Курс физики, электроники, кибернетики для медицинских институтов. – М.: Высшая школа, 1982. – Гл. 8 (раздел 8), гл. 18 (раздел 2), гл. 22 (раздел 7).
- Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1987. – Гл. 11 (разделы 1–2), гл. 18 (раздел 4).
- Ливенцев Н.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1978. – Ч. 2, раздел 144, ч. 1 разделы 9, 10.
- Ливенцев Н.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1974. – Разделы 20, 21, 76.

4.5.1. Додаткові теоретичні відомості

Реографія (“рео” – течу, “графо” – пишу) – метод реєстрації деформацій ділянки тіла (зміна об'єму) за змінами його електричних параметрів (опору). До певної ділянки тіла (рука, нога, голова тощо) прикладаються електроди (пластинчасті, точкові, стрічкові тощо), між якими пропускається високо-частотний електричний струм. Робоча частота, на якій реєструються зміни опору реографом, а, отже, і частота струму, набуває значень з діапазону 30–300 кГц. Густина цього струму найбільша в ділянках з великою електропровідністю. Це, здебільшого, кровеносні судини і міжклітинна рідина. Зміна опору ділянки біологічної тканини, таким чином, залежатиме від її кровонаповнення і змінюватиметься відповідно до кардіоциклу.

Основні положення реографії можна спрощено сформулювати таким чином.

- Зміна об'єму ділянки ΔV пропорційна зміні її електричного опору ΔR : $\Delta V \sim \Delta R$.

- Зміну кровонаповнення органа (ділянки) можна знайти з рівняння нерозривності струменя для нестационарного потоку рідини, враховуючи об'ємну швидкість притоку $Q_{in}(t)$ та відтоку $Q_{out}(t)$ рідини до даної ділянки:

$$\Delta V = \int [Q_{in}(t) - Q_{out}(t)] dt.$$

Якісно ці зміни зображені на рис. 4.23 (крива 1). Припустимо, що в певній ділянці по артеріальних судинах кров рухається з об'ємною швидкістю $Q_a(t)$, а по венозних – $Q_v(t)$, причому за цикл скорочення серця кількість крові, яка поступила до ділянки, рівна кількості, яка залишила ділянку. Враховуючи пульсуючий $Q_a(t)$ і порівняно плавний $Q_v(t)$ кровообігу, бачимо, що зміна об'єму ділянки здійснюється завдяки різниці об'ємних швидкостей $Q_a(t)$ та $Q_v(t)$:

$$\Delta Q(t) = Q_a(t) - Q_v(t).$$

Для проміжку часу $[t_1, t_2]$ об'ємна швидкість $Q_a(t) > Q_v(t)$. Отже, об'єм ділянки на цьому проміжку зростатиме, і навпаки, у проміжку $[t_2, t_3]$ об'єм ділянки зменшується, про що свідчить зменшення амплітуди реограми (див. залежність $V(t)$ на рис. 4.23, крива 3).

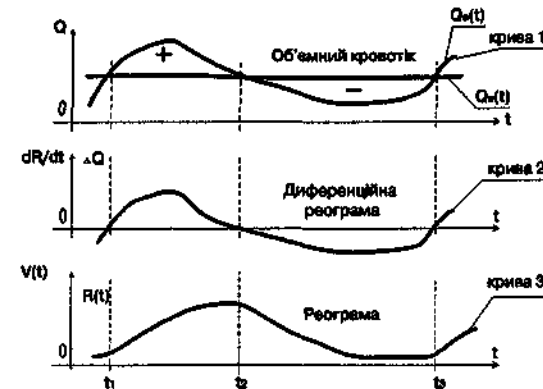


Рис. 4.23

Крива 2 являє собою диференціальну реограму; вона відображає швидкість зміни об'єму ділянки:

$$dV(t)/dt \sim dR(t)/dt.$$

3. Об'ємна швидкість рідини визначається рівнянням Гагена-Пуазейля

$$Q(t) = \Delta P(t)/X(r, \eta),$$

де $\Delta P(t)$ – зміна тиску; $X(r, \eta)$ – гідравлічний опір, який залежить від радіуса судини r та в'язкості рідини η .

4. Зміну тиску можна оцінити за допомогою рівняння об'ємної деформації ділянки

$$\Delta P(t) = \chi \Delta V(t)/V_0,$$

де χ – модуль об'ємної пружності.

Як видно з цих рівнянь, змінна величина ΔV буде залежати не тільки від того, як змінюються з часом $Q_{in}(t)$ та $Q_{out}(t)$, що спостерігається при зміні хвилинного об'єму крові (ХОК) чи ударного об'єму серця, але і при зміні тону судин (модуль χ) та їх провіту (радіус r), які знаходяться під контролем нервової та гуморальної систем організму. Це означає, що одному і тому самому значенню Q (чи ХОК) можуть відповідати різні значення амплітуди реограми, тобто однозначного зв'язку між $\Delta R/\Delta t$ і об'ємною швидкістю кровотоку Q не існує.

Певні клінічні методики дозволяють за змінами опорів ΔR судити про зміни об'єму ΔV . Існує декілька методик непрямої оцінки значень Q за опором R . Широко поширена в клініці методика А.А. Кедрова, яка використовує рівності відношень

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta R}{R},$$

де R – опір ділянки; V – її об'єм; ΔV і ΔR – їх зміни відповідно. Ототожнюючи зміну об'єму ΔV з ударним об'ємом серця VO і величину V – з об'ємом тіла V_m , яка є пропорційною до ваги тіла $P \sim V_m$, і, знаючи значення P і ΔR , визначають величину ударного об'єму серця (VO) за такою формулою:

$$VO = k P \Delta R/R,$$

де k – деякий емпіричний коефіцієнт.

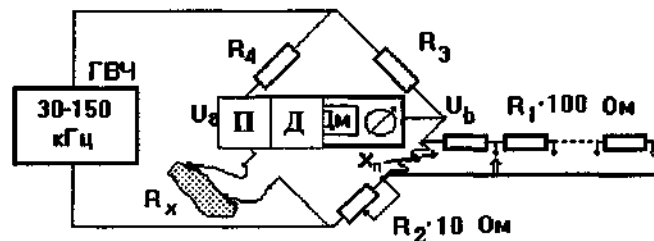


Рис. 4.24. Спрощена схема реографа: R_1, R_2, R_3, R_4 – плечі моста реографа; R_1 – опір для грубого налагодження моста; R_2 – опір для плавного налагодження моста

Принцип вимірювання опорів ділянки тканин. Вимірювання змін опорів ділянки тіла проводять спеціальним пристроєм реографа, який містить у собі вимірювальний міст (рис. 4.24). В одне з плечей моста увімкнено вимірювальний опір R_x , у друге – магазин опорів – R_1 і R_2 , який дозволяє з точністю до $0,5 \text{ Ом}$ встановити будь-який опір від 0 до 1100 Ом . Генератор високої частоти (ГВЧ) використовується для живлення моста.

Підсилювач Π підвищує рівень сигналу на виході з моста, демодулятор Δ виділяє низькочастотну складову сигналу змін опорів. Крім цього, реограф містить різні пристрої налагодження, калібровки та живлення вимірювальної схеми. На виході приладу звичайно отримують низькочастотний сигнал, який характеризує синхронну до наповнення зміну опорів ділянки тканини, тобто сигнал реограми, або її диференціальну форму (похідну від реограми), що відображує швидкість зміни кровонаповнення ділянки тканин. Зміною величин опорів R_1 і R_2 досягається рівновага моста, тобто рівність потенціалів $\phi_a = \phi_b$. У цьому випадку відхилення стрілки індикатора мінімальне, а чутливість приладу – максимальна. Налаштування моста по реактивній складовій струму (завдяки паразитній ємності C) здійснюється за допомогою змінного індуктивного опору X_n , увімкненого в одне з плечей моста.

Завдання 1. Підготовка приладу до роботи.

Вивчіть інструкцію з експлуатації реографа РГЧ-01 (див. п. 4.5.2) і підготуйте його до роботи. Згідно з інструкцією проведіть налагодження реографа.

4.5.2. Стислі технічні характеристики та інструкція з експлуатації реографа РГЧ-01

1. Призначення приладу.

1.1. Реограф РГЧ-01 є електронним медичним діагностичним приладом і призначений для вимірювання змін активних опорів складової різних ділянок тіла пацієнта при одночасному вимірюванні абсолютних величин цих опорів. Реєструючими приладами можуть бути електрокардіографи, різних типів поліграфи.

2. Технічні характеристики:

- несуча частота каналів $34 \text{ кГц} - 79 \text{ кГц}$;
- максимальний коефіцієнт перетворення (чутливість) каналу знаходиться в межах від 25 до 1000 мВ/Ом , диференціального виходу – $(20-60) \text{ мВ/Ом}$;
- постійна часу диференціального виходу – не більше 11 мс ;
- нерівномірність амплітудно-частотної характеристики кожного каналу в межах від $0,2$ до 70 Гц – не більше 10% ;
- діапазон зміни постійної складової активного опору від 30 до 1100 Ом , відносна похибка вимірювання активного опору не перевищує 10% .
- струм у колі при будь-яких положеннях регуляторів не більший за 3 мА .

3. Вказівки про техніку безпеки.

Прилад РГЧ-01 виготовлений по класу захисту II. При експлуатації заземлення не є обов'язковим. Робоче заземлення використовується для зменшення рівня перешкод (шумів).

Для уникнення механічного пошкодження крихких потенціометрів і тумблерів – прохання: обертати всі ручки приладу без значних зусиль.

Опис конструкції апарата. Блок каналу реографа винесений з приладу і розміщений на лабораторному столі. На передній панелі каналу (рис. 4.25) розміщені перемикачі калібрувального

сигналу 1, перемикач магазину опорів 2 для грубого налагодження моста R_1 , змінний резистор R_2 з лімбом відліку для точного налагодження моста 3, регулятор 4 для налагодження моста за реактивною складовою X_m , регулятор 5 рівня виходу "Рів. Вих.", гніздо Г для вимірювання калібрувальних резисторів та розняття "Вихід" 6 для увімкнення електродів.

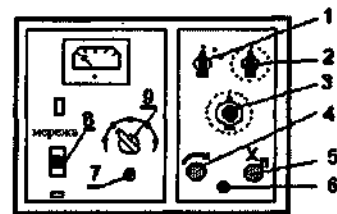


Рис. 4.25

На передній панелі блока живлення (він знаходиться на столі викладача) розташовані вмикач мережевого живлення "Мережа" 8, перемикач "Баланс каналів" 9, який містить вихід окремого каналу до індикатора, кнопка калібруатора 7, при натисканні якої подається калібрувальний сигнал одночасно всім каналам. На задній панелі блоків розміщені гнізда для виведення сигналу реограми (верхнє гніздо) та її диференціальної форми (нижнє гніздо).

Підготовка приладу до роботи

1. Увімкнення приладу в мережу (встановіть тумблер "Мережа" у положення "увімкнено").

2. Попередня настройка приладу (виконується у випадку розбалансування каналу, ступінь якого визначається викладачем):

- поставити ручки R_1 та R_2 у положення "0";
- регулятор рівня виходу встановити у положення, при якому стрілка індикатора відхиляється на $3/4$ шкали;
- повільно обертуючи регулятор X_m , встановити (мінімальне) відхилення стрілки.

3. Настройка реографа для зняття реограми (виконується студентами):

- перевірити підключення електродів до блока реографа з використанням гнізда “Вхід”;
- регулятором “Ур. вих” встановити стрілку індикатора на 3/4 шкали;
- лімб регулятора R_1 встановити на позначку 5;
- за допомогою регулятора R_2 провести грубу настройку моста за мінімальним відхиленням стрілки індикатора;
- поперемінним плавним обертанням регуляторів X_n та R_2 збалансувати міст точніше (спочатку, обертаючи потенціометр, добиваємося мінімуму, потім обертанням R_2 зменшуємо відхилення стрілки; після цього поперемінним обертанням X_n та R_2 досягаємо найменшого відхилення стрілки, причому для малих відхилень стрілки рівень вихідного сигналу встановлюємо максимальним).

4. Разом із викладачем ручками управління реографа і осцилографа вивести на екран реограму і встановити необхідну чутливість каналу реографа. Для зміни об'єму судини можна використовувати грушу, періодично і легко натискаючи її.

Якщо успішно виконані вказівки, прилад до роботи готовий. Зробіть пробну зміну об'єму трубки введенням 10 мл рідини за допомогою шприца.

Вірно настроєний комплекс має забезпечувати наявність зображення на екрані реограми амплітудою 40–50 мм без очевидних амплітудних викривлень у вигляді плато на реограмі.

Виконавши настройку реографа, запишіть значення опору трубки $R_m = 100 \cdot R_1 + 10 \cdot R_2$, де R_1 і R_2 – величини опорів на перемикачі 2 та резисторі 3 (див. рис. 4.25). Запишіть значення об'єму трубки V_m (наведене на макеті судини).

Завдання 2. Експериментальне дослідження залежності зміни опору трубки R_m від зміни об'єму системи ΔV .

Дослідження проводиться на моделі, яка імітує властивості судини. Схематично макет поданий на рис. 4.26.

Зміна об'єму системи проводиться за рахунок рідини, витісненої з шприца; частина цієї рідини потрапляє в трубку і викликає зміну її об'єму ΔV_m .

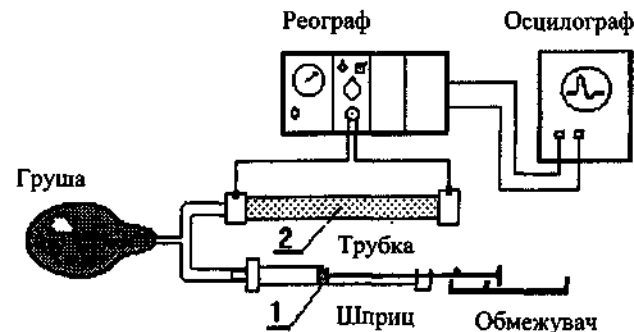


Рис. 4.26. Схема макета для дослідження реограми

1. Вимірювання амплітуди реограми. Плавним рухом шприца ввести дозований об'єм рідини ΔV , який послідовно дорівнює 10; 7,5; 5 і 2,5 мл – цим об'ємам відповідають позначки на шприці. Для кожного із значень ΔV виміряти амплітуду реограми на екрані осцилографа. Дані занести в графу A (мм) заздалегідь приготованої таблиці.

2. Визначення зміни опору. Для визначення ΔR_m необхідно провести калібрівку реографа. З цієї метою встановити значення R_x (рис. 4.25, ручка 1) рівним 0,25 Ом, натисніть кнопку калібрівки 7 і виміряйте амплітуду калібрувального сигналу на екрані A_x (мм). Знайдіть чутливість приладу: $\alpha = R_x / A_x$ (Ом/мм). Якщо калібрівка не може бути виконана, то треба взяти чутливість комплексу $\alpha = 0,05$ Ом/мм.

Визначити $\Delta R_m = \alpha A$ (Ом).

3. Зміну об'єму трубки ΔV_m для кожного витісненого об'єму рідини ΔV знаходять із співвідношення

$$\Delta V_m = V_m (\Delta R_m / R_m).$$

За знайденими значеннями ΔV_m визначте відношення $\Delta V_m / V$. Знайдіть середнє його значення. Поясніть зміст одержаного коефіцієнта, враховуючи розподіл рідини між об'ємами макета.

За даними експериментальних досліджень побудуйте графік залежності $\Delta R_m = f(\Delta V)$.

Таблиця. Визначення змін об'єму еластичної трубки

№	Об'єм системи ΔV	10 мл	7,5 мл	5 мл	2,5 мл
1.	Амплітуда реограми A [мм]				
2.	Опір ΔR [Ом]				
3.	Об'єм трубки ΔV_m [мл]				
4.	Відношення $\Delta V_m / \Delta V$				

Оформлення роботи. У протоколі має бути: а) коротке пояснення фізичних основ реографії; б) схема лабораторної установки; в) таблиця з результатами вимірювань; г) графік залежності реограми від зміни об'єму системи і висновки.

Контрольні запитання та задачі

1. Який зв'язок між реограмою судини та тиском рідини (крові) у ньому? Якими фізіологічними параметрами судин визначається амплітуда реограми?
2. Чи впливає швидкість кровотоку (лінійна, об'ємна) на амплітуду?
3. Як відрізняються між собою реограми різних судин (артерій, артеріол, венул, вен)?
4. Амплітуда реограми у пацієнта зменшилась удвічі за короткий (кілька хвилин) проміжок часу. Як це можна пояснити?
5. Яким чином здійснюється настройка вимірювального моста реографа?
6. Яким чином пояснити незмінність амплітуди реограми при зміні хвилинного об'єму крові?
7. Як впливає частота скорочень серця (при незмінному ударному об'ємі) на амплітуду реограми?
8. Як зміниться реограма аорти при зміні жорсткості її стінок (наприклад, при атеросклерозі)? Завищеними чи заниженими є результати визначення ударного об'єму крові за методикою А.Кедрова у цьому випадку?
9. Чи зміниться реограма судини, якщо лінійна швидкість кровообігу зросте вдвічі?
10. Чи впливає дихання на реограму: а) легневих судин; б) судин кінцівок; в) судин мозку?

11. Чому є необхідним якісний контакт електродів з досліджуваною ділянкою тіла?
12. Визначте, у скільки разів відрізняються між собою імпеданси електричних ланцюгів, які складаються з послідовно та паралельно з'єднаних активного опору $R = 100 \text{ Ом}$ і ємності $C = 0,1 \text{ мкФ}$. Яку індуктивність необхідно увімкнути до першого ланцюга, щоб імпеданс її був 200 Ом ? Частота змінного струму 10^3 Гц .

РОЗДІЛ 5. ЕЛЕМЕНТИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ БІОФІЗИКИ ТА БІОФІЗИКИ МЕМБРАННИХ ПРОЦЕСІВ У КЛІТИНАХ

*"Быть может, эти электроны –
Миры, где пять материков,
Искусства, знания, войны, троны
И память сорока веков!
Ещё, быть может, каждый атом –
Вселенная, где сто планет;
Там всё, что здесь, в объёме сжатом,
Но также то, чего здесь нет."*

Валерий Брюсов

Біофізика – наука про явища живої природи, які вивчають на всіх рівнях, починаючи з молекул і клітин та закінчуючи біосферою в цілому, на підставі загальних законів фізики і насамперед на уявленні про атомно-молекулярну будову речовини.

Біофізику умовно поділяють на три розділи: молекулярну біофізику, біофізику клітин і біофізику складних систем.

Молекулярна біофізика вивчає будову і фізико-хімічні властивості біологічно функціональних молекул, передусім біополімерів – білків і нуклеїнових кислот. Завдання молекулярної біофізики – розкрити фізичні механізми, що відповідають за біологічні функції молекул. Це найбільш розвинений розділ біофізики, тому що легше вивчати атоми і молекули, ніж клітини і організми.

Біофізика клітинних процесів займається в основному вивченням структурно-функціональної організації клітин, зокрема молекулярної організації клітинних мембран, процесів транспорту речовини крізь мембранні структури, електрогенезу та біоенергетики клітин, механізмів міжклітинної взаємодії тощо.

Біофізика складних систем вивчає моделі біологічних процесів, зокрема різноманітні сенсорні системи, проблеми біологічного розвитку, принципи регуляції внутрішнього середовища організму та інші проблеми.

Всі ці розділи тісно пов'язані з біологічними і хімічними дисциплінами (біохімією, молекулярною біологією, біоорганічною та біонеорганічною хімією тощо), але методологія молекулярної біофізики та інших розділів біофізики – це математичний апарат і експериментальні методи фізики. Математичні і теоретичні основи сучасної біофізики спираються насамперед на термодинаміку і статистичну фізику, молекулярну фізику і квантову механіку тощо.

Іноді задачі біофізики розуміють спрощено і зводять до застосування фізичних приладів у медико-біологічних дослідженнях. Звичайно, це не так. Коли лікар досліджує хворого за допомогою електрокардіографа або вимірює температуру його тіла термометром, це зовсім не означає, що він займається біофізикою. Біофізичне дослідження базується на фізичній постановці задачі, на загальних законах фізики і передусім на атомно-молекулярній будові речовини.

Оскільки жива природа дуже складна, то постановка послідовних медико-біологічних задач і їх вирішення можливі поки що лише в обмеженій кількості випадків. Нині біофізика перебуває у розквіті (багато талановитих людей присвячують дедалі більше свого часу і зусиль роботі в цій галузі). З цією важливою обставиною, а також з успіхами суміжних наук (фізики, хімії, біології, комп'ютерної техніки тощо) пов'язані значні досягнення в сучасній біофізиці, а саме:

- 1) вивчена будова і властивість біологічно функціональних молекул (білків і нуклеїнових кислот);
- 2) досліджені властивості і створені надійні молекулярні моделі функціонування клітинних структур;
- 3) успішно розвиваються фізико-математичні моделі складних біологічних процесів (зокрема, тих процесів, що відбуваються в організмі людини). Для вивчення цих процесів великого значення набувають ідеї і методи термодинаміки відкритих біологічних систем і синергетики.

Нині ні у кого немає сумнівів стосовно того, що ХХІ століття ознаменується видатними досягненнями молекулярної біології та біологічної фізики. Цей процес буде, з одного боку, характеризуватися все більшою інтеграцією з фундаментальними природ-

ничими науками (насамперед фізикою, хімією та іншими), а з другого боку, – мати дивовижні практичні втілення в медицину.

У цій главі ми зупинимося на перших двох розділах біофізики, а саме: розглянемо основні питання, що мають безпосереднє відношення до молекулярної біофізики та до біофізики клітин; точніше кажучи, до проблем міжмолекулярної взаємодії та структури біополімерів – білків і нуклеїнових кислот, а також до проблем, пов'язаних з мембранними структурами клітин. Третє коло питань, що стосуються біофізики складних систем (зокрема, термодинаміки відкритих біологічних систем та синергетики), буде розглянуте в наступній главі.

5.1. МІЖМОЛЕКУЛЯРНІ ВЗАЄМОДІЇ У БІОПОЛІМЕРАХ

5.1.1. Класифікація взаємодій у біополімерах

Взаємодії у біополімерах умовно поділяють на сильні та слабкі. До перших слід віднести ковалентні (хімічні або обмінні), кулонівські (іонні) зв'язки, тоді як до других – диполь-дипольні, водневі та гідрофобні зв'язки. У табл. 5.1 наведені основні типи зв'язків і величини енергії взаємодій у біополімерах.

Рисунок 5.1 ілюструє характер міжмолекулярних взаємодій для трьох різних областей відстаней між атомами (молекулами). Для відносно малих відстаней (область I) найсуттєвішими являються сильні сили відштовхування, зумовлені ковалентною (обмінною) та кулонівською взаємодіями. Для проміжних відстаней, де досягається мінімум потенціальної енергії (область II), сили відштовхування та сили притягування, зумовлені ковалентними, електростатичними та іншими силами, виявляються одного порядку. Нарешті, в області III, на відносно великих відстанях починають переважати сили притягання, зумовлені в основному електростатичними мультипольними та диполь-дипольними (індукційними та дисперсійними) силами.

Таблиця 5.1. Міжмолекулярні взаємодії у біополімерах

Типи зв'язків (взаємодій)	Енергія, кДж/моль
Ковалентний (C-C, C-N)	10^2-10^3
Кулонівський (іонна)	$\approx 10^2$
Диполь-дипольний	≥ 10
Водневий іонний	$10-10^2$
Водневий нейтральний	≈ 10
Гідрофобний	≤ 10

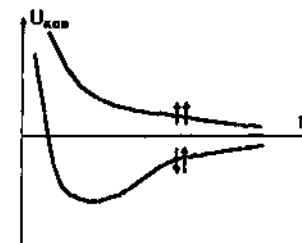
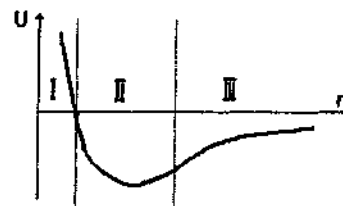


Рис. 5.1. Характер міжмолекулярних взаємодій U залежно від відстані r між атомами (молекулами). Рис. 5.2. Залежність енергії ковалентних взаємодій $U_{ков}$ залежно від відстані r між ядрами атомів

Сильні ковалентні взаємодії – це взаємодії, зумовлені зовнішніми електронами атомів. Поняття ковалентного зв'язку було запропоновано Л'юїсом у 1916 році, який пов'язав його з утворенням електронної пари, що належить одночасно двом атомам. Квантово-механічний розрахунок ковалентного зв'язку в молекулі водню на підставі рівняння Шредингера (див. розділ 9) був проведений Гайтлером та Лондоном у 1927 році. Результати розрахунку ковалентного зв'язку у системі, що складається з двох атомів водню, залежно від відстані r між ядрами цих атомів наведені на рис. 5.2.

Видно, що в залежності від орієнтації спінів може мати місце як відштовхування – спіни паралельні (крива 1), так і притягання – спіни антипаралельні (крива 2). В останньому випадку рівноважне положення двох атомів досягається тоді, коли відстань між ними дорівнює r_0 . Ковалентний зв'язок у двох однакових атомах

характеризується симетричною щодо обох ядер хвильовою функцією електронів та антисиметричною спіновою хвильовою функцією. Це є неполярний (гомео-полярний) зв'язок. Таким чином, можна сказати, що ковалентна (або, як ще кажуть, хімічна чи обмінна) взаємодія зумовлена зв'язком, що створюється між двома однаковими атомами за рахунок спарених електронів з протилежно напрямленими спінами. Коли ж атоми різні, то електронна хмара зміщена у бік більш електровід'ємного атома – такий зв'язок називається полярним (гетерополярним).

Цікаво відзначити, що сильна ковалентна (хімічна, обмінна) взаємодія стає зрозумілою лише з позицій квантової механіки. Справді, два електрони не можуть одночасно знаходитися, згідно з уявленнями класичної електродинаміки, що спирається на закон Кулона, в малій області між двома ядрами, скажімо, в молекулі H_2 або He_2 . Але це стає повністю зрозумілим з погляду квантової механіки, зокрема принципу Паулі, оскільки ці електрони мають антипаралельні спіни (див. розділ 9).

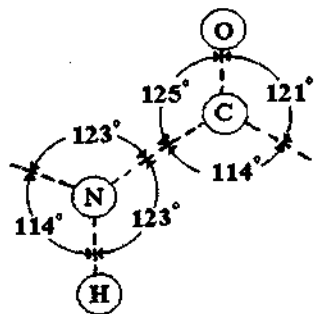


Рис. 5.3. Структура пептидного зв'язку за Л. Полінгом

Наступні приклади дають уяву про величину сильних взаємодій: 1) енергія, що необхідна для розриву C-C зв'язку дорівнює 349 кДж/моль, а для C-N зв'язку відповідно – 336 кДж/моль; 2) основний елемент зв'язку амінокислотних залишків у білках – це пептидний зв'язок – CO-NH-. Він має плоску будову, як показав Л. Полінг (див. рис. 5.3). Усі зв'язки між атомами у пептидному зв'язку – ковалентні. Сильні взаємодії визначають ланцюгову будову біополімерів, поєднання між собою монополімерів – амінокислотних залишків, нуклеотидів тощо.

Іонні взаємодії. Сили взаємодії між іонами зумовлені законом Кулона. Енергія іон-іонної взаємодії має такий вигляд:

$$U_{\text{іон}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r}, \quad (5.1)$$

де q_1, q_2 – заряди іонів; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична стала; ϵ – діелектрична проникність середовища; r – відстань між іонами. Іонні зв'язки утворюються між іоногенними групами у білках, між фосфатними групами в нуклеїнових кислотах і катіонами. Так, аніонами є кислотні залишки – глутамін Глу, тирозин Тир тощо, тоді як в ролі катіонів виступають основні залишки – лізин Ліз, аргінін Арг, гістидин Гіс тощо. Величина іон-іонної взаємодії має той самий порядок, як і ковалентна взаємодія, тобто сотні кДж/моль.

Електростатичні (іон-дипольні та інші мультипольні) взаємодії. Біомолекули не могли б функціонувати, якби, окрім сильних зв'язків усередині біомолекул, не існували б невалентні зв'язки, більш слабкі сили. Слабкі взаємодії – це взаємодії всередині клітин і їх органоїдів, це взаємодія між білками та ліпідами, вуглеводами, нуклеїновими кислотами. Слабкі взаємодії спонукають до рухомих, нежорстких конформацій, що необхідні для функціонування біоорганізмів. Розглянемо основні види відносно слабких взаємодій у біологічних системах.

Іон-дипольні взаємодії – це взаємодії між іонами та полярними групами молекул. Як відомо, полярними молекулами (групами) називаються молекули, що володіють дипольним моментом, котрий у відсутності зовнішнього електричного поля не дорівнює нулю. Потенціальна енергія іон-дипольної взаємодії залежить від заряду іона q_0 і дипольного моменту $p = ql$ полярної групи відповідно до формули

$$U_{\text{іон-диполь}} = \frac{q_0 (ql)}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2}. \quad (5.2)$$

Пояснимо, звідки виникає подібна залежність $U_{\text{іон-диполь}}$ від відстані. В загальному випадку потенціал поля, який утворює система зарядів на відстанях, більших порівняно з розмірами системи, може бути поданий у вигляді ряду по потенціалах мультиполів (зарядів-монополів, диполів, квадруполів тощо). За

принципом суперпозиції для загального потенціалу такої системи зарядів маємо

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \sum_{i=1}^J \frac{q_i}{|r_i - R|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} + \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^3} + \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{X_\alpha X_\beta}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^5} + \dots,$$

де $q = \sum_{i=1}^J q_i$ – повний заряд систем;

$\vec{P} = \sum_{i=1}^J q_i \vec{r}_i$ – вектор дипольного моменту;

$Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_i q_i (X_{i\alpha} X_{i\beta} - \delta_{\alpha\beta} r_i^2)$ – тензор квадрупольного момен-

ту, в якому використане позначення для символу Кронекера $\delta_{\alpha\beta} = 1$, якщо $\alpha = \beta$, $\delta_{\alpha\beta} = 0$, якщо $\alpha \neq \beta$.

Виявляється, що потенціальна енергія взаємодії заряду q_0 в точці R з системою зарядів (рис. 6.4), що утворюють в точці R потенціал $\varphi(R)$, дається таким виразом:

$$U = q_0 \varphi(R) = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} + \frac{q_0 \vec{P} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^3} + \dots$$

Другий доданок у цій формулі саме й відповідає потенціальній енергії іон-дипольної взаємодії, що визначається формулою (5.2). Якщо у точці R знаходиться не один заряд q_0 , а система зарядів, то для них можна записати також формулу для потенціальної енергії у вигляді ряду по мультиполях. Отже, має місце мультиполь-мультипольна взаємодія двох систем зарядів, що входять до складу, наприклад, двох біомакромолекул або двох груп певної біомакромолекули.

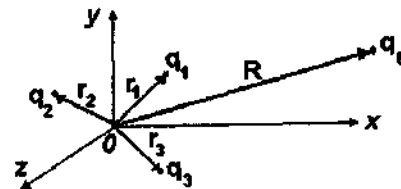


Рис. 5.4. Взаємодія заряду q_0 з системою зарядів

Залежність потенціальної енергії взаємодії між мультиполями від відстані наведена у табл. 5.2. У принципі існують більш високі мультипольні взаємодії, а саме: між октуполями (груп з восьми зарядів), гексадекуполями (груп з 16 зарядів) тощо.

Таблиця 5.2. Потенціальна енергія взаємодії мультиполів

Типи мультиполів	Монополь	Диполь	Квадруполь
Монополь	$1/r$	$1/r^2$	$1/r^3$
Диполь	$1/r^2$	$1/r^3$	$1/r^4$
Квадруполь	$1/r^3$	$1/r^4$	$1/r^5$

Диполь-дипольна взаємодія – взаємодія між диполями молекул або полярними групами молекул. Існує три типи диполь-дипольних взаємодій:

1. Орієнтаційні взаємодії.
2. Індукційні взаємодії.
3. Дисперсійні (Ван-дер-Ваальсівські) взаємодії.

Орієнтаційна диполь-дипольна взаємодія. Формула для потенціальної енергії цієї взаємодії має такий вигляд:

$$U_{op} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^5} \left(r^2 (\vec{p}_1 \vec{p}_2) - 3 (\vec{p}_1 \vec{r})(\vec{p}_2 \vec{r}) \right). \quad (5.3)$$

Якщо два диполі зорієнтовані паралельно один до одного (це, зокрема, має місце при низьких температурах чи в сильному електричному полі), то

$$U_{op} = \frac{2 p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^3}.$$

Якщо ж теплова енергія kT більша за U_{op} , то тепловий рух руйнує переважну орієнтацію і тоді усереднення за орієнтацією, як показали Рейнганум та Кеєзом, дає результат, відмінний від нуля, тільки для величини усередненої диполь-дипольної взаємодії

$$(U_{op})_{серед.} = \frac{2p_1^2 p_2^2}{3kT r^6}. \quad (5.4)$$

Видно, що ця взаємодія обернено пропорційна температурі T і шостому степеню відстані між диполями.

Індукційна диполь-дипольна взаємодія. Ця взаємодія викликана тим, що сталий диполь однієї молекули індуктує в іншій молекулі чи групі молекул дипольний момент. Індукований електричним полем E дипольний момент дорівнює $p = \alpha E$, де α – поляризованість молекули. Напруженість E електричного поля, що створюється сталим диполем p_0 на відстані r від нього, де знаходиться молекула (група молекул) з індуктованим диполем p , має вигляд $E = \frac{p_0}{2\pi\epsilon_0\epsilon r^3}$. Відповідно енергія індукційної взаємодії є такою:

$$U_{ind} = -\frac{\alpha p^2}{2\pi\epsilon_0\epsilon r^6}. \quad (5.5)$$

Таким чином, індукційна взаємодія пропорційна r^{-6} і не залежить від T . Теорія індукційних диполь-дипольних взаємодій була створена Дебаєм (1920 р.) і Фалькенхагеном (1922 р.).

Дисперсійні (Ван-дер-Ваальсівські) взаємодії. Ці взаємодії визначають внутрішньо- та міжмолекулярні взаємодії атомних груп і молекул, насичених валентними зв'язками. Вони не залежать від зарядів q , дипольних p і квадрупольних Q_{ab} моментів. Зокрема, ці взаємодії відповідають за існування молекулярних кристалів. Ще одна назва дисперсійних взаємодій – Ван-дер-Ваальсівські взаємодії – пов'язані з тією важливою обставиною, що вони визначають поправку на тиск у рівнянні стану Ван-дер-Ваальса для реальних газів.

Дисперсійні сили мають квантовий характер. Теорія дисперсійних сил була створена для частинного випадку в 1927 р. Вантоле, а для загального випадку в 1930 році Лондоном. У 1948 році було враховано запізнення дисперсійної взаємодії на великих відстанях, тобто той зрозумілий факт, що будь-яка взаємодія повинна поширюватися у просторі із скінченною швидкістю. Це зробили Казимір і Польдер, які показали, що енергія міжмолекулярної дисперсійної взаємодії обернено пропорційна відстані між молекулами в степені 7, тобто $U_{дсп} \sim 1/r^7$. У 1955 році Є. М. Ліфшиц створив загальну теорію Ван-дер-Ваальсівських сил між макроскопічними тілами.

Формула Лондона для дисперсійних (Ван-дер-Ваальсівських) сил отримується при розв'язанні рівняння Шредінгера за допомогою так званої теорії збурень. Її суть полягає у врахуванні миттєвого значення електростатичної енергії взаємно індуктованих диполів двох молекул з наступним усередненням по їх орієнтаціях. Формула Лондона є така:

$$U_{дсп} = -\frac{3}{4} \hbar \omega_0 \frac{\alpha^2}{r^6}. \quad (5.6)$$

Тут $\hbar = h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка, поділена на 2π , α і ω_0 – поляризованість та власна частота гармонічних осциляторів, за допомогою яких можна описати рух електронів у атомі.

Величина енергії дисперсійних (Ван-дер-Ваальсівських) взаємодій має порядок кількох кДж/моль. Такий самий порядок має енергія випаровування рідин.

Гідрофобні взаємодії. Біополімери – білки і нуклеїнові кислоти – знаходяться у водному середовищі. Між молекулами води і неполярними атомними групами діють сили відштовхування – гідрофобні сили. Це – так званий ентропійний ефект, який пов'язаний з особливостями структури води. Гідрофобні взаємодії відіграють важливу роль у формуванні структури білків, мембран тощо. Так саме завдяки гідрофобним взаємодіям між водним оточенням та “хвостами” фосфоліпідних молекул, які складаються з неполярних залишків жирних кислот, а також гідрофільним взаємодіям, тобто силам притягання, між полярними “головками” фосфоліпідних молекул та молекулами

води, що мають постійні диполі, відбувся процес самозбірки – утворення подвійного шару фосфоліпідних молекул. Внаслідок цього еволюційного детермінованого процесу створилися цитоплазматичні мембрани клітин, що представляють собою основні елементи живих систем.

Зупинимося на питанні про структуру білкових молекул більш докладно. Як відомо, первинна структура визначається послідовністю амінокислотних залишків у білковому ланцюгу; вторинна структура – це є спіральна структура білкових молекул і нуклеїнових кислот; третинна структура пов'язана з утворенням глобул; нарешті, четвертинна структура формується за рахунок об'єднання кількох глобул. Саме дві останні структури (особливо четвертинна) значною мірою існують завдяки гідрофобним взаємодіям.

Утворення структур пов'язане з дією різних сил. Ми вже казали, що єдині сильні сили у білковій глобулі – це ковалентні (хімічні) сили, які утворені, зокрема, дисульфідними зв'язками – сірчані місточки S-S. Енергія цих зв'язків дорівнює 240 кДж/моль. Але якщо б більше не було ніяких сил, то білковий ланцюг був би негнучкий і нагадував, наприклад, каучук. Тому в біополімерах діють також і більш слабкі зв'язки – електростатичні, Ван-дер-Ваальсівські, водневі та гідрофобні взаємодії.

Молекули, що мають як полярні, так і неполярні групи, розташовуються у водному середовищі так, що полярні (гідрофільні) групи контактують з водою за рахунок диполь-дипольних сил притягання, а неполярні групи з водного середовища вилучаються через гідрофобну взаємодію.

Серед амінокислотних залишків білків, як зазначалося, існують як полярні (гідрофільні), так і неполярні (гідрофобні) ділянки. Полярні амінокислотні залишки (Асп, Тир, Гіс, Ліз, Арг, Сер, Тре) – гідрофільні. Решта 12 залишків вважаються гідрофобними. Оскільки у білковому ланцюгу є слабкі зв'язки, то він може згорнутися у глобулу, при цьому гідрофобні ділянки будуть всередині, а гідрофільні – ззовні. Якщо концентрації других, тобто гідрофільних, достатньо для покриття поверхні сферичного гідрофобного ядра, то глобула має сферичну форму. Якщо ж їх не вистачає і на поверхні глобули з'являються гідрофобні ділянки,

то такі глобули об'єднуються, щоб заховати ці гідрофобні ділянки від водного оточення. Саме такий механізм визначає утворення четвертинної структури – об'єднання між собою кількох глобул. Так, молекула гемоглобіну містить чотири глобули, вірус тютюнової мозаїки – близько 2000 глобул тощо. До питання про форму глобули ми ще повернемося нижче.

Водневі зв'язки. Ряд сполук (спирти, феноли тощо) утворюють стійкі асоціати, які мають певні аномалії в їх фізико-хімічних властивостях (наприклад, підвищення температури кипіння, зменшення міжатомних відстаней та ін.) Виявилось, що подібні властивості мають сполуки, до складу яких входять атом водню в групах типу ОН та NH. Так виникла ідея про водневі зв'язки. Вперше поняття водневих зв'язків було введено у 1920 році Латимером і Родебургом для пояснення властивостей асоційованих речовин, зокрема води. Атом водню, що міститься в групах О-Н, N-Н, Н-Ф, Н-Cl й інколи S-Н і C-Н утворює специфічний зв'язок з атомами О, N, F, Cl тієї самої або іншої молекули. В цих комплексах, які схематично можна зобразити у вигляді $X...H-U$, атом водню відіграє роль мосту між електровід'ємними атомами.

Водневі зв'язки поділяють на внутрішньомолекулярні та міжмолекулярні. Останні, в свою чергу, бувають за силою середні (нейтральні) та міцні (іонні). Нейтральні міжмолекулярні водневі зв'язки існують між нейтральними молекулами і є типовими для розчинів спиртів, карбонових кислот тощо. Такі водневі зв'язки мають енергію в інтервалі 4–60 кДж/моль, що приблизно на порядок менше за енергію ковалентних (хімічних) взаємодій. При цьому відстані між атомами X і U складають до 0,3 нм. Положення протона Н у водневому зв'язку відповідає мінімуму на кривій потенціальної енергії U (рис. 5.5)

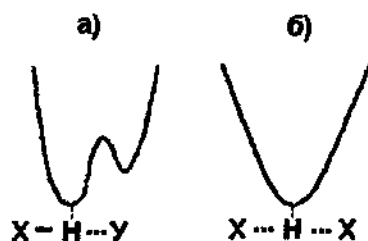


Рис. 5.5. Криві потенціальної енергії взаємодії при наявності водневих зв'язків

Випадок (а) характеризує асиметричну криву потенціальної енергії з двома мінімумами. Більша глибина лівого мінімуму означає, що протон знаходиться ближче до атома X . У випадку (б) крива потенціальної енергії є симетричною – вона має один мінімум, що відповідає одній і тій самій відстані між двома однаковими електровід'ємними атомами X .

В тих випадках, коли електровід'ємні іони (Cl^- , F^- та інші) утворюють водневі зв'язки з молекулами, до складу яких входять групи OH , NH , FH , H_2O тощо, виникають міцні (іонні) водневі зв'язки з енергією $55\text{--}250$ кДж/моль з досить короткими відстанями між атомами X і Y . Так, водневий зв'язок у комплексі $Cl\cdots HON$ характеризується енергією 55 кДж/моль , причому рівноважна відстань $r_{xy} = 0,33$ нм , тоді як в комплексі $[F\cdots H\cdots F]^-$ енергія утворення цього комплексу набуває значення $252,8$ кДж/моль , що є близьким до енергії ковалентних (хімічних) зв'язків. Рівноважна відстань між іонами фтора в комплексі $[F\cdots H\cdots F]^-$ дорівнює $0,22$ нм , тобто вона в $1,5$ рази менша за відстань між іоном хлора і групою OH в комплексі $Cl\cdots HON$.

Як вже вказувалося, наявність водневих зв'язків приводить до підвищення температури кипіння (табл. 5.3) та інших фізико-хімічних властивостей речовин.

Таблиця 5.3. Значення температури кипіння при наявності водневих зв'язків

Речовина	$T_{\text{кип}}, K$
H_2O	373
H_2Te	271
NH_3	240
H_2Se	231
H_2S	212
CH_4	112

Температура кипіння підвищується у ряді споріднених сполук (наприклад, H_2S , H_2Se , H_2Te) із збільшенням молекулярної ваги.

Аномально високі температури тверднення і кипіння води – це є також результат утворення водневих зв'язків. Коли б у воді були відсутні водневі зв'язки, то її температура тверднення $T_{\text{тверд}}$ (за теоретичними оцінками) мала бути $T_{\text{тверд}} = -100$ $^{\circ}C$, а не $T_{\text{тверд}} = 0$ $^{\circ}C$, як є насправді. За цими ж оцінками температура кипіння у відсутності водневих зв'язків має бути приблизно $T_{\text{кип}} = -80$ $^{\circ}C$, тоді як в дійсності $T_{\text{кип}} = 100$ $^{\circ}C$, тобто стає на 180 $^{\circ}C$ вище саме завдяки наявності водневих зв'язків.

Треба зазначити, що водневі зв'язки значною мірою визначають стійкість вторинної структури білків. Саме внутрішньо-молекулярні H -зв'язки між групами поліпептидного ланцюга підтримують α -спіральну структуру білка.

Прийнято вважати, що потенціальна енергія водневих зв'язків може бути апроксимована сумою двох доданків

$$U_{\text{вод.зв}} = U_{\text{міжмол}} + U_{\text{кул}}, \quad (5.7)$$

де перший доданок визначає енергію міжмолекулярної взаємодії, а другий – кулонівську енергію іон-іонної взаємодії (див. формулу (5.1)). Звичайно, енергія міжмолекулярної взаємодії задається формулою

$$U_{\text{міжмол}} = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^m - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^n \right], \quad (5.8)$$

яка відповідно до моделі Леннард-Джонса враховує як сили відштовхування, так і сили притягання (перший і другий доданки в формулі (5.8)). Досить поширеним є таке представлення для потенціальної енергії міжмолекулярної взаємодії, в якому $m = 12$, $n = 6$ (так званий потенціал Мі). Зауважимо, що значення $n = 6$ для потенціальної енергії сил притягання має своє обґрунтування

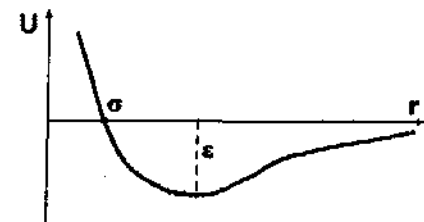


Рис. 5.6. Параметри міжмолекулярної взаємодії у моделі Леннард-Джонса

в теорії диполь-дипольної взаємодії (див. формули (5.4)–(5.6) для орієнтаційної, індукційної та дисперсійної взаємодії). Що стосується показника $m=12$ для потенціальної енергії сил відштовхування, то він обирається у вигляді $m=2n$ з міркувань математичної зручності. Для потенціала Мі коефіцієнт ϵ у формулі (5.8) характеризує глибину потенціальної ями (рис. 5.6), тоді як коефіцієнт σ визначає ту відстань між двома молекулами (атомами), де потенціальна енергія сил відштовхування і притягання взаємно врівноважуються.

На закінчення цього параграфа наведемо підсумкову табл. 5.4, яка містить у собі формули для енергії міжмолекулярної взаємодії залежно від їх типу.

Таблиця 5.4. Формули для енергії взаємодії у біополімерах

№ п/п	Тип зв'язку (взаємодій)	Приклад	Формули для енергії взаємодій
1	Ковалентні (хімічні, обмінні)	Зв'язки, які визначають первинну структуру	Простої залежності немає
2	Іон-іонні	$\begin{array}{c} \text{COO}^- \\ \\ \text{Ca}^{2+} \\ \\ \text{COO}^- \end{array}$	$U \sim \frac{q_1 \cdot q_2}{r}$, ф-ла (5.1)

3	Іон-дипольні	$\text{Na} + (\text{H}_2\text{O})_n$	$U \sim \frac{q \cdot p}{r^2}$, ф-ла (5.2)
4	Диполь-дипольні	$\text{SO}_2 \text{ SO}_2$	$U \sim \frac{p_1^2 \cdot p_2^2}{r^6 kT}$, ф-ла (5.4)
5	Диполь-індукований диполь	$\begin{array}{c} \text{HCl} \\ \\ \text{C}_6\text{H}_6 \\ \\ \text{H}_2\text{O} \end{array}$	$U \sim \frac{\alpha p^2}{r^6}$, ф-ла (5.5)
6	Дисперсійні	Взаємодія між двома атомами водню або гелію	$U \sim \frac{h \omega_0 \alpha^2}{r^6}$, ф-ла (5.6)
7	Водневі	$-\text{C}=\text{O} \dots \text{H}-\text{N}-$	$U_{\text{вод.в}} = U_{\text{міжмол}} + U_{\text{кул}}$
8	Гідрофобні	Формування ліпідного бішару і неполярних областей у білку	Простої залежності немає

5.2. СТРУКТУРНА ОРГАНІЗАЦІЯ БІЛКІВ ТА НУКЛЕЇНОВИХ КИСЛОТ

Структурна організація біополімерів – білків і нуклеїнових кислот – має першочергове значення для розуміння їх функцій в живих організмах, з'ясування молекулярної природи живого. Протягом ХХ століття був пройдений складний і дуже цікавий шлях у напрямі розкриття структури і функцій біополімерів.

Назвемо лише три визначальні реперні точки на цьому столітньому шляху:

1. У 1902 р. Фішер запропонував поліпептидну теорію структурної організації біополімерів.

2. У 1953 р. Франклін, Крик, Уотсон і Уілкінз експериментально довели, що молекули ДНК, які несуть в собі генетичну інформацію, мають спіральну структуру.

3. На початку 2000 р. американська компанія “Селера Дженомікс” оголосила про завершення основного етапу міжнародної програми “Геном людини”, яка має за мету розкриття послідовності нуклеотидів в інформаційних макромолекулах, що, по суті, дає змогу на молекулярному рівні визначити патологічні

процеси в організмі людини і розробляти ефективні методи їх запобігання.

Перейдемо безпосередньо до класифікації структурної організації білків і нуклеїнових кислот. Табл. 5.5 містить в собі відомості про чотири види структурної організації біополімерів, типи впорядкування та характер взаємодій, що їм відповідають.

Таблиця 5.5. Структурна організація біополімерів

Структура	Тип упорядкування	Характер взаємодій
Первинна	Послідовність мономерів	Ковалентні
Вторинна	Спіраль	Водневі
Третинна	Глобула	Електростатичні, Ван-дер-Ваальсівські, Гідрофобні
Четвертинна	Об'єднання глобул	Гідрофобні

5.2.1. Первинна структура

Макромолекули білків і нуклеїнових кислот характеризуються чітко відповідною послідовністю мономерів, а саме: в білках – послідовністю амінокислотних залишків в поліпептидному ланцюгу, в нуклеїнових кислотах – послідовністю окремих нуклеотидів в полінуклеотидному ланцюгу. Окремі ділянки цих ланцюгів, тобто поруч розташовані амінокислоти та нуклеотиди, пов'язані між собою дуже сильними хімічними ковалентними зв'язками, величина яких може досягати 800 кДж/моль. До речі, середня теплова енергія одноатомних молекул при кімнатній температурі ($T \approx 300\text{ K}$) має величину

$$U_{\text{тепл.}} = 3/2 kT \cdot N_A = 3/2 RT \approx 3,7 \text{ кДж/моль},$$

що майже в 220 разів менше, ніж вказана вище енергія зв'язку мономерів в білках та нуклеїнових кислотах.

Послідовність мономерів (амінокислот в поліпептидному ланцюгу білків та нуклеотидів в полінуклеотидному ланцюгу нуклеїнових кислот) визначає первинну структуру макромолекул. Саме з'ясування первинної структури генетичних макромолекул людини і є головною метою згаданої вище програми "Геном людини", що здавалася фантастичним проектом ще 10 років тому

і яка стала дійсністю в 2000 році. І нині вже важко передбачити медичні наслідки цієї програми, які можуть стати реальністю через 10 років.

Розглянемо більш детально *первинну структуру білків*, що визначається послідовністю амінокислот. Амінокислоти мають дві частини: 1) однакову для всіх амінокислот пептидну групу; 2) бокову групу (БГ), від якої залежить специфіка амінокислоти. Всього таких різних бокових груп (і відповідно амінокислот) може бути 20. Кожний пептидний блок поліпептидного ланцюга складається з ковалентно пов'язаних атомів -CO-NH- (рис. 5.7). До альфа-вуглецевого атома C_α приєднується бокова група також за допомогою ковалентного зв'язку. Різні пептидні блоки із своєю боковою групою з'єднуються в поліпептидний ланцюг внаслідок ковалентного зв'язку між атомом вуглецю C одного пептидного блоку та атомом азоту N другого пептидного блоку.

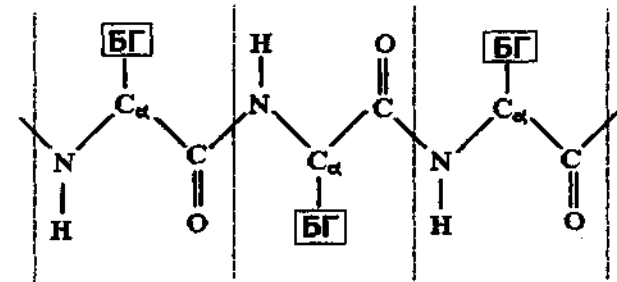


Рис. 5.7. Схема будови поліпептидного ланцюга білкової молекули

Двадцять амінокислот, що відрізняються своїми боковими групами (амінокислотними залишками), об'єднуються в три класи відповідно до їх фізичних властивостей, що визначаються характером притаманних їм взаємодій. Ця специфіка амінокислот визначає їх просторову структуру, а саме: вторинну, третинну і четвертинну структуру білків.

До першого класу віднесемо п'ять заряджених амінокислотних залишків: а) додатно заряджені (аргінин, гістидин, лізин); б) від'ємно заряджені (аспарагінова кислота, глутамінова кислота). У табл. 5.6 наведені структурні формули цих заряджених амінокислотних залишків, що через альфа-вуглецевий атом C_α

(чорне коло) приєднується до пептидної частини амінокислоти. Амінокислотні залишки першого класу здатні на кулонівські (іон-іонні) та інші електростатичні взаємодії (іон-дипольні, іон-квадрупольні тощо).

До другого класу відносяться сім полярних амінокислотних залишків, тобто таких, що є, в цілому, електронейтральними, але мають дипольний момент через просторове рознесення додатного і від'ємного сумарних зарядів (табл. 5.7). Ці амінокислотні залишки забезпечують диполь-дипольну взаємодію різних типів.

І нарешті, найбільший, третій клас складається з восьми неполярних амінокислотних залишків (табл. 5.8). Для них є характерними ефекти гідрофобної взаємодії.

Первинна структура нуклеїнових кислот визначається послідовністю мономерів (нуклеотидів) в полінуклеїдному ланцюгу. Кожний нуклеотид складається з фосфату і сахару, які пов'язані сильними ковалентними силами і тим самим визначають міцність ланцюга, а також азотних основ двох типів – пуринових (аденін А і гуанін Г) та піримідинових (тимін Т, цитозин Ц і урацил У).

Таблиця 5.6. Заряджені амінокислотні залишки

Амінокислотний Залишок	Знак заряду	Структурна формула
Аргінін	додатний	$\begin{array}{ccccccc} \bullet - & \text{C} & - & \text{C} & - & \text{C} & - & \text{N} & - & \text{C} = & \text{NH}_2 \\ & & & & & & & & & & \\ & \text{H}_2 & & \text{H}_2 & & \text{H}_2 & & \text{H} & & \text{NH}_2 & \end{array}$
Гістидин	додатний	$\begin{array}{c} \text{H}_2 \quad \text{H} \\ \quad \\ \bullet - \text{C} - \text{C} - \text{N} \\ \quad \\ \text{HC} \quad \text{C} \\ \backslash \quad / \\ \text{NH} \end{array}$
Лізин	додатний	$\begin{array}{ccccccc} \bullet - & \text{C} & - & \text{C} & - & \text{C} & - & \text{C} & - & \text{NH}_3 \\ & & & & & & & & & \\ & \text{H}_2 & & \text{H}_2 & & \text{H}_2 & & \text{H}_2 & & \end{array}$

Аспарагінова кислота	від'ємний	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \\ \bullet - \text{C} - \text{C} \\ \quad \\ \text{H}_2 \quad \text{O} \end{array}$
Глутамінова Кислота	від'ємний	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \\ \bullet - \text{C} - \text{C} - \text{C} \\ \quad \quad \\ \text{H}_2 \quad \text{H}_2 \quad \text{O} \end{array}$

Таблиця 5.7. Полярні амінокислотні залишки

Амінокислотний залишок	Структурна формула
Гліцин	• (α - вуглецевий атом C_α)
Серин	$\begin{array}{c} \bullet - \text{C} - \text{OH} \\ \\ \text{H}_2 \end{array}$
Цистеїн	$\begin{array}{c} \bullet - \text{C} - \text{SH} \\ \\ \text{H}_2 \end{array}$
Треонін	$\begin{array}{c} \bullet - \text{C} - \text{OH} \\ \\ \text{CH}_3 \end{array}$
Аспаргин	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \\ \bullet - \text{C} - \text{C} \\ \quad \\ \text{H}_2 \quad \text{NH}_2 \end{array}$
Глутамін	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \\ \bullet - \text{C} - \text{C} - \text{C} \\ \quad \quad \\ \text{H}_2 \quad \text{H}_2 \quad \text{NH}_2 \end{array}$
Тирозин	$\begin{array}{c} \bullet - \text{C} - \text{C}_6\text{H}_4 - \text{CH}_3 \\ \\ \text{H}_2 \end{array}$

Видатним досягненням молекулярної біології, яка розвинулася в потужну науку в другій половині ХХ століття і, безумовно, визначиться як передова наука в ХХІ столітті, є відкриття та розшифровка генетичної ролі дезоксирибонуклеїнової (ДНК) і рибонуклеїнової (РНК) кислот. Ця роль, коротко кажучи, зводиться до таких процесів:

1) транскрипція – процес, внаслідок якого інформація, що записана в ДНК, переписується в РНК і передається до рибосомів;

2) трансляція – процес синтезу білків відповідно до інформації, що записана в матричній РНК;

3) білково-нуклеїнове розпізнавання – процес, внаслідок якого вільні амінокислоти приєднуються за допомогою транспортної РНК, яка їх впізнає, до поліпептидного білкового ланцюга.

Таблиця 5.8. Неполарні амінокислотні залишки

Амінокислотний залишок	Структурна формула
Аланін	$\bullet - \text{CH}_3$
Валін	$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ \\ \bullet - \text{C} = \text{H}_2 \\ \\ \text{CH}_3 \end{array}$
Ізолейцин	$\begin{array}{c} \text{H} \\ \\ \bullet - \text{C} - \text{C} - \text{CH}_3 \\ \quad \\ \text{CH}_3 \quad \text{H}_2 \end{array}$
Лейцин	$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ \\ \bullet - \text{C} - \text{C} - \text{CH}_3 \\ \quad \\ \text{H}_2 \quad \text{H}_2 \end{array}$
Метіонін	$\begin{array}{c} \bullet - \text{C} - \text{C} - \text{S} - \text{CH}_3 \\ \quad \\ \text{H}_2 \quad \text{H}_2 \end{array}$

Пролін	$\begin{array}{c} \bullet - \text{C} = \text{H}_2 \\ \quad \\ \text{N} \quad \text{CH}_2 \\ \diagdown \quad / \\ \text{C} = \text{H}_2 \end{array}$
Триптофан	$\begin{array}{c} \bullet - \text{C} - \text{C} - \text{C}_6\text{H}_5 \\ \quad \\ \text{H}_2 \quad \text{HC} \quad \text{H} \\ \quad \quad \quad \\ \quad \quad \quad \text{N} \end{array}$
Фенілаланін	$\begin{array}{c} \bullet - \text{C} - \text{C}_6\text{H}_5 \\ \\ \text{H}_2 \end{array}$

5.2.2. Вторинна структура

Завдяки використанню прецизійного фізичного методу рентгеноструктурного аналізу вчені відкрили *вторинну структуру* макромолекул, яка полягає в тому, що поряд з лінійними ділянками в біополімерах були знайдені також ділянки, певним чином скручені в спіраль або в якусь іншу конформацію. Це явище локального впорядкування біополімерних ланцюгів було відкрито як для білків (Астбюрі, Полінг, Корі та інші; саме Полінг отримав Нобелівську премію за відкриття цієї тонкої структури білків), так і для нуклеїнових кислот (вже згадане вище відкриття спіральної структури ДНК Франкліном, Криком, Уотсоном і Уїлкінзом).

На рис. 5.8 зображена модель α -спіралі поліпептидного ланцюга білкової молекули, що закручена направо за стрілкою годинника. Основна причина утворення вторинної структури – це наявність водневих зв'язків між амінокислотними залишками. Виявилося, що на кожний крок спіралі приходить 3,6 амінокислотних залишки, а через п'ять кроків спіралі (ця ділянка містить відповідно 18 амінокислот) конфігурація поліпептидного ланцюга повторюється. Просторовий період повторення α -спіралі

складає $5 \times 0,54 \text{ нм} = 2,7 \text{ нм}$. Напрямок водневих зв'язків в α -спіралі виявився паралельним до вісі спіралі. Стабілізація спіральної конформації відбувається завдяки водневим зв'язкам між групами $\text{C}=\text{O}$ і $\text{H}-\text{N}$ кожної першої і четвертої пептидної одиниці.

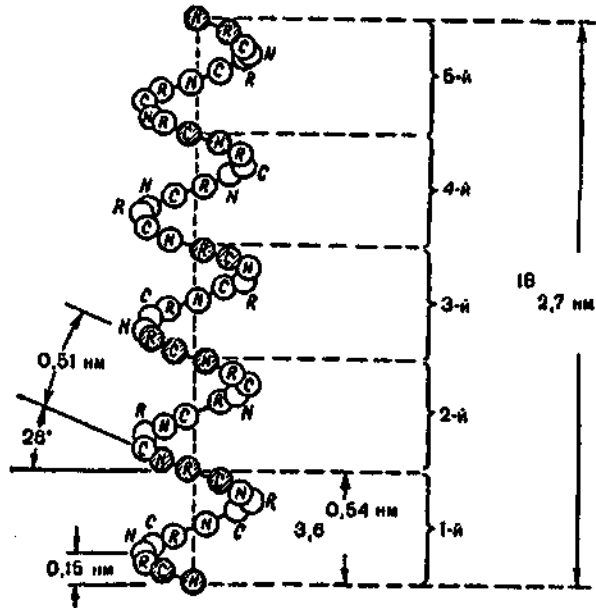


Рис. 5.8. Модель α -спіралі білкової молекули

Полінг і Корі встановили, що окрім α -спіралі в білках існують ще інші стійкі конформації поліпептидного ланцюга (наприклад, паралельна і антипаралельна β -форми тощо). Всі ці стійкі конформації поліпептидного ланцюга, що визначають вторинну структуру білків, зобов'язані своїм існуванням і стабільністю, як і у випадку α -спіралі, водневим зв'язкам.

Вторинна структура нуклеїнових кислот (зокрема, ДНК) пов'язана, як вже згадувалося, з наявністю подвійної спіралі, яка складається з двох полінуклеотидних ланцюгів. У цих взаємно перевитих спіральних ланцюгах пуринові азотисті основи одного ланцюга з'єднані водневими зв'язками з відповідними

піримідиновими азотистими основами другого ланцюга. З'єднання азотистих основ відбувається за таким *правилом Чаргаффа*: незважаючи на те, що кількість азотистих основ А, Г, Т, Ц може змінюватися досить в широких межах від виду до виду, але завжди кількість пуринових основ в точності дорівнює кількості піримідинових основ. Точніше кажучи, аденін і гуанін в одному ланцюгу пов'язані у строгой відповідності з тиміном і цитозином в другому ланцюгу, утворюючи так звані "уотсон-кріківські пари" АТ і ГЦ (рис. 5.9).

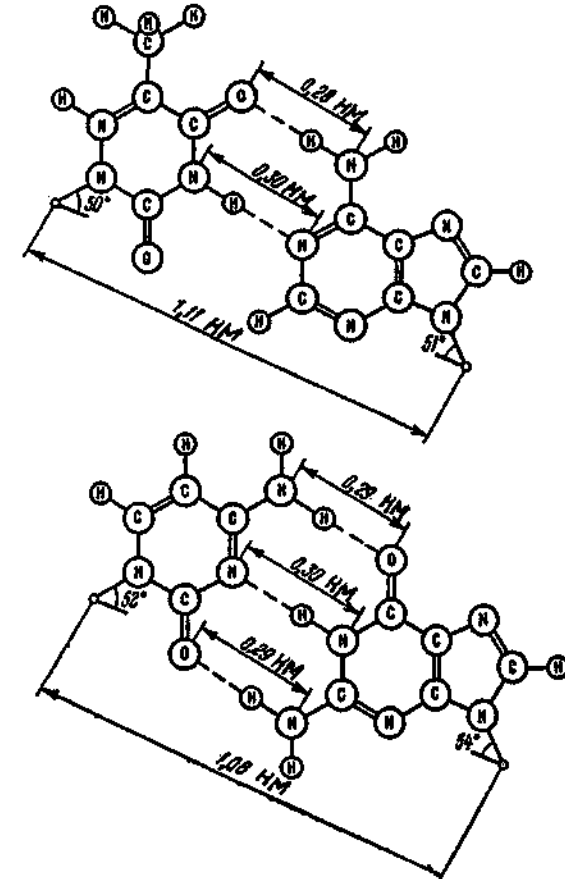


Рис. 5.9. "Уотсон-кріківські пари" в подвійній спіралі ДНК

Слід зазначити, що в парах азотистих основ АТ і особливо в парах ГЦ значна роль належить диполь-дипольним (Ван-дер-Ваальсівським) взаємодіям. Ці взаємодії стають дуже помітними, коли подвійна спіраль розділяється з утворенням двох окремих ланцюгів. При цьому водневі зв'язки між азотистими основами замінюються на зв'язки з молекулами води.

Температура плавлення ДНК T_m може бути апроксимована такою формулою:

$$T_m = T_{ГЦ} x + T_{АТ} (1 - x),$$

де $T_{ГЦ} \approx 110^\circ\text{C}$ і $T_{АТ} \approx 69^\circ\text{C}$ – температура плавлення відповідно до пар ГЦ і АТ, а x – концентрація (мольна частка) пар ГЦ в ДНК.

Окремі (розділені) поліпептидні ланцюги скручуються в клубки. Цей процес називають фазовим переходом спіраль-клубок, або денатурацією. Він відбувається не лише при нагріванні, а й при додаванні кислот, спиртів та деяких інших хімічних сполук.

5.2.3. Третинна структура

Під *третинною структурою* білків і нуклеїнових кислот, звичайно, розуміють спосіб просторової укладки поліпептидних і полінуклеотидних ланцюгів в 3-вимірному об'ємі. Відповідь на запитання, як організована третинна структура біополімерів, вимагає застосування прецизійних експериментальних методів дослідження (зокрема, методів рентгеноструктурного аналізу, електронної мікроскопії тощо) та сучасних комп'ютерних технологій обробки цих експериментальних даних.

Уперше третинна структура білкової молекули була визначена Дж. Кедрю для міоглобіна кита-кашалота. Цей білок, що містить в собі 153 амінокислотних залишків, відповідає за перенос кисню в м'язах. Виявилось, що третинна структура поліпептидного ланцюга міоглобіну має вигляд скрученої трубки, що досить щільно укладена навколо гема (рис. 5.10).

Що стосується нуклеїнових кислот, то зараз досить багато відомо щодо третинної структури певних типів ДНК та РНК. На рис. 5.11 зображено просторове впорядкування ДНК в еукаріотичних клітинах. Видно, що основний елемент третинної

структури утворений своєрідним "соленоїдом", який складається з трьох великих витків, що мають діаметр близько 30 нм.

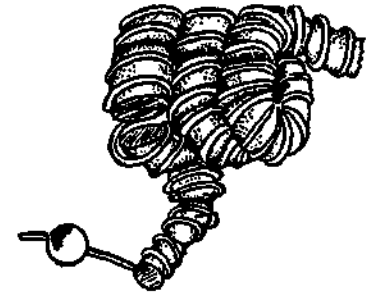
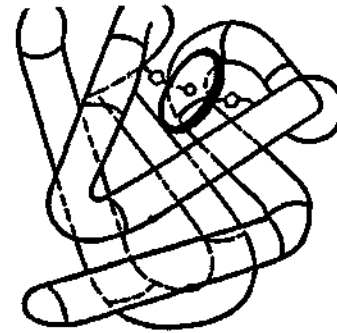


Рис. 5.10. Третинна структура білкової молекули міоглобіну

Рис. 5.11. Третинна структура ДНК в еукаріотичних клітинах

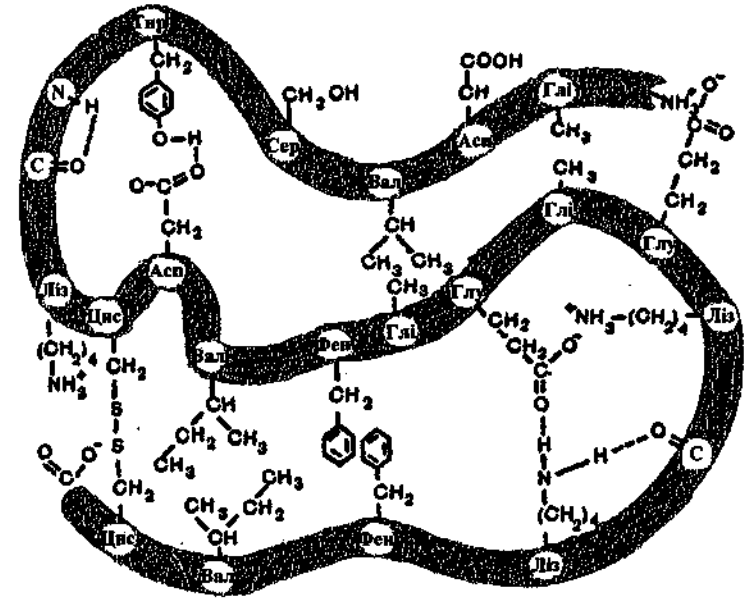


Рис. 5.12. Вплив взаємодій на просторове впорядкування білків

Характер взаємодій, що забезпечують просторове впорядкування білків, ілюструє рис. 5.12. Стабілізація третинної просторової структури здійснюється як за рахунок ковалентних зв'язків та кулонівських (іон-іонних) взаємодій, так і за рахунок нековалентних зв'язків (водневих, дисперсійних, гідрофобних).

5.2.4. Четвертинна структура

Окремі поліпептидні ланцюги, що входять до складу білкової молекули та характеризуються певними первинною, вторинною і третинною структурами, можуть мати досить слабкі (нековалентні) зв'язки між собою.

Такі субодиниці (або протомери) можуть об'єднатися між собою з утворенням молекули, яку називають мультимером. Просторове впорядкування протомерів в мультимер називається *четвертинною структурою*. Звичайно при утворенні четвертинної структури відбувається асоціація (об'єднання) парної кількості протомерів (2 або 4, рідше 6, 8, 10, 12 тощо).

Класичним прикладом білкової молекули, якій притаманна четвертинна структура, є молекула гемоглобіна, що складається з чотирьох субодиниць (функціонально активних частин білкового мультимера). Як зазначалося вище, об'єднання цих субодиниць в четвертинну структуру, досягається завдяки гідрофобним взаємодіям.

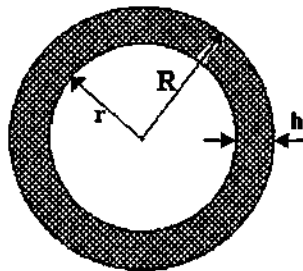


Рис. 5.13. Сферична білкова макромолекула

У кінці цього параграфа розглянемо досить просту і водночас дуже корисну модель Фішера–Бреслера–Талмуда, яка дає змогу передбачити форму білкової макромолекули залежно від відношення гідрофільних і гідрофобних груп, що входять до її складу.

Спочатку знайдемо те співвідношення, виконання якого гарантує сферичну глобулярну структуру білкової макромолекули. Нехай радіус сферичної глобули – R , радіус внутрішнього гідрофобного ядра – r , товщина гідрофільного шару – h (рис.

5.13). Обчислимо відношення об'ємів гідрофільної та гідрофобної частин в такій сферичній глобулі

$$b_{сф} = \frac{V_{гідрофільн}}{V_{гідрофобн}} = \frac{4\pi^2 h}{4\pi^3 / 3} = \frac{3h}{r} = \frac{3h}{R-h}, \quad (5.9)$$

де враховані очевидні рівності для площі поверхні гідрофобного ядра $S = 4\pi r^2$, для об'єму гідрофільного шару завтовшки h на цьому ядрі $V_{гідрофільн} = 4\pi r^2 h$, для об'єму самого сферичного гідрофільного ядра $V_{гідрофобн} = 4\pi r^3 / 3$, а також для радіуса всієї сферичної глобули $R = r + h$.

Звідси випливає, що для забезпечення сферичної форми білкової макромолекули повинно виконуватися таке співвідношення для параметра $b_{сф}$, що характеризує відношення об'ємів гідрофільної та гідрофобної частин:

$$b_{сф} = \frac{3ah}{V^{1/3} - ah}, \quad (5.10)$$

де $V = 4\pi R^3 / 3$ – загальний об'єм сферичної макромолекули, а коефіцієнт $a = (4\pi / 3)^{1/3} = 1,612$.

Таким чином, на кривій залежності параметра $b_{сф}$ від $V^{1/3}$, яка відповідає формулі (5.10), розташовуються білкові макромолекули, що мають сферичну форму (рис. 5.14). Якщо параметр $b = V_{гідрофільн} / V_{гідрофобн}$ набуває більшого значення, ніж те, що визначається формулою (5.10), тобто $b > b_{сф}$, (область над графіком $b_{сф} = f(V^{1/3})$ на рис. 5.14), то білкова макромолекула набуває не сферичної, а еліпсоїдальної (фібрилярної) форми. Причина появи фібрилярної структури полягає в тому, що із зростанням кількості гідрофільних амінокислотних залишків вони прагнуть завдяки диполь-дипольним взаємодіям покрити більшу площу, аніж площа сферичної поверхні, яка є мінімальною за величиною при фіксованому об'ємі.

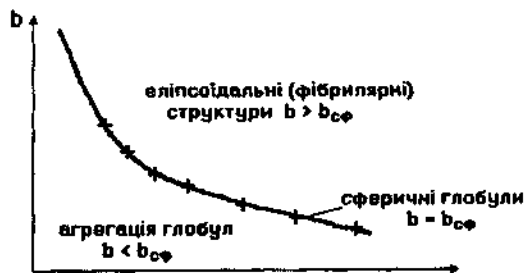


Рис. 5.14. Можливі форми білкових макромолекул в моделі Фішера–Бреслера–Талмуда

У тому ж випадку, коли $b < b_{сф}$ (область під кривою залежності $b_{сф}$ від $V^{1/3}$, див. рис. 5.14), кількості гідрофільних груп не вистачає навіть для покриття поверхні сферичної глобули. На сферичній поверхні залишаються гідрофобні області, які повинні “заховатися” від полярного оточення. Тому стає детермінованим процес (ймовірність якого прямує до одиниці) об’єднання глобул з утворенням четвертинної структури. Типовим проявом подібного механізму утворення четвертинної структури є молекула гемоглобіну, що складається, як вже зазначалося, з чотирьох глобул, саме завдяки гідрофобним взаємодіям.

5.3. БУДОВА І ВЛАСТИВОСТІ БІОЛОГІЧНИХ МЕМБРАН

Біологічні мембрани – тонкі напівпроникні оболонки, що відокремлюють клітину від зовнішнього середовища і функціональні одиниці клітини одну від одної. На рис. 5.15 схематично зображена структура клітини та її функціональних одиниць: ГлЕР – гладенький та ГрЕР – гранульований ендоплазматичні ретикулуми, ЕПС – ендоплазматична сітка, Ліз – лізосома, Ліп – ліпосома, М – мітохондрія, Мв – мікроворсинки, Мт – мікротрубочки, ПМ – плазматична мембрана, Риб – рибосоми, СГ – система Гольджі, Хр – хромосоми, Ц – центріоль, Я – ядро, я – ядречко, ЯО – ядерна оболонка.

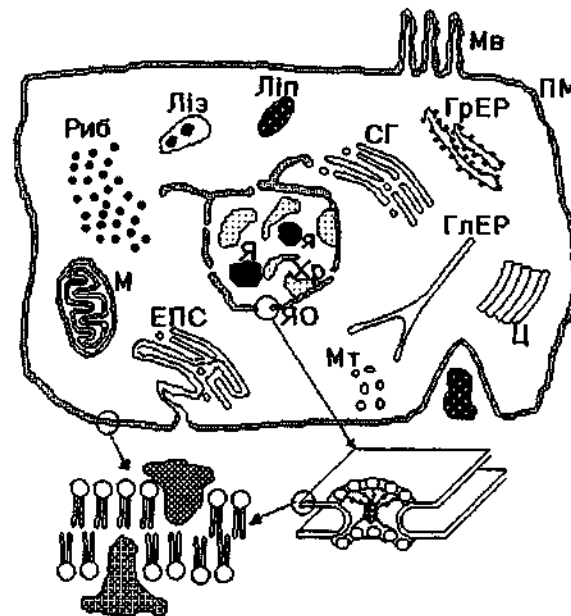


Рис. 5.15. Схематична структура клітини та її функціональних одиниць, відокремлених біологічними мембранами

Вивчення структури і функцій біологічних мембран – сучасна область біофізики, яка має надзвичайно важливе значення для теоретичної і клінічної медицини. Порушення структури і бар’єрної функції мембран призводить до багатьох патологій, ракового переродження тканин, тканинної гіпоксії, пошкоджень, що виникають при інтоксикаціях, під впливом іонізуючої радіації тощо. Відомо, що дія багатьох лікарських препаратів спрямована на зміну властивостей та функцій саме біологічних мембран і залежить від здатності цих препаратів проникати крізь біомембрани або зв’язуватись з ними.

Головним будівельним матеріалом біомембран виступають **амфіфільні (амфипатичні) молекули фосфоліпідів** – сполук з гідрофобним хвостом і гідрофільною голівкою. До складу полярної голівки, що становить приблизно одну чверть всієї довжини молекули, входять гліцерин, фосфорна кислота і полярне сполучення, характерне для кожного класу фосфоліпідів

(холін, серин та інші). Гідрофобний хвіст, що становить три чверті довжини молекули фосфоліпиду, складається із залишків жирних кислот, одна з яких насичена, а інша ненасичена, з подвійними вуглецевими зв'язками (рис. 5.16).

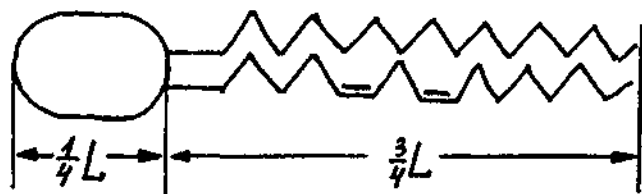


Рис. 5.16. Схематичне зображення молекули фосфоліпиду

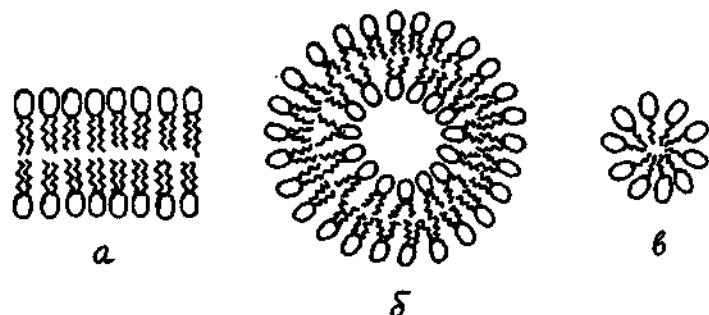


Рис. 5.17. Самозбірка фосфоліпідів у водному розчині: а – ліпідний бішар; б – везикула (ліпосома); в – міцела

Молекули ліпідів здатні самодовільно об'єднуватись, утворюючи у воді протяжні бішарові структури (рис. 5.17, а), котрі намагаються замкнутися самі на собі, ховаючи гідрофобні ділянки від води. У результаті утворюються везикули (ліпосоми) (рис. 5.17, б). Процес цей називають самозбіркою. Таким чином, утворення ліпідних бішарів і везикул – процес самодовільний, пов'язаний з фізико-хімічними особливостями фосфоліпідів і електростатичною дією водного оточення.

Фосфоліпідний бішар виконує функцію матриці для білків, гліколіпідів, глікопротеїдів, відіграючи водночас роль бар'єра для іонів та молекул водорозчинних речовин.

Внаслідок перекисного окислення одного з жирнокислотних ланцюгів або його відщеплення під дією ферменту фосфоліпази,

може утворюватись фосфоліпід з розміром голівки, що перевищує розмір гідрофобної частини. Такі дефектні молекули утворюють не бішар, а міцелярні структури (рис. 5.17, в). Опинившись у складі мембран, такі молекули утворюють пору, внутрішню поверхню якої формують полярні голівки (рис. 5.18). Крізь таку гідрофільну пору легко проходять молекули води та іони, внаслідок чого порушуються бар'єрні властивості мембрани.

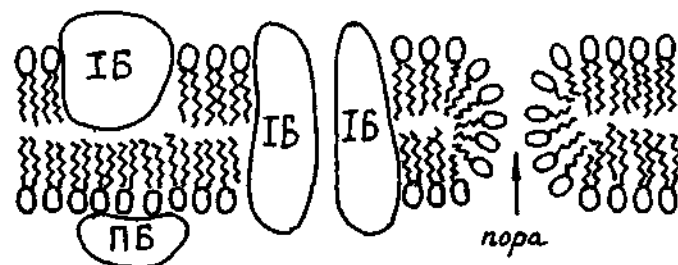


Рис. 5.18. Загальна схема будови біологічної мембрани (ПБ – периферичні білки, ІБ – інтегральні білки)

Білки мембран можуть знаходитись на поверхні ліпідного шару (периферичні білки, ПБ), утримуючись переважно електростатичними силами або вбудовуватись до ліпідного бішару, іноді пронизуючи його наскрізь (інтегральні білки, ІБ) (див. рис. 5.18). Інтегральні білки, опинившись поряд, можуть утворювати білковий канал (БК).

Основу сучасних уявлень про будову мембрани складає рідкокристалічна концепція, створена у 1972 році С. Сингером та Дж. Нікольсенем і вдосконалена у 1981 році С. Сингером.

Рідкі кристали – це особливий стан деяких речовин, переважно органічних, якому притаманна плинність (як рідині), але молекули при цьому зберігають впорядкованість у розташуванні, що спонукає до анізотропії ряду фізичних властивостей (як у кристалів). Згідно з цим уявленням, бішар – це рідка структура, в якій молекули ліпідів здатні здійснювати сегментальну рухливість, обертальні рухи і латеральну дифузію, що являє собою послідовний обмін місцями у межах одного шару (рис. 5.19).

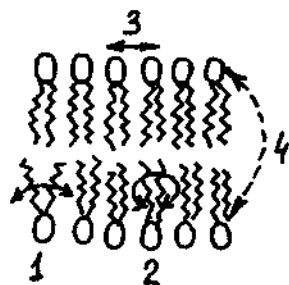


Рис. 5.19. Різні види рухомості ліпідів в бішарі: 1 – сегментальна рухливість; 2 – обертальна рухливість; 3 – латеральна рухливість; 4 – перехід “flip-flop”

Оцінимо частоти перескоків ν і характерні відстані таких перескоків при латеральній дифузії. Час перескоку оцінюється за формулою $\tau = S/D$, де S – площа, яку займає одна фосфоліпідна молекула ($S \approx 1 \text{ нм}^2$), D – коефіцієнт латеральної дифузії ($D \approx 6 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}$). Згідно з цією формулою, $\tau \approx 10^{-18}/6 \cdot 10^{-12} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ с}$, а частота перескоків $\nu = 1/\tau \approx 6 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$. Середню відстань при перескоці оцінимо за формулою $X \approx 2\sqrt{D\tau} \approx 2 \cdot 10^{-9} \text{ м}$. Тоді за рахунок латеральної дифузії молекула ліпиду пройде за час $t = 1 \text{ с}$ відстань $S = 2\sqrt{D\tau} \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ мкм}$, тобто досить велику відстань. Такий розмір має бактерія типу *E.coli*.

Із значно меншою швидкістю молекули здатні здійснювати перехід на інший бік бішару (перехід “flip-flop”, див. рис. 5.19). Цей перехід відбувається зі швидкістю одна молекула за декілька годин. Білки в ліпідному бішарі також досить рухливі. Період обертального руху білка в бішарі становить $\tau \leq 1 \text{ мкс}$. Щодо латеральної рухливості білка, то вона визначається не тільки його властивостями, але й мікров’язкістю ліпідного оточення, тобто фазовим станом ліпідного бішару.

Фізичні методи досліджень свідчать про те, що ліпідний бішар може перебувати у двох фазових станах: 1) у стані твердого двомірного кристалу; 2) у рідкокристалічному стані. При фазовому переході змінюється рухливість полярних груп, а також обертальна рухливість С-С зв’язків вуглеводневих ланцюгів (рис. 5.20).

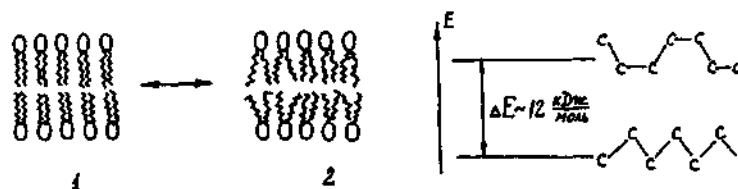


Рис. 5.20. Фазовий перехід у мембрані: 1 – “твердий” стан, 2 – рідкий стан

Якщо мембрана знаходиться у твердій фазі, то в ній існують ліпідні молекули лише у стані трансконформерів (рис. 5.21). У рідкій фазі з’являються транс-гош-переходи. Після плавлення бішар становить динамічну суміш транс- та гош-конформерів. Гош-конформери, розташовані поряд, утворюють порожнини в бішарі чи так звані “кінки”. Синхронні транс-гош переходи можуть бути представлені як рух “кінків” вздовж вуглеводневих ланцюгів. Разом з цим рухом крізь мембрану можуть проникати молекули гідрофільних речовин, унікаючи пори та канали (рис. 5.22).

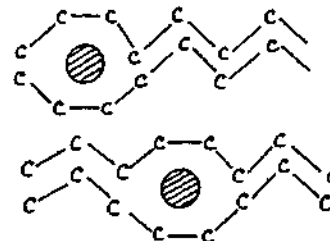


Рис. 5.22. Перенос молекули внаслідок дифузії “кінка”

Не слід думати, що вся поверхня мембрани клітин має одні і ті самі властивості. І за ліпідним складом, і за включенням білків мембрани є гетерогенними. Це також означає, що у мембранах спостерігаються ділянки з різною рухливістю (як рідкі, так і більш структуровані фази). Розділ фаз може відбуватись під впливом багатьох факторів (зокрема, внаслідок зміни рН, появи іонів Ca^{2+} тощо).

Кооперативна реакція типу фазового переходу – важлива властивість ліпідів, бо саме на ній базуються механізми відбирання іонів із середовища, посилення зовнішнього сигналу, мембранної пам’яті клітини. Доцільно навести деякі фізичні характеристики біологічних мембран:

товщина $\approx 6-12$ нм; поверхнева ємність $\approx 0,4-1,0$ мкФ/см²; напруга в спокої ≈ 75 мВ; напруга пробією $\approx 150-200$ мВ; напруженість електричного поля $\approx 10^6-10^7$ В/м; поверневий натяг $\approx 10^{-5}-10^{-3}$ Н/м; в'язкість $\approx 10^{-1}-10^{-2}$ Па·с; оптичний показник заломлення $\approx 1,6$.

5.4. ПАСИВНИЙ ТА АКТИВНИЙ ТРАНСПОРТ РЕЧОВИН КРИЗЬ МЕМБРАННІ СТРУКТУРИ КЛІТИН

У нормально функціонуючих клітинах присутні сотні різних молекул та іонів у концентраціях, значно менших або значно більших, ніж у навколишньому середовищі. Так, наприклад, концентрація іонів калію у клітині людини у десятки разів перевищує їх концентрацію в крові. Для іонів натрію співвідношення таких концентрацій обернене. Таким чином, існує певна вибірковість у розподілі цих іонів між клітиною і міжклітинним середовищем. Однією з основних функцій біологічних мембран є забезпечення вибіркової (селективної) проникності для речовин, що транспортуються у процесі життєдіяльності із клітини у середовище та з середовища у клітину.

Розрізняють пасивний і активний перенос (транспорт) молекул та іонів крізь мембрани.

Пасивний транспорт не потребує затрат хімічної енергії. Він здійснюється за допомогою дифузії, що зумовлена різницею концентрацій у разі незаряджених молекул і різницею електростатичних потенціалів для іонів. Дифузія – це самодовільний процес проникнення молекул речовини з області з більшою концентрацією в область з меншою її концентрацією.

Деякі молекули (іони) примусово накачуються в клітини або викачуються з клітин у напрямі збільшення концентрації (електростатичного потенціалу). Таке переміщення молекул (іонів) називають **активним транспортом**. Активний транспорт здійснюється під час витрати хімічної енергії, що виділяється при витраті АТФ чи переносі електронів по дихальному ланцюгу мітохондрій.

Розглянемо механізми і основні закономірності пасивного транспорту крізь біологічні мембрани.

5.4.1. Пасивний транспорт незаряджених молекул

Математичний опис процесу дифузії було дано Фіком. Згідно з рівнянням Фіка потік Φ дифундуючої речовини визначається таким виразом:

$$\Phi = -Ddc/dx. \quad (5.11)$$

Вираз (5.11) – це закон Фіка для вільної дифузії, де $\Phi = 1/S \cdot dN/dt$ – кількість частинок речовини (молекул), що перетинають одиничну площину за одиницю часу; D – коефіцієнт дифузії; dc/dx – градієнт концентрації дифундуючої речовини. Для газів і розбавлених розчинів коефіцієнт дифузії може бути визначений за формулою $D = \bar{V} \cdot \bar{\lambda}/3$, де \bar{V} – середня швидкість руху молекул; $\bar{\lambda}$ – середня довжина вільного пробігу молекул. Знак “-” вказує на те, що потік речовини Φ напрямлений в бік зменшення її концентрації, тобто в бік, протилежний напрямку градієнта концентрації (рис. 5.23).

Розглянемо пасивний транспорт незаряджених молекул крізь мембрану. Розподіл концентрацій молекул дифундуючої речовини при переході через мембрану показано на рис. 5.24, де використані такі позначення: c_e, c_i – концентрації дифундуючих частинок у водному середовищі зовні і в клітині; c_{me} і c_{mi} – концентрації частинок у самій мембрані біля зовнішньої і внутрішньої її поверхонь.

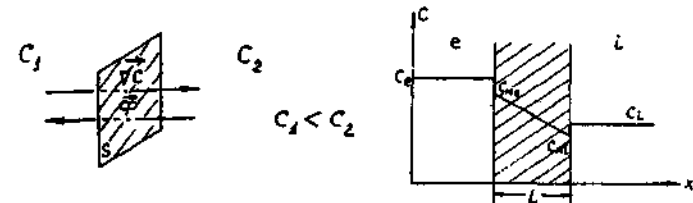


Рис. 5.23. Співвідношення напрямків градієнта концентрації та потоку дифундуючої речовини

Рис. 5.24. Розподіл концентрації при пасивному транспорті незаряджених молекул через мембрану

З наведеного рис. 5.24 видно, що концентрація зовні клітини c_e перевищує концентрацію у клітині c_i , а в самій мембрані змінюється за лінійним законом, тобто градієнт концентрації $dc/dx = \text{const}$ і становить:

$$dc/dx = -(c_{me} - c_{mi})/L, \quad (5.12)$$

де L – товщина мембрани. Це є, звичайно, припущенням.

Концентрація частинок на поверхнях мембрани зазнає стрибок внаслідок різної розчинності речовини у водній фазі і пристінному шарі всередині мембрани. Звичайно існує пропорційний зв'язок:

$$c_{me}/c_e = c_{mi}/c_i = K, \quad (5.13)$$

де K – коефіцієнт розподілу речовини між мембраною та водною фазою.

Рівняння (5.11) з урахуванням (5.12) і (5.13) набуває вигляду

$$\Phi = -D \frac{dc}{dx} = D \frac{c_{me} - c_{mi}}{L} = \frac{D \cdot K}{L} (c_e - c_i) = P(c_e - c_i), \quad (5.14)$$

де $P = D \cdot K/L$ – коефіцієнт проникності мембрани. Таким чином, рівняння $\Phi = P(c_e - c_i)$ описує пасивний транспорт незаряджених молекул крізь мембрану.

Під час руху речовини крізь мембрану, частинки змушені долати не лише гідрофобний шар ліпідів, а й нерухомі шари води, що прилягають до мембрани (примембранні шари). Нехай

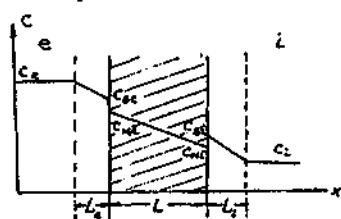


Рис. 5.25. Розподіл концентрації при пасивному транспорті речовини через мембрану при наявності нерухомих примембранних шарів води

речовина рухається всередину клітини з водного розчину з концентрацією c_e до водного розчину з концентрацією c_i . При цьому частинки повинні долати три дифузійні бар'єри: зовнішній примембранний шар води, саму мембрану і внутрішній примембранний шар води (рис. 5.25).

Потоки через кожний з перелічених шарів

$$\begin{aligned} \Phi_e &= P_e(c_e - c_{ee}); \\ \Phi_m &= P_m(c_{ee} - c_{ei}); \\ \Phi_i &= P_i(c_{ei} - c_i), \end{aligned} \quad (5.15)$$

де P_e, P_m, P_i – коефіцієнти проникності відповідних бар'єрів.

Поділимо рівняння (5.15) для потоків Φ_e, Φ_m, Φ_i на відповідні коефіцієнти проникності і додамо праві і ліві частини, що дає

$$\frac{\Phi_e}{P_e} + \frac{\Phi_m}{P_m} + \frac{\Phi_i}{P_i} = c_e - c_i. \quad (5.16)$$

У стаціонарному стані не відбувається накопичення речовини, тобто $c \neq f(t)$, а тому всі потоки рівні між собою:

$$\Phi_e = \Phi_m = \Phi_i = \Phi.$$

З іншого боку, для всієї системи в цілому

$$\Phi = P(c_e - c_i), \quad (5.17)$$

де P – коефіцієнт проникності всієї системи. З рівняння (5.17) маємо

$$c_e - c_i = \frac{\Phi}{P}. \quad (5.18)$$

Тоді з рівнянь (5.16) і (5.18) випливає, що

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{P_e} + \frac{1}{P_m} + \frac{1}{P_i}.$$

Величина $1/P$ – опір потоку речовини, що дорівнює сумі опорів складових шарів.

Опір примембранних шарів пропорційний до товщини цих шарів, оскільки

$$\frac{1}{P_e} + \frac{1}{P_i} = \frac{L_e}{D_e K} + \frac{L_i}{D_i K} = \frac{L_e + L_i}{D_i K},$$

де $K = 1$ для водних шарів; D_i – коефіцієнт дифузії речовини у воді.

Таким чином, проникність мембрани залежить від руху протоплазми у міжклітинному середовищі і всередині клітини, який спричиняє перемішування рідини і зменшення товщини

примембранних нерухомих шарів. Пригнічування процесів життєдіяльності клітин призводить до збільшення опору і, як наслідок, до гальмування процесів пасивного переносу речовин крізь мембранні системи.

5.4.2. ПАСИВНИЙ ТРАНСПОРТ ІОНІВ

У відсутності градієнта концентрації перенос заряджених частинок (іонів) може відбуватися при наявності електричного поля, тобто градієнта електричного потенціалу ($E = -d\varphi/dx$).

Густина електричного струму іонів за законом Ома

$$j = \gamma E = -\gamma \frac{d\varphi}{dx}, \quad (5.19)$$

де γ – коефіцієнт електропровідності середовища. Як відомо, густина електричного струму

$$j = qcv, \quad (5.20)$$

де c – кількість носіїв заряду (іонів) в одиниці об'єму середовища; v – швидкість, з якою рухаються носії (іони) під впливом електричного поля; q – заряд носія (іона).

Оскільки $v = bE = -bd\varphi/dx$, де b – рухливість іона, а $q = ez$, де z – валентність іона, то вираз для густини струму набуває такого вигляду:

$$j = -ezcb \frac{d\varphi}{dx}. \quad (5.21)$$

Згідно з визначенням густини струму

$$j = \frac{I}{S}, \quad (5.22)$$

де

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (5.23)$$

Заряд dQ , що проходить через площину S за час dt , задовольняє такому співвідношенню:

$$dQ = q dN, \quad (5.24)$$

де dN – кількість іонів, що перетинають площину S за час dt . Об'єднавши вирази (5.22), (5.23) і (5.24), одержимо

$$j = \frac{qdN}{Sdt}. \quad (5.25)$$

Згідно з визначенням потоку речовини, маємо

$$\Phi = \frac{dN}{Sdt}. \quad (5.26)$$

Порівнюючи (5.25) і (5.26), одержимо такий вираз для потоку іонів, зумовленого градієнтом електричного потенціалу:

$$\Phi_{\nabla\varphi} = \frac{j}{q} = \frac{j}{ez} = -cb \frac{d\varphi}{dx}. \quad (5.27)$$

Рухливість іона пов'язана з коефіцієнтом дифузії співвідношенням Ейнштейна

$$b = \frac{DFz}{RT},$$

де F – число Фарадея; T – абсолютна температура; R – газова стала. Тоді рівняння (5.27) набуває вигляду

$$\Phi_{\nabla\varphi} = -cD \frac{F \cdot z}{R \cdot T} \frac{d\varphi}{dx}.$$

При наявності як градієнта концентрації іонів, так і градієнта потенціалу електричного поля, потік іонів

$$\Phi = \Phi_{\nabla c} + \Phi_{\nabla\varphi} = -D \frac{dc}{dx} - cb \frac{d\varphi}{dx} = -D \frac{dc}{dx} - cD \frac{F \cdot z}{R \cdot T} \frac{d\varphi}{dx}. \quad (5.28)$$

Рівняння (5.28) відоме як *електродифузійне рівняння Нернста–Планка*, що описує пасивний транспорт заряджених частинок (іонів).

Виконавши деякі елементарні перетворення, рівняння Нернста–Планка можна записати таким чином:

$$\Phi = -D \frac{dc}{dx} - cD \frac{F \cdot z}{R \cdot T} \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{cD}{R \cdot T} \left(\frac{R \cdot T}{c} \cdot \frac{dc}{dx} + F \cdot z \frac{d\varphi}{dx} \right) = -\frac{cD}{R \cdot T} \cdot \frac{d}{dx} (RT \ln c + Fz\varphi + \mu_0) \quad (5.29)$$

Тут враховано ту обставину, що $(1/c)dc/dx = (d \ln c)/dx$. Крім того, під знак похідної (градієнта) внесено постійну величину – хімічний потенціал розчинника μ_0 , який є однаковим по обидва боки мембрани і тому не залежить від координати, по якій виконується диференціювання. Величина, яка стоїть у дужках, тобто

$$\bar{\mu} = \mu_0 + RT \ln c + zF\varphi,$$

називається електрохімічним потенціалом $\bar{\mu}$ (див. розділ 6.1). Його фізичний зміст полягає в тому, що він визначає вільну енергію Гібса з розрахунку на один моль у присутності розчиненої речовини і електричного поля. Другий доданок $RT \ln c$ визначає внесок розчиненої речовини (осмотичний внесок) в електрохімічний потенціал, у той час як останній доданок $ZF\varphi$ характеризує внесок електричного поля. Враховуючи означення електрохімічного потенціалу, рівняння (5.29) можна подати у такому вигляді:

$$\Phi = -\frac{cD}{RT} \frac{d\bar{\mu}}{dx} \quad (5.30)$$

Рівняння (5.30) відоме як *рівняння Теорелла*. Згідно з ним рушійною силою пасивного транспорту іонів виступає градієнт електрохімічного потенціалу, у той час як рушійною силою пасивного транспорту незаряджених молекул є градієнт концентрації.

Процес простої (або звичайної) дифузії відбувається повільно і слабо контролюється клітиною. За таким механізмом здійснюється транспорт кисню, вуглекислого газу та шкідливих для клітини речовин (наприклад, ядів). При звичайній дифузії молекула дифундує крізь мембрану без утворення комплексів з іншими молекулами.

Для більш швидкого переносу речовин, необхідних для життєдіяльності клітин, в ході еволюції виробились інші типи пасивної дифузії: перенос через канали (пори) і перенос за допомогою переносників. Ці типи дифузії відомі під назвою *полегшеної дифузії* (рис. 5.26).

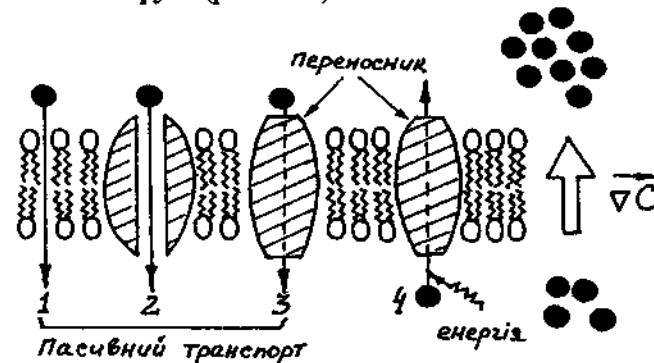


Рис. 5.26. Види пасивного і активного транспорту через мембрану: 1 – проста дифузія через мембрану; 2 – дифузія через канали; 3 – дифузія за допомогою переносників; 4 – активний транспорт

Розглянемо більш детально пасивний транспорт речовин крізь канали. Канали – це білкові утворення, що мають діаметр 6–10 Å (1 Å (ангстрем) = 10^{-10} м). Згідно з деякими даними білкові канали покривають ~0,1% поверхні мембрани. Слід підкреслити, що канали – не статичні, а динамічні утворення. Один з механізмів їх утворення – процес латеральної дифузії. Коефіцієнт проникності мембрани при пасивному транспорті через канали

$$P = \frac{\pi r^2 n D}{L},$$

де n – кількість каналів на одиницю площі мембрани; r – радіус каналу; L – довжина каналу (товщина мембрани); D – коефіцієнт дифузії речовини у воді. Згідно з гіпотезою Мулінза найкраще проходять крізь канали ті іони, радіус яких в оточенні одного шару молекул води близький до радіуса каналу.

Швидкість пасивного транспорту крізь мембрану збільшується на кілька порядків у присутності переносників – молекул, що володіють дуже високим рівнем селективності. Наприклад, переносник, який полегшує транспорт глюкози крізь

мембрану, ніяк не впливає на транспорт амінокислот. Найбільш детально полегшений транспорт крізь біологічні мембрани було вивчено на прикладі переносу іонів іонофорними антибіотиками типу валіноміцину. Було встановлено, що валіноміцин вибірково збільшує проникність мембран для іонів K^+ . Шість карбонільних груп валіноміцину формують порожнину, в яку потрапляє іон K^+ . У вільній молекулі валіноміцину атоми складноєфірних карбонільних груп спрямовані до зовнішньої поверхні молекули. При утворенні комплексу з іонами K^+ у молекулі виникають додаткові іон-дипольні взаємодії з атомами кисню карбонільних груп. Молекула набуває форми браслета діаметром близько 8 Å, у центрі якого розташовується іон K^+ . На рис. 5.27 показано конформаційну зміну молекули валіноміцину при створенні комплексу з іоном K^+ . Іони Na^+ надто великі для порожнини у молекулі валіноміцину, внаслідок чого відношення проникностей для іонів K^+ і Na^+ становить: $P_K/P_{Na} = 10^4$. Таким чином, основою селективності при переносі іонів за допомогою переносників, так само, як і при переносі через канали, є принцип структурної відповідності.

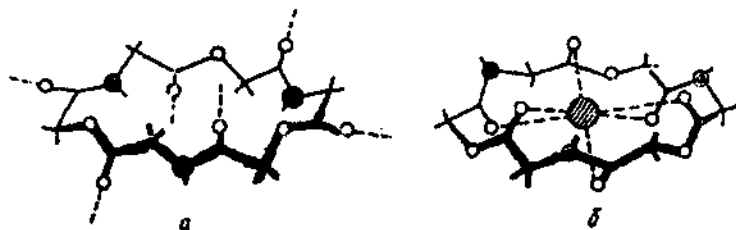


Рис. 5.27. Просторова структура переносника іонів K^+ :
а – валіноміцину; б – його комплексу з іоном

Транспорт за допомогою переносників може відбуватись внаслідок дифузії переносника разом з речовиною (рухомий переносник) (рис. 5.28, а), а також і шляхом естафетної передачі від однієї молекули переносника до іншої (рис. 5.28, б).

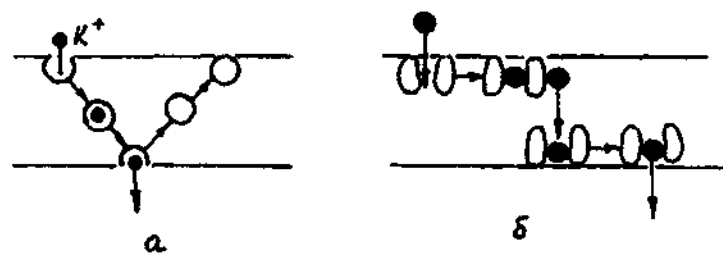


Рис. 5.28. Транспорт іонів за участю переносників: а – рухомий переносник; б – естафетний перенос

Для пасивного транспорту за допомогою переносників характерний ефект концентраційного насичення швидкості переносу: зі збільшенням концентрації швидкість переносу сповільнюється, тому що всі переносники виявляються пов'язаними з певною частиною іонів.

5.4.3. Активний транспорт

Поряд з пасивним транспортом у життєдіяльності клітини важливу роль відіграє **активний транспорт** – примусовий перенос молекул та іонів з області малих концентрацій до області високих концентрацій. Завдяки активному транспорту підтримуються концентраційні градієнти, які необхідні для нормального функціонування клітини. Транспортні системи, які створюють необхідні концентраційні градієнти, називають **насосами**, або **АТФазами**. Відомі чотири основні системи активного транспорту:

1. Na^+ - K^+ -насос. 2. Ca^{2+} -насос. 3. H^+ -насос. 4. Перенос протонів під час роботи дихального ланцюга мітохондрій.

Активний транспорт, як і пасивний, забезпечується спеціальними структурами: каналами, переносниками, ферментами. При активному транспорті (на відміну від пасивного) вектор переміщення іонів співпадає за напрямком з вектором концентраційного градієнта, тобто з напрямком збільшення концентрації. Активний транспорт відбувається за рахунок енергії, що виділяється при гідролізі АТФ (комплексу $Mg-ATP^{2-}$) з утворенням молекул АДФ і неорганічного фосфату (Φ_n). Гідроліз

АТФ здійснюється ферментом АТФазою. Джерелом молекул АТФ є процеси окислювального фосфорилування, що відбуваються в мітохондріях.

Розглянемо основні етапи роботи найбільш дослідженого $\text{Na}^+\text{-K}^+$ -насоса (рис. 5.29). Як відомо, в нормально функціонуючій клітині концентрація іонів K^+ перевищує їх концентрацію в міжклітинному середовищі, а для іонів Na^+ це співвідношення обернене. Наприклад, у нервовому волокні кальмара:

$$[\text{K}^+]_e = 0,010 \text{ моль/л}, [\text{K}^+]_i = 0,340 \text{ моль/л};$$

$$[\text{Na}^+]_e = 0,463 \text{ моль/л}, [\text{Na}^+]_i = 0,049 \text{ моль/л},$$

тобто $[\text{K}^+]_i > [\text{K}^+]_e$, $[\text{Na}^+]_i < [\text{Na}^+]_e$.

$\text{Na}^+\text{-K}^+$ -АТФаза локалізована у зовнішніх плазматичних мембранах клітин. Через те, що $\text{Na}^+\text{-K}^+$ -АТФаза є гідрофобним білком, вона створює комплекси з ліпідами бішару. Саме тому активність інтегрального білка $\text{Na}^+\text{-K}^+$ -АТФази залежить від фізико-хімічного стану мембрани. Встановлено, що для функціонування Ca^{2+} -АТФази важливо, щоб ліпідне оточення було рідким, на відміну від $\text{Na}^+\text{-K}^+$ -АТФази, для якої важлива впорядкованість бішару.

Перенос двох іонів K^+ всередину клітини і трьох іонів Na^+ зовні спричиняє перенос одного позитивного заряду із цитоплазми в навколишнє середовище. Внаслідок цього всередині клітини виникає негативний електричний потенціал. Тому $\text{Na}^+\text{-K}^+$ -насос називають *електрогенним*. Таким чином, при активному транспорті потік іонів Na^+ (Φ_{Na}) співпадає з напрямками градієнта концентрації Na^+ і градієнта електричного потенціалу $\vec{\nabla}\varphi$, а потік іонів K^+ (Φ_{K}) – напрямлений по градієнту концентрації K^+ , але проти $\vec{\nabla}\varphi$ (рис. 5.30).

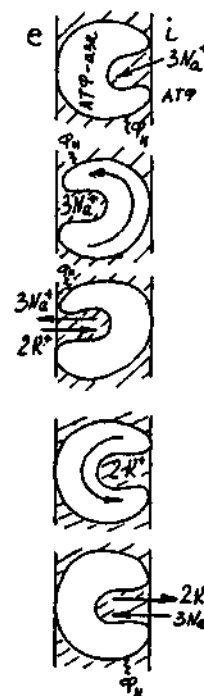


Рис. 5.29. Основні етапи роботи $\text{Na}^+\text{-K}^+$ -насоса.

На першому етапі відбувається приєднання до АТФ-ази трьох іонів Na^+ і фосфорилування ферменту.

На другому етапі – перенос центрів зв'язування Na^+ зовні (транслокація I).

На третьому етапі – відокремлення трьох іонів Na^+ і заміна їх двома іонами K^+ .

На четвертому етапі – відщеплення залишки фосфорної кислоти.

На п'ятому етапі – перенос центрів зв'язування K^+ всередину клітини (транслокація II).

На шостому етапі – відщеплення двох іонів K^+ і приєднання трьох іонів Na^+ та фосфорилування ферменту (тобто повторюється етап I)

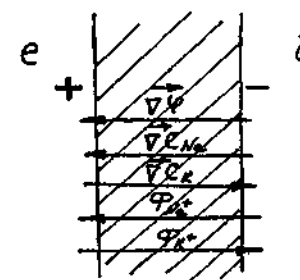


Рис. 5.30. Співвідношення напрямків потоків іонів Na^+ та K^+ та відповідних градієнтів концентрацій, а також градієнти електричного потенціалу при активному транспорті

5.5. БІОЛОГІЧНІ ПОТЕНЦІАЛИ

Генерація і поширення електричних потенціалів – найважливіше явище в живих клітинах і тканинах, яке лежить в основі збудження клітин, регуляції внутрішньоклітинних процесів, м'язового скорочення, роботи нервової системи. Порушення електричних характеристик окремих клітин, нервових волокон, тканин призводить до захворювання.

Різниця потенціалів між водними фазами по обидва боки мембрани (або мембранний потенціал) виникає внаслідок процесів переносу, тобто процесів пасивного і активного транспорту.

Потенціал спокою – різниця потенціалів між цитоплазмою і навколишнім середовищем у нормально функціонуючій незбудженій клітині, що зумовлена відміною у концентраціях іонів по обидва боки мембрани.

Потенціал дії – різниця потенціалів, що виникає при збудженні клітини і зумовлена зміною проникності мембрани для іонів.

Загальна картина розподілу потенціалів на межах мембрани з водними фазами (внутрішньоклітинній і поза клітинній) подана на рис. 5.31. З цього рисунка випливає існування чотирьох характерних різниць потенціалів:

φ_{s1} – міжфазний стрибок

потенціалу на зовнішній границі мембрани;

φ_{s2} – міжфазний стрибок потенціалу на внутрішній границі мембрани;

$\Delta\varphi$ – різниця потенціалів на границях мембрани;

$\varphi_m = (\varphi_e - \varphi_i)$ – мембранний потенціал або різниця потенціалів між водними фазами по обидва боки мембрани.

При цьому $\varphi_m + \varphi_{s1} = \Delta\varphi + \varphi_{s2}$.

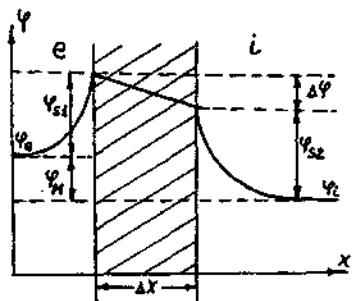


Рис. 5.31. Зміна електричного потенціалу при наближенні до мембрани і в самій мембрані

Для симетричної мембрани $\varphi_{s1} = \varphi_{s2}$, тоді $\varphi_m = \Delta\varphi$, тобто $\varphi_e - \varphi_i = \Delta\varphi$.

Міжфазні стрибки потенціалу (φ_{s1} , φ_{s2}) зумовлені поверхневим зарядом, що його створюють "голівки" фосфоліпідів, та здатністю мембрани пов'язувати іони з навколишньої водної фази. Спадає потенціал за таким законом:

$$\varphi = \varphi_0 e^{-x/\delta},$$

де δ – радіус Дебая, що дорівнює тій відстані від границі мембрани, на якій потенціал зменшується в e разів. Радіус Дебая залежить від концентрації іонів у водній фазі і складає приблизно 0,8 нм, тобто 10 % від товщини мембрани.

Мембрана за своїми електричними властивостями подібна до конденсатора. Потенціал змінюється всередині мембрани приблизно за лінійним законом, тобто напруженість поля ϵ майже сталою величиною:

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = -\frac{\varphi_m}{\Delta x} = \text{const.}$$

Походження мембранних потенціалів можна пояснити, виходячи з особливостей розподілу і дифузії іонів з урахуванням їх проникності крізь мембрану.

5.5.1. Рівноважний мембранний потенціал Нерста

Розглянемо мембрану, проникну для певних іонів (скажімо, іонів K^+). Як впливає з формули (5.30), рушійною силою пасивного транспорту іонів крізь мембрану є градієнт електрхімічного потенціалу. Дифузія крізь мембрану певних іонів буде продовжуватись доти, доки величина $d\bar{\mu}/dx$ обернеться в нуль, тобто електрхімічні потенціали по обидва боки мембрани стануть рівними між собою:

$$\bar{\mu}_i = \bar{\mu}_e. \quad (5.31)$$

При цьому на мембрані виникає різниця електричних потенціалів, яка перешкоджатиме подальшому рухові іонів. Встановиться рівновага, струм іонів крізь мембрану припиниться ($j = 0$).

З умови (5.31) знайдемо такий вираз для рівноважної різниці потенціалів:

$$\mu_{0i} + RT \ln c_i + zF\varphi_i = \mu_{0e} + RT \ln c_e + zF\varphi_e. \quad (5.32)$$

Оскільки хімічний потенціал розчинника залишається незмінним ($\mu_{0i} = \mu_{0e}$), то з рівняння (5.32) отримаємо шукану формулу:

$$\varphi_m = \varphi_e - \varphi_i = \frac{RT}{Fz} \ln \frac{c_i}{c_e}. \quad (5.33)$$

Це і є *рівноважний потенціал Нернста*. Зауважимо, що при рівності концентрацій ($c_i = c_e$) цей потенціал стає рівним нулеві, саме тому рівноважний мембранний потенціал ще називають концентраційним потенціалом Нернста.

Оцінимо його величину для аксона кальмара: $[K^+]_i = 392 \text{ мМоль}$, $[K^+]_e = 22,4 \text{ мМоль}$, $T = 293 \text{ К}$ ($t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$), тоді з врахуванням чисельних значень констант $R = 8,3 \text{ Дж/моль}\cdot\text{К}$ і $F = 96500 \text{ Кл/моль}$ маємо $\varphi_e - \varphi_i \approx 73 \text{ мВ}$.

Якщо зовнішній потенціал на біомембрані φ_e прийняти рівним 0, скориставшись довільністю у виборі точки відліку потенціалу, то всередині клітини потенціал Нернста, пов'язаний з розподілом іонів K^+ , набуває такого значення:

$$\varphi_i \approx -73 \text{ мВ}.$$

Таким чином, до виникнення рівноважного потенціалу Нернста спричиняє відмінність у концентраціях іонів всередині і зовні клітини. Так, для живих клітин концентрація іонів K^+ всередині перебільшує їх концентрацію зовні клітини в десятки разів.

Іноді користуються безрозмірним рівноважним потенціалом Нернста

$$\psi = \frac{Fz}{RT} (\varphi_e - \varphi_i) = \ln \frac{c_i}{c_e}, \quad (5.34)$$

звідки

$$\frac{c_i}{c_e} = \exp \psi. \quad (5.35)$$

У 1902 році Дж. Бернштейн висунув гіпотезу, згідно з якою потенціал спокою зумовлений проникністю цитоплазматичної мембрани лише для іонів K^+ , внаслідок чого виникає потенціал, що описується таким рівнянням Нернста:

$$\varphi_m = \frac{RT}{F} \ln \frac{[K^+]_i}{[K^+]_e}. \quad (5.36)$$



Рис. 5.32. Залежність потенціалу спокою гігантського аксону кальмара від концентрації іонів K^+ в позаклітинному середовищі (--- — рівняння Нернста, ... — експериментальні дані, 'x'x' — рівняння Гольдмана)

На рис. 5.32 подані графіки $\varphi_m = f[K^+]_e$, побудовані за експериментальними даними, а також розраховані за рівнянням (5.36) (див. рис. 5.32). Розходження між розрахованими за рівнянням Нернста і експериментальними даними при малих значеннях $[K^+]_e$ свідчать про недосконалість калієвої теорії потенціалу спокою.

5.5.2. Дифузійний потенціал

У тих випадках, коли спостерігається неоднорідність концентрацій для двох типів іонів при однакових градієнтах концентрації, обидва типи іонів почнуть перемішуватись проти концентраційного градієнта. Нехай рухливість аніона перевищує рухливість катіона ($b^- > b^+$). У цьому випадку негативні іони будуть випереджати позитивні, внаслідок чого виникне електричне поле, яке буде прискорювати позитивні іони і гальмувати негативні доти, доки швидкості позитивних і негативних іонів стануть рівними. При цьому на мембрані виникне різниця потенціалів, що зумовлена різною рухливістю

іонів, – дифузійний потенціал. Одержимо вираз для цього потенціалу.

Згідно з визначенням формулу для потоку речовини можна подати у такому вигляді:

$$\Phi = \frac{1}{S} \frac{dN}{dt} = \frac{1}{S} c(Sdx) = c \frac{dx}{dt} = cv, \quad (5.37)$$

де c – концентрація іонів; v – швидкість їх руху.

Порівнюючи вираз (5.37) з рівнянням Нернста–Планка (5.28), одержимо рівняння для швидкості руху іонів

$$v = \frac{\Phi}{c} = -D \frac{1}{c} \frac{dc}{dx} - b \frac{d\varphi}{dx} = -D \frac{d \ln c}{dx} - b \frac{d\varphi}{dx}. \quad (5.38)$$

Для позитивних іонів

$$v^+ = -D^+ \frac{d \ln c}{dx} - b^+ \frac{d\varphi}{dx}. \quad (5.39)$$

Для негативних іонів

$$v^- = -D^- \frac{d \ln c}{dx} + b^- \frac{d\varphi}{dx}. \quad (5.40)$$

Нехай швидкості руху негативних і позитивних іонів зрівнялися, тобто $v^+ = v^-$. У результаті маємо

$$-D^+ \frac{d \ln c}{dx} - b^+ \frac{d\varphi}{dx} = -D^- \frac{d \ln c}{dx} + b^- \frac{d\varphi}{dx} \quad (5.41)$$

або

$$d\varphi = \frac{D^- - D^+}{b^+ + b^-} d \ln c. \quad (5.42)$$

Проінтегруємо рівняння (5.42) по всій товщі мембрани, що дає

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_e} d\varphi = \frac{D^- - D^+}{b^+ + b^-} \int_{c_1}^{c_e} d \ln c,$$

звідки

$$\varphi_e - \varphi_1 = \frac{D^- - D^+}{b^+ + b^-} \ln \frac{c_e}{c_1} = \frac{D^- - D^+}{b^+ + b^-} \ln \frac{c_i}{c_e}.$$

Враховуючи співвідношення Ейнштейна між коефіцієнтами дифузії та рухливості $D^+ = b^+ RT/Fz$, $D^- = b^- RT/Fz$, остаточно маємо

$$\varphi_e - \varphi_1 = \frac{RT}{Fz} \frac{(b^+ - b^-)}{(b^+ + b^-)} \ln \frac{c_i}{c_e}. \quad (5.43)$$

Таким чином, дифузійний мембранний потенціал зумовлений різними значеннями рухливості ($b^+ \neq b^-$) та концентрації ($c_i \neq c_e$) для дифундуючих крізь мембрану іонів.

Виконаємо чисельну оцінку дифузійного потенціалу, що спричинений різними рухливостями іонів Na^+ і Cl^- . Як відомо, концентрація іонів як Na^+ , так і Cl^- зовні клітини перевищує їх концентрацію всередині приблизно на порядок. Рухливість цих іонів, знайдена в експерименті, становить

$$b_{\text{Na}^+} = 5,2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с} \cdot \text{В};$$

$$b_{\text{Cl}^-} = 7,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с} \cdot \text{В},$$

тобто

$$b_{\text{Cl}^-} > b_{\text{Na}^+}.$$

При дифузії цих іонів всередину клітини на мембрані виникне потенціал, що при співвідношенні концентрацій $c_i/c_e = 10$ має таку величину:

$$(\varphi_e - \varphi_1)_{\text{диф}} \approx 12,8 \text{ мВ}.$$

Таким чином, дифузійний потенціал у 5–6 разів менший за концентраційний потенціал Нернста, а саме: $\varphi_{\text{диф}} = -(13 + 15) \text{ мВ}$.

У відсутності одного з іонів формула (5.43) для дифузійного потенціалу перетворюється в формулу (5.33) для рівноважного потенціалу Нернста. Крім того, при рівності рухливостей (так само, як і при рівності концентрацій) дифузійний потенціал стає рівним нулеві.

5.5.3. Потенціал Доннана. Доннанівська рівновага

Розглянемо потенціал спокою, який характеризує електричні властивості клітин з послабленим метаболізмом.

Якщо всередині і зовні клітини знаходяться іони протилежних знаків, то умова рівноваги між водними фазами по обидва боки мембрани зводиться до умови електронейтральності середовищ, що означає:

1) повний заряд по обидва боки мембрани дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^n q_k^i = 0, \quad \sum_{k=1}^n q_k^e = 0;$$

2) відсутня різниця потенціалів

$$\sum_{k=1}^n (\varphi_e - \varphi_i)_k = 0.$$

Розглянемо випадок, коли всередині і зовні клітини ми маємо іони двох типів, що несуть протилежні заряди, скажімо іони K^+ та Cl^- . Умова електронейтральності для цього випадку матиме вигляд

$$(\varphi_e - \varphi_i)_{K^+} + (\varphi_e - \varphi_i)_{Cl^-} = 0, \quad (5.44)$$

звідки

$$(\varphi_e - \varphi_i)_{K^+} = -(\varphi_e - \varphi_i)_{Cl^-}. \quad (5.45)$$

Рівноважні потенціали Нернста для цих іонів

$$(\varphi_e - \varphi_i)_{K^+} = \frac{RT}{Fz} \ln \frac{[K^+]_i}{[K^+]_e}, \quad (5.46)$$

$$(\varphi_e - \varphi_i)_{Cl^-} = \frac{RT}{Fz} \ln \frac{[Cl^-]_i}{[Cl^-]_e}. \quad (5.47)$$

З рівнянь (5.45)–(5.47) випливає

$$\ln \frac{[K^+]_i}{[K^+]_e} = \ln \frac{[Cl^-]_e}{[Cl^-]_i}$$

або

$$\frac{[K^+]_i}{[K^+]_e} = \frac{[Cl^-]_e}{[Cl^-]_i} = r. \quad (5.48)$$

Коефіцієнт r називають відношенням Доннана. З рівняння (5.48) маємо

$$[K^+]_i \cdot [Cl^-]_i = [K^+]_e \cdot [Cl^-]_e. \quad (5.49)$$

Рівняння (5.49) називають умовою доннанівської рівноваги.

Так, робота Na^+K^+ -насоса утворює нерівномірний розподіл іонів K^+ , внаслідок чого виникає мембранний концентраційний потенціал $(\varphi_e - \varphi_i)_{K^+}$, який, в свою чергу, потребує забезпечення доннанівської рівноваги для Cl^- .

Тепер врахуємо, що у внутрішньоклітинному середовищі присутні в певних концентраціях аніони білкового походження $[P^-]$, для яких мембрана майже непроникна. Заряджені макромолекули, що знаходяться всередині клітини, суттєво впливають на перерозподіл іонів між клітиною і позаклітинним середовищем.

Умови електронейтральності у внутрішньоклітинному і позаклітинному середовищах відповідно матимуть вигляд

$$[K^+]_i = [Cl^-]_i + n[P^-]_i; \quad (5.50)$$

$$[K^+]_e = [Cl^-]_e = c_0, \quad (5.51)$$

де n – кількість зарядів на кожній білковій молекулі.

Використовуючи безрозмірний потенціал Нернста (5.35), відношення Доннана (5.48) можна подати у вигляді

$$\frac{[K^+]_i}{[K^+]_e} = \frac{[Cl^-]_e}{[Cl^-]_i} = e^{\psi} = r. \quad (5.52)$$

Поєднуючи рівняння (5.51) та (5.52), маємо

$$\begin{aligned}
 [K^+]_i &= [K^+]_e e^{\psi} = c_0 e^{\psi}; \\
 [Cl^-]_i &= [Cl^-]_e e^{-\psi} = c_0 e^{-\psi}.
 \end{aligned}
 \quad (5.53)$$

Враховуючи (5.53), умова електронейтральності у внутрішньоклітинному середовищі (5.50) матиме такий вигляд:

$$c_0 e^{\psi} - c_0 e^{-\psi} = n[P^-]_i \quad (5.54)$$

або

$$e^{\psi} - e^{-\psi} = \frac{n[P^-]_i}{c_0}. \quad (5.55)$$

Розкладаючи функції e^{ψ} та $e^{-\psi}$ в ряди

$$e^{\psi} = 1 + \psi + \dots, \quad e^{-\psi} = 1 - \psi + \dots$$

і обмежуючись першими двома членами цих розкладів, маємо

$$2\psi = \frac{n[P^-]_i}{c_0}$$

або, враховуючи (5.34),

$$(\varphi_e - \varphi_i)_{дон} = \frac{RT}{Fz} \psi = \frac{RT}{Fz} \frac{n[P^-]_i}{2c_0}. \quad (5.56)$$

Таким чином, доннанівський потенціал прямопропорційний концентрації заряджених макромолекул всередині клітини і обернено пропорційний концентрації електроліту в позаклітинному середовищі.

Проведемо чисельну оцінку потенціалу Доннана. Звичайно $[P^-] \approx 300 \text{ мМ/л}$, $n = 1$, $c_0 \approx 4102 \text{ мМ/л}$, тоді $(\varphi_e - \varphi_i)_{дон} \approx 10 \text{ мВ}$, тобто потенціал Доннана майже на порядок менший за концентраційні потенціали спокою, саме тому він і стає помітним лише на мембранах мертвих клітин або клітин з послабленим метаболізмом.

5.5.4. Стаціонарний потенціал Гольдмана–Ходжкіна–Катца

Розбіжності між експериментальними значеннями потенціалу спокою на мембрані і розрахованими за рівнянням Нернста для рівноважного потенціалу (див. рис. 5.32) пов'язані насамперед з тим, що мембрана проникна не лише для іонів K^+ , а й для інших іонів. Наявність сумарного потоку для цих іонів спричинює виникнення мембранної різниці потенціалів, яка починає гальмувати транспорт іонів, внаслідок чого сумарний електричний струм іонів ($j = \sum j_i$), а отже, і сумарний потік іонів ($\Phi = \sum \Phi_i$) припиняється. При цьому на мембрані встановлюється різниця потенціалів, спричинена не умовою рівноваги ($\Phi_i = 0$), а умовою стаціонарності, яка означає, що повний потік, зумовлений потоками всіх іонів, дорівнює нулю ($\Phi = \sum \Phi_i = 0$), при цьому кожний з потоків у загальному випадку відмінний від нуля ($\Phi_i \neq 0$).

Саме цим стаціонарний потенціал відрізняється від рівноважного потенціалу Нернста, умовою виникнення якого є рівність нулеві потоку лише одного певного сорту іонів.

У теорії стаціонарного потенціалу, розвиненої Д. Гольдманом, А. Ходжкіним і Б. Катцем, враховувалися внески в сумарний потік лише одновалентних іонів натрію, калію і хлору.

Розраховуючи мембранний потенціал, що виникає за цих умов, автори виходили з таких положень:

1) здійснюється умова стаціонарності

$$\Phi = \sum \Phi_i = 0;$$

2) у мембрані спостерігається сталість градієнта електричного потенціалу

$$\frac{d\varphi}{dx} = \text{const};$$

3) потік кожного сорту іонів підпорядковується рівнянню Нернста–Планка

$$\Phi_i = -D_i \nabla c_i - c_i b_i \nabla \varphi, \quad (5.57)$$

де i – індекс сорту іонів, $i = Na^+, K^+, Cl^-$.

Інтегрування рівнянь (5.57) з урахуванням умови стаціонарності $\Phi_{Na} + \Phi_K - \Phi_{Cl} = 0$ дає змогу одержати такий вираз для мембранного потенціалу (див. деталі нижче):

$$(\varphi_e - \varphi_i)_{стат} = \frac{RT}{Fz} \ln \frac{P_{Na}[Na^+]_i + P_K[K^+]_i + P_{Cl}[Cl^-]_e}{P_{Na}[Na^+]_e + P_K[K^+]_e + P_{Cl}[Cl^-]_i}, \quad (5.58)$$

де P_{Na} , P_K , P_{Cl} – проникності мембрани для відповідних іонів. Це і є формула для *стаціонарного потенціалу Гольдмана–Ходжкіна–Катца*, яку ще називають *рівнянням Гольдмана*. Це рівняння значно краще узгоджується з експериментальними даними, ніж рівняння Нернста (див. рис. 5.32). Легко переконатись, що рівняння Нернста є частинним випадком рівняння Гольдмана. Дійсно, в спокої у гігантському аксоні кальмара $P_{Na}:P_K:P_{Cl} = 1:0,04:0,045$, тобто $P_K \gg P_{Cl}$, $P_K \gg P_{Na}$. У цьому випадку

$$(\varphi_e - \varphi_i)_{стат} = \frac{RT}{Fz} \ln \frac{[K^+]_i}{[K^+]_e} = (\varphi_e - \varphi_i)_{Нернста} \quad \text{для іонів } K^+.$$

Вираз для стаціонарного мембранного потенціалу можна одержати, використовуючи безрозмірний мембранний потенціал $\psi = zF\varphi/RT$. Для цього дещо перетворимо рівняння Нернста–Планка, використавши умову сталості градієнта потенціала в мембрані

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi}{L} = \frac{RT\psi}{FzL},$$

де L – товщина мембрани, а саме:

$$\Phi = -D \frac{dc}{dx} - Dc \frac{Fz}{RT} \frac{d\varphi}{dx} = -D \left(\frac{dc}{dx} + \frac{c\psi}{L} \right),$$

звідки

$$\frac{\Phi}{D} = -\frac{dc}{dx} - \frac{c\psi}{L}$$

або

$$dx = \frac{dc}{\frac{\Phi}{D} + \frac{c\psi}{L}}. \quad (5.59)$$

Проінтегруємо рівняння (5.59) по всій товщині мембрани

$$\int_0^L dx = \int_{c_{im}}^{c_{em}} \frac{dc}{\frac{\Phi}{D} + \frac{c\psi}{L}}; \quad L = \frac{L}{\psi} \ln \frac{\frac{\Phi}{D} + \frac{c_{im}\psi}{L}}{\frac{\Phi}{D} + \frac{c_{em}\psi}{L}},$$

звідки

$$e^\psi = \frac{\frac{\Phi}{D} + \frac{c_{im}\psi}{L}}{\frac{\Phi}{D} + \frac{c_{em}\psi}{L}},$$

або

$$e^\psi = \frac{(c_{im} - c_{em}e^\psi)\psi \frac{D}{L}}{e^\psi - 1}. \quad (5.60)$$

Оскільки $c_{im} = Kc_i$, $c_{em} = Kc_e$ (див. рис. 5.24), то рівняння (5.60) набуває вигляду

$$\Phi = \frac{(c_i - c_e\psi)\psi DK}{L(e^\psi - 1)},$$

або

$$\Phi = \psi P \frac{c_i - c_e\psi}{e^\psi - 1}, \quad (5.61)$$

де $P = DK/L$ – проникність мембрани.

Одержимо вираз для стаціонарного мембранного потенціалу, що виникає при наявності потоку іонів Na^+ у клітину, потоку іонів K^+ зовні і потоку іонів Cl^- у клітину. Зробимо це поки що без урахування Φ_{Cl^-} . За умови, що загальний потік $\Phi = \sum \phi_i = 0$,

маємо

$$\Phi_{Na^+} = \Phi_{K^+}. \quad (5.62)$$

Використовуючи (5.61), з умови (5.62) отримаємо

$$\psi P_{Na} \frac{[Na^+]_i - [Na^+]_e}{e^\psi - 1} = \psi P_K \frac{[K^+]_i - [K^+]_e}{e^\psi - 1},$$

звідки

$$P_{Na}[Na^+]_i - P_{Na}[Na^+]_e e^\psi = -P_K[K^+]_i + P_K[K^+]_e e^\psi$$

або

$$e^\psi = \frac{P_{Na}[Na^+]_i + P_K[K^+]_i}{P_{Na}[Na^+]_e + P_K[K^+]_e}. \quad (5.63)$$

З урахуванням того, що $\psi = (zF/RT)(\varphi_e - \varphi_i)$, з (5.63) маємо

$$(\varphi_e - \varphi_i)_{стат} = \frac{RT}{Fz} \ln \frac{P_{Na}[Na^+]_i + P_K[K^+]_i}{P_{Na}[Na^+]_e + P_K[K^+]_e}. \quad (5.64)$$

Враховуючи внесок потоку іонів Cl^- , одержимо з (5.64) вираз (5.58):

$$(\varphi_e - \varphi_i)_{стат} = \frac{RT}{Fz} \ln \frac{P_{Na}[Na^+]_i + P_K[K^+]_i + P_{Cl}[Cl^-]_e}{P_{Na}[Na^+]_e + P_K[K^+]_e + P_{Cl}[Cl^-]_i},$$

тобто шукану формулу для стаціонарного потенціалу.

5.5.5. Потенціал дії. Механізм виникнення та поширення нервового імпульсу

Розглянуті потенціали спокою свідчать про те, що цитоплазма незбудженої клітини має негативний електричний потенціал по відношенню до позаклітинного середовища ($\varphi_i < 0$). Збудження клітини може спричинити вивикнення потенціалу дії (або спайку), при цьому спостерігається спонтанне обернення знака мембранного потенціалу.

Для виникнення потенціалу дії (ПД), необхідно викликати локальний зсув потенціалу φ_i , на внутрішній поверхні мембрани до значення, яке перевищувало б значення, що називається пороговим (тобто $\varphi_i > \varphi_{пор}$). Таку зміну потенціалу φ_i можна

викликати штучно, пропускаючи крізь мембрану короточасний збуджуючий струм (стимул). Якщо зсув негативного потенціалу на внутрішньому боці мембрани не перевищує $\varphi_{пор}$, то після вимкнення стимулу потенціал φ_i повільно повертається до первісного значення (рис. 5.33, а, б).

Якщо ж зсув φ_i перевищив $\varphi_{пор}$, то виникне подальше спонтанне зростання φ_i і після припинення стимулу. При цьому значення φ_i досягає нуля і продовжує швидко мінятися у додатному напрямку (рис. 5.33, в). Таким чином, виникає обернення знака φ_i (деполяризація мембрани). Потенціал φ_i досягає максимального значення $(+40+50)$ мВ, після чого протягом приблизно мілісекунди, повертається до вихідного значення (-70) мВ. В аксоні кальмара весь спайк триває близько 6 мс.

Виникнення потенціалу дії спричинене різким збільшенням проникності мембрани для іонів Na^+ , що виникає за умови зростання потенціалу φ_i вище $\varphi_{пор}$. Іони Na^+ , входячи всередину клітини, призводять до ще більшого зростання потенціалу φ_i на внутрішньому боці мембрани, що викликає, в свою чергу, подальше зростання проникності мембрани для іонів Na^+ і, як наслідок, – зростання швидкості їх проникнення всередину клітини.

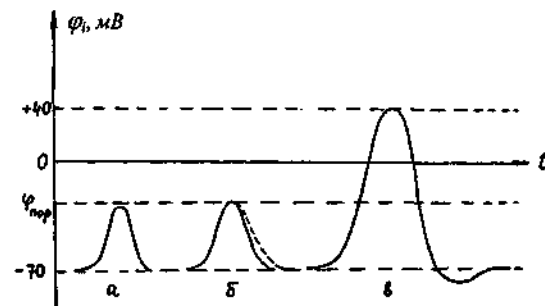


Рис. 5.33. Збудження мембрани за допомогою короточасного збуджуючого струму (стимулу): а – підпороговий імпульс; б – пороговий імпульс (згасаючий спайк); в – потенціал дії (ПД)

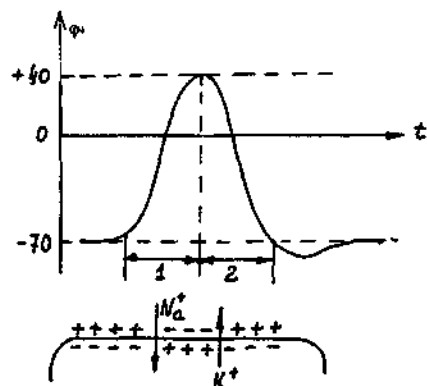


Рис. 5.34. Ілюстрація механізму формування потенціалу дії: 1 – деполяризація; 2 – реполяризація

Зростання потенціалу на внутрішньому боці мембрани викличе, з деяким запізненням, повільне збільшення проникності мембрани для іонів K^+ , внаслідок пасивної дифузії вони почнуть виходити назовні. При цьому спостерігається повернення мембранного потенціалу φ_i від максимального до вихідного значення (від $+40$ до -70 мВ). Це процес так званої реполяризації (рис. 5.34).

Іони Na^+ , що увійшли у клітину під час зростання ПД, можуть вийти зовні тільки внаслідок роботи Na^+-K^+ -насоса.

Після ПД спостерігається період незбудження або абсолютний рефракторний період, під час якого не може виникнути наступний ПД. Він триває від 0,5 до 2 мс. За цей час внаслідок роботи Na^+-K^+ -насоса відбувається відновлення вихідних значень концентрацій іонів Na^+ і K^+ .

Таким чином, формування ПД спричинене двома іонними потоками крізь мембрану: потік іонів Na^+ всередину клітини викликає перезарядку мембрани, а протилежно спрямований потік K^+ – відновлення вихідного значення потенціалу спокою. Потоки зсунуті у часі, завдяки чому можлива поява ПД (рис. 5.35).

Потенціал дії, що виник на певній ділянці нервової клітини, швидко розповсюджується вздовж її поверхні завдяки локальним струмам між збудженими і незбудженими ділянками нервового волокна (рис. 5.36). Локальні струми чинять подразнюючу дію на сусідні незбуджені ділянки і викликають зміну проникності мембрани. Локальні струми деполяризують мембрану до певного рівня, а ПД на кожній ділянці виникає внаслідок іонних потоків

Na^+ та K^+ , спрямованих перпендикулярно напрямку поширення збудження.

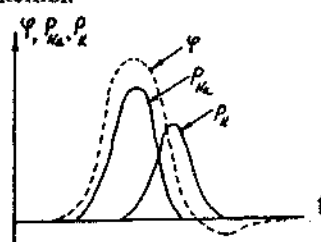


Рис. 5.35. Вплив зміни проникностей натрієвих та калієвих каналів на формування потенціалу дії

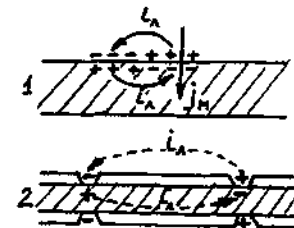


Рис. 5.36. Ілюстрація теорії локальних струмів: 1 – немієлізоване волокно; 2 – мієлізоване

Теорію генерації і поширення потенціалу дії запропонували у 1948–1952 рр. А. Ходжкін і А. Хакслі. Згідно з моделлю Ходжкіна і Хакслі зміна іонних провідностей при зсувах мембранних потенціалів спричинена впливом електричного поля на просторовий розподіл у мембрані заряджених активуючих частинок.

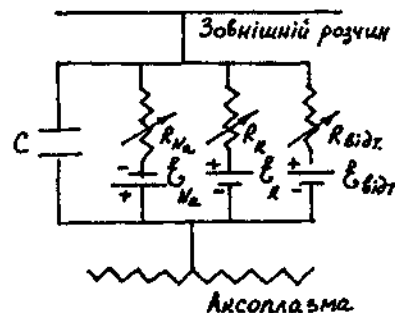


Рис. 5.37. Еквівалентна електрична схема ділянки мембрани

На рис. 5.37 подано еквівалентну схему елемента збудливої мембрани нервового волокна. Вона становить електричне коло з чотирма паралельними вітками. Одна з них містить електричну ємність, а інші відтворюють натрієву (g_{Na}), калієву (g_K) провідності мембрани і так звану провідність відтоку ($g_{сiоdт}$). У кожну з цих віток включені джерела електрору-

шійної сили (E_{Na} , E_K , $E_{сiоdт}$), які дорівнюють відповідним рівноважним потенціалам Нернста:

$$E_{Na} = \Delta\varphi_{Na}^{рiсн}, \quad E_K = \Delta\varphi_K^{рiсн}, \quad E_{сiоdт} = \Delta\varphi_{сiоdт}^{рiсн} \approx \Delta\varphi_{Cl}^{рiсн}.$$

Вираз для електричного струму крізь мембрану можна подати у такому вигляді:

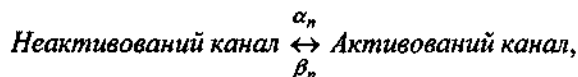
$$j_n = C \frac{d\Delta\varphi}{dt} + j_i, \quad (5.65)$$

де $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_i$. Перший доданок у рівнянні (5.65) – це ємнісний струм, пов'язаний зі зміною різниці потенціалів на мембрані, а другий доданок – іонний струм.

Експериментально Ходжкін і Хакслі довели, що іонні струми j_i прямо пропорційні різниці потенціалів на мембрані $\Delta\varphi$ і рівноважному мембранному потенціалу Нернста для відповідного сорту іонів:

$$\begin{aligned} j_{Na} &= g_{Na} (\Delta\varphi - \Delta\varphi_{\text{ріон}}^{\text{Na}}); \\ j_K &= g_K (\Delta\varphi - \Delta\varphi_{\text{ріон}}^K); \\ j_{\text{відм}} &= g_{\text{відм}} (\Delta\varphi - \Delta\varphi_{\text{ріон}}^{\text{відм}}). \end{aligned} \quad (5.66)$$

Останнє рівняння в (5.66) враховує іонні струми всіх інших іонів, а саме: Cl^- , Ca^{2+} тощо. Коефіцієнти g_i в (5.66) характеризують провідності каналів. Провідність каналів може змінюватись внаслідок їх активації. Активація каналу – процес імовірнісний, котрий можна описувати за допомогою рівнянь хімічної кінетики за схемою:



де α_n і β_n – константи швидкостей активації та інактивації відповідно. Нехай C_0 – загальна кількість каналів, а C – кількість активованих каналів, тоді $C_0 - C$ – кількість неактивованих каналів. Швидкість виникнення активованих каналів буде такою:

$$\frac{dC}{dt} = \alpha_n(C_0 - C) - \beta_n C. \quad (5.67)$$

Поділимо рівняння (5.67) на C_0 і позначимо через $C/C_0 = n$ частку активованих каналів. Тоді рівняння (5.67) набуде вигляду

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(1 - n) - \beta_n n \quad (5.68)$$

або

$$\frac{dn}{dt} = -(\alpha_n + \beta_n)n + \alpha_n. \quad (5.69)$$

Розв'язок рівняння (5.69) має такий вигляд:

$$n(t) = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \beta_n} + A e^{-(\alpha_n + \beta_n)t}.$$

Константу A визначимо з такої початкової умови: $n = 0, t = 0$,

$$\text{що дає } A = -\frac{\alpha_n}{(\alpha_n + \beta_n)}.$$

Остаточно маємо

$$n(t) = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \beta_n} (1 - e^{-(\alpha_n + \beta_n)t}). \quad (5.70)$$

Коли $t \rightarrow \infty, n \rightarrow \alpha_n / (\alpha_n + \beta_n) = n_\infty$. У результаті

$$n(t) = n_\infty (1 - e^{-t/\tau_n}), \quad (5.71)$$

де $\tau_n = 1/(\alpha_n + \beta_n)$ – постійна часу встановлення рівноваги в каналі. Графік рівняння (5.71), що описує кінетику активації каналів, наведено на рис. 5.38. Експериментально було встановлено, що для калієвого каналу

$$g_K = g_K n^4, \quad (5.72)$$

де g_K – максимальне значення провідності.

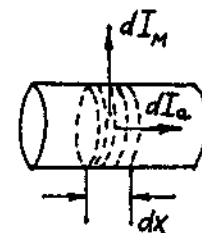
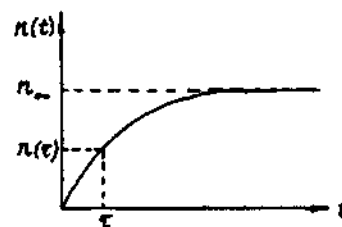


Рис. 5.38. Кінетика активації каналів Рис. 5.39. Електричні струми крізь елемент аксону

Ступінь "4" пов'язаний з тим, що K^+ -канал відчиняється, коли до нього підходять чотири негативні заряди (наприклад, коли канал залишають два іони Ca^{2+}).

Для натрієвого каналу

$$g_{Na} = g_{Na} m^3 h, \quad (5.73)$$

де m – частка активованих, а h – інактивованих каналів. Згідно з (5.73) Na^+ -канал відчиняється, коли до нього потрапляють три активуючі (негативні) і видаляється одна блокуюча (позитивна) частинки.

Рівняння, які описують зміну в часу активованих та інактивованих Na^+ -каналів, мають той самий вигляд (5.68), що й для K^+ -каналів, а саме:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \alpha_m(1-m) - \beta_m m; \\ \frac{dh}{dt} &= \alpha_h(1-h) - \beta_h h. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Таким чином, рівняння для сили струму крізь мембрану (5.65) з урахуванням (5.66), (5.72) та (5.73) набуває такого вигляду:

$$j = C \frac{d\Delta\varphi}{dt} + g_K n^4 (\varphi - \Delta\varphi_K^{pien}) + g_{Na} m^3 h (\varphi - \Delta\varphi_{Na}^{pien}) + g_{eiom} (\varphi - \Delta\varphi_{eiom}^{pien}). \quad (5.75)$$

Знайдемо зв'язок між струмом крізь мембрану і струмом вздовж аксона. Для цього розглянемо елемент поверхні аксона довжиною dx (рис. 5.39). Площа поверхні цього елемента $dS = 2\pi r dx$, де r – радіус аксона. Сила струму крізь мембрану аксона

$$dI_m = j_m dS = j_m 2\pi r dx. \quad (5.76)$$

Збільшення мембранного струму I_m буде призводити до зменшення струму I_a вздовж аксона, тобто

$$dI_m = -dI_a. \quad (5.77)$$

З рівнянь (5.76) та (5.77) випливає, що

$$j_a = -\frac{1}{2\pi r} \frac{dI_a}{dx}. \quad (5.78)$$

Отже, сила струму в аксоплазмі згідно з законом Ома становить

$$I_m = \frac{d\Delta\varphi}{dR_a},$$

де dR_a – опір аксоплазми, причому

$$dR_a = \rho_a \cdot \frac{dx}{\pi^2},$$

де ρ_a – питомий опір аксоплазми. Тоді рівняння (5.78) набуває такого вигляду:

$$j_m = -\frac{1}{2\pi r} \frac{dI_a}{dx} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dx} \left(-\frac{\pi^2}{\rho_a} \frac{d\Delta\varphi}{dx} \right) = \frac{r}{2\rho_a} \frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}. \quad (5.79)$$

Остаточно, враховуючи (5.79), отримаємо *рівняння Ходжкіна-Хакслі*:

$$\begin{aligned} \frac{r}{2\rho_a} \frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2} &= C \frac{d\Delta\varphi}{dt} + g_K n^4 (\Delta\varphi - \Delta\varphi_K^{pien}) + \\ &+ g_{Na} m^3 h (\Delta\varphi - \Delta\varphi_{Na}^{pien}) + g_{eiom} (\Delta\varphi - \Delta\varphi_{eiom}^{pien}). \end{aligned} \quad (5.80)$$

У ліву частину рівняння Ходжкіна-Хакслі введемо швидкість поширення нервового імпульсу, беручи до уваги, що поширення нервового імпульсу вздовж аксона можна описати хвильовим рівнянням:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Тоді рівняння Ходжкіна–Хакслі (5.80) набуває вигляду

$$\frac{r}{2\rho_a v^2} \frac{d^2 \Delta\varphi}{dt^2} = C \frac{d\Delta\varphi}{dt} + g_K n^4 (\Delta\varphi - \Delta\varphi_K^{рiен}) + g_{Na} m^3 h (\Delta\varphi - \Delta\varphi_{Na}^{рiен}) + g_{відм} (\Delta\varphi - \Delta\varphi_{відм}^{рiен}). \quad (5.81)$$

Розв'язок рівняння (5.81) з використанням одержаних експериментально значень r , ρ_a , $\Delta\varphi_K^{рiен}$, $\Delta\varphi_{Na}^{рiен}$, g_K , g_{Na} , $g_{відм}$ дає можливість розрахувати швидкість поширення нервового імпульсу. Наприклад, в гігантському аксоні кальмара вона становить $v = 21,2$ м/с.

Як відомо, швидкість поширення ПД залежить від того, чи має аксон мієлінову оболонку, чи така оболонка відсутня. У першому випадку розповсюдження нервового імпульсу відбувається стрибками через перехвати Ранв'є і тому має значно більшу швидкість, ніж у другому випадку.

5.6. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ¹

5.6.1. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА “Дослідження нелінійних властивостей провідності шкіри жаби”

Мета роботи: Вивчити теоретичні основи транспорту речовин через багаточарові клітинні структури; провести дослідження нелінійних властивостей провідності шкіри жаби (зняти її вольт-амперну характеристику).

Питання для підготовки до лабораторної роботи

1. Сучасні уявлення про будову мембрани (структурні елементи та їх фізичні властивості, моделі мембрани).
2. Пасивний транспорт (дифузія) незаряджених частинок. Рівняння Фіка.
3. Проникність мембрани.
4. Електродифузійні рівняння Нернста–Планка, Теорелла.
5. Особливості пасивного транспорту через мембрани (дифузія крізь пори, дифузія за допомогою переносників).
6. Активний транспорт. Види активного транспорту.
7. Спряження потоків при активному транспорті на прикладі K^+ - Na^+ -насоса.
8. Транспорт речовин через епітелій тканин та органів.

Додаткова література

1. *Владимиров Ю.А. и др.* Біофізика. – М.: Медицина, 1983. – Гл. 5, 6, 7. – С. 95–144.
2. *Костюк П.Г. и др.* Біофізика. – К.: Вища школа, 1988.
3. *Ремизов А.Н.* Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1998. – С. 244–265.

Додаткові теоретичні відомості

У цілому ряді органів людини та тварин транспорт різноманітних речовин здійснюється через декілька клітинних шарів. Такий трансцелюлярний або трансепітеліальний транспорт може вміщувати в собі всі вищенаведені види транспорту через окрему мембрану. Речовини проходять через дві клітинні мембрани: з зовнішнього боку органу – апікальну мембрану (АМ) та з внутрішнього боку – базальну мембрану (БМ) (рис. 5.40).

¹ Автори висловлюють вдячність доценту О.В. Говорусі за розробку лабораторних робіт 5.6.1–5.6.3.

Розглянемо механізм такого транспорту на прикладі епітеліоциту тонкої кишки. Апікальна мембрана (АМ) епітеліоциту (ЕЦ) розташована з боку просвіту кишки і безпосередньо контактує із середовищем, де знаходяться поживні речовини, які надходять з їжею. Базальна мембрана (БМ) розташована на серозному боці, що примикає до кровоносних судин.

Субстрат S (цукри, амінокислоти та інші речовини), які знаходяться в просвіті кишки, транспортуються крізь апікальну мембрану за допомогою спряженого з іонами Na^+ полегшеного переносу. Перенос субстрата через мембрану здійснюється при спряженні потоку субстрата Φ_S і потоку іонів (Φ_{Na}) безпосередньо на переноснику C . При цьому Na транспортується через АМ в область з меншою концентрацією згідно з електрохімічним градієнтом.

Спряжені комплекси всередині клітини розпадаються. Цукри і амінокислоти проходять крізь БМ в область з меншою концентрацією в серозну частину та далі в кров.

Іони Na^+ , які увійшли до клітини, збільшують концентрацію всередині епітеліоциту. Вийти з клітини вони не можуть, тому що в просвіті кишки, а також з боку серозної поверхні концентрація іонів Na^+ більша, ніж у клітині.

Тому збільшення концентрації Na^+ всередині клітини компенсується його "відкачкою" за рахунок роботи $\text{Na}^+\text{-K}^+$ -насоса (P). Для транспортування Na^+ в область з більшою концентрацією необхідно витратити енергію W , яка отримується при гідролізі молекул АТФ (аденозинтрифосфоруної кислоти) з утворенням молекул АДФ (аденозиндифосфоруної кислоти) та неорганічного фосфату (Φ_n):

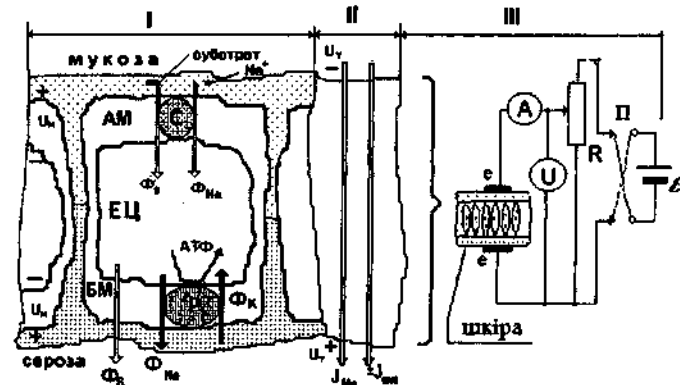
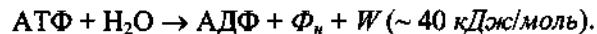


Рис. 5.40. Схематичне зображення шкіри жаби і електрична схема для зняття вольт-амперної характеристики шкіри жаби. I – види транспорту речовин через епітелій. ЕЦ, АМ, БМ – епітеліоцит, його апікальна та базальна мембрани, С – система полегшеного транспорту субстратів S , що спряжений з транспортом іонів Na^+ , $\text{K}^+\text{-Na}^+$ -насос, Φ_{Na} , Φ_{K} , Φ_S – відповідно потоки Na^+ , K^+ та субстрату, U_m , U_n – відповідно трансмембранна і трансепітеліальна різниця потенціалів. II – струми через епітелій: j_{Na} – струм натрію через епітелій (пасивний транспорт на АМ мембрані, активний транспорт на БМ мембрані), $\pm j_{\text{ср}}$ – струм іонів, що створюються зовнішнім джерелом (напрямок залежить від полярності джерела). III – електрична схема для зняття вольт-амперної характеристики шкіри, е – електроди, П – перемикач полярності джерела

Рухлива сила транспорту речовини у таких системах – хімічний потенціал АТФ, що визначається концентрацією АТФ у цитоплазмі. Потік іонів Na^+ , які входять всередину клітини внаслідок пасивного транспорту, а також потік іонів Na^+ , які виходять з клітини внаслідок роботи насоса, утворюють трансепітеліальний потік іонів Φ_{Na} , який можна зареєструвати, вимірюючи густину іонного струму (j_{Na}) крізь тканину (див. рис. 5.40):

$$j_{\text{Na}} = ez\Phi_{\text{Na}}.$$

Величину та напрямок цього струму можна змінювати за допомогою зовнішнього регульованого джерела напруги, який створює додатковий струм $\pm j_{\text{ср}}$, напрямок якого залежить від полярності зовнішнього джерела \mathcal{E} . Такий метод, що його

запропонували Уссінг та Юнг, дає змогу вивчати механізм активного транспорту та вплив на нього різних факторів. Методика спрощується при застосуванні в ролі такої моделі шкіри жаби, для якої характерна система транспорту, що описана вище.

У запропонованій роботі вивчаються деякі властивості багатомембранних систем, зокрема вимірюється вольт-амперна характеристика шкіри жаби. Характер залежності величини електричного струму від різниці потенціалів $I = f(U)$ містить важливу інформацію про властивості біооб'єкта. Такі вольт-амперні характеристики (ВАХ) спостерігаються для ряду нелінійних елементів, наприклад вакуумного або напівпровідникового діодів.

Для одержання ВАХ шкіри відпрепарований шматок шкіри жаби розміщують на електродах вимірюючої схеми (див. рис. 6.40). Жива шкіра жаби функціонує аналогічно вище описаній системі транспорту через епітелій тонкої кишки. Зовнішня поверхня шкіри заряджена негативно ("−") по відношенню до внутрішньої ("+"). Ця різниця потенціалів створюється за рахунок напрямленого струму іонів Na^+ з мукозного боку до серозного. Таким чином, при проходженні електричного струму I_{en} від джерела \mathcal{E} крізь шкіру в напрямку, що співпадає з напрямком іонного струму (j_{Na}) всередині шкіри, загальний струм дорівнює сумі струмів, тобто

$$I = I_{\text{en}} + I_{\text{Na}}$$

При зміні полярності електродів загальний струм буде дорівнювати різниці цих струмів, тобто

$$I = I_{\text{Na}} - I_{\text{en}}$$

Саме цим пояснюється характер залежності величини струму в колі від величини та полярності прикладеної напруги (рис. 5.41, крива 1). Якщо створити умови, при яких різниця потенціалів на поверхні шкіри жаби не утворюється (наприклад, при пригні-

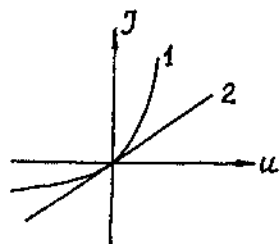


Рис. 5.41. Вольт-амперні характеристики шкіри жаби: 1 – "жива" шкіра; 2 – шкіра після дії оубаїна ("мертва")

ченні роботи $\text{K}^+ - \text{Na}^+$ -насоса оубаїном), вигляд ВАХ змінюється. Відмінність кривих дає змогу визначити внесок $\text{Na}^+ - \text{K}^+$ -АТФази у формування електродифузійних потоків. Крива 2 (рис. 5.41) відображає приблизний характер вольт-амперної характеристики у цьому випадку.

Порядок виконання роботи

Завдання 1. Зняти ВАХ шкіри.

1. Зібрати електричну схему (рис. 6.40-III) для вимірювання струму та різниці потенціалів.

2. Розташувати на електродах вимірювальної схеми шматок шкіри жаби. Шкіра повинна повністю покривати електроди. Запам'ятати положення електродів (плюс-мінус) щодо шкіри.

3. Підготувати таблицю для занесення результатів вимірів.

4. Змінюючи напругу, виміряти величину струму в ланцюгу. Результати занести в таблицю. Характеристику слід знімати, обираючи певні значення струму (бажано через 25–30 мА) до досягнення величини порядку 150 мА. При більш високих значеннях струму може статися електричний "пробій" шкіри та суттєві зміни мембранних процесів.

Таблиця. Результати зняття вольт-амперної характеристики шкіри

Жива	+	I (мА)							
	−	U (мВ)							
	−	I (мА)							
	+	U (мВ)							
Мертва	+	I (мА)							
	−	U (мВ)							
	−	I (мА)							
	+	U (мВ)							

5. Змінити полярність струму, що проходить крізь шкіру.

6. Провести вимірювання відповідно до пункту 4.

7. Шматочок шкіри занурити на 10–15 хвилин у розчин оубаїна або взяти спеціально оброблений шматочок шкіри.

8. Розташувати цей шматочок шкіри на електроді та здійснити вимірювання за пунктами 4–5.

9. За даними таблиці побудувати вольт-амперні характеристики “живої” та “мертвої” шкіри.

10. Зробити висновки за результатами дослідів.

Завдання 2. Дати відповіді на контрольні питання щодо структури та транспортної функції мембран (програма *btm.exe*) у дисплейному класі.

5.6.2. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА “Дослідження дисперсії електричного імпедансу біологічних тканин”

Мета роботи: вивчити особливості електричної провідності біологічних тканин у колі змінного електричного струму; дослідити залежність електричного імпедансу від частоти змінного струму для різних біологічних об'єктів (м'язів, листка рослини тощо); побудувати криві дисперсії імпедансу; визначити відмінність імпедансу для “живої” та ушкодженої тканин.

Питання для підготовки до лабораторної роботи

1. Змінний струм. Активний, індуктивний і ємнісний опори.
2. Векторні діаграми для повного кола змінного струму з послідовним та паралельним увімкненням R, L, C .
3. Повний опір кола змінного струму. Узагальнений закон Ома для кола змінного струму.
4. Особливості проходження постійного та змінного струмів крізь біологічні мембрани тканин. Еквівалентні електричні схеми тканин організму.
5. Залежність імпедансу біологічних тканин від частоти змінного струму. Дисперсія імпедансу. Коефіцієнт дисперсії.

Додаткова література

1. Костюк П.Г. і др. Біофізика. – К.: Вища школа, 1988.
2. Ливенцев Н.М. Курс фізики. – М.: Высшая школа, 1974. – Гл. 17. – С. 264–274.
3. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1987. – Гл. 18. – С. 326–331.

Додаткові теоретичні відомості

Біологічним тканинам притаманні такі електричні властивості:

1. **Активний опір.** Проходження постійного або змінного електричних струмів крізь біологічну тканину завжди супровод-

жується виділенням теплової енергії, що свідчить про наявність активного (омічного) опору (R). Величина цього опору залежить від розмірів об'єкта і його електричних властивостей, що визначається питомою електричною провідністю.

Можна показати (див. розділ 3), що питома електропровідність речовини (ρ) визначається концентрацією зарядів (c), їх величиною (ez) і рухливістю (b):

$$\rho = cez b.$$

Відповідно, величина електричного опору або провідності біологічних тканин при однакових геометричних розмірах залежить від цих величин.

Питомі опори різних біологічних тканин можуть відрізнятися у тисячі разів, що визначається передусім концентрацією вільних зарядів у рідких середовищах біологічних тканин.

2. **Ємнісні властивості біологічних тканин.** Конструктивно більшість біологічних тканин складаються з послідовних шарів, які добре або погано проводять електричний струм, тобто за своєю структурою відповідають будові конденсатора. Другою складовою частиною електричної ємності біологічних тканин виступає ємність клітинних мембран, яка, як відомо, має досить значну величину.

Доказом ємнісних властивостей біологічних тканин виступають такі факти: а) зменшення імпедансу тканини при збільшенні частоти електричного струму; б) амплітудне значення струму випереджає по фазі амплітудне значення напруги.

Величина ємнісного опору визначається за формулою

$$X_C = \frac{1}{\omega C},$$

де ω – циклічна частота змінного струму.

3. **Індуктивні властивості біологічних тканин.** Конструктивно ці властивості у біологічних тканин виражені дуже слабо. Індуктивний опір проявляється при дуже високих частотах змінного струму (область НВЧ і КВЧ коливань).

Величина індуктивного опору визначається за формулою

$$X_L = \omega L.$$

Електричні схеми можуть вміщувати різні елементи (R , X_C і X_L), увімкнені в схему довільним чином. Повний опір електричного кола, що містить ці елементи, змінному струмові називають *імпедансом* Z .

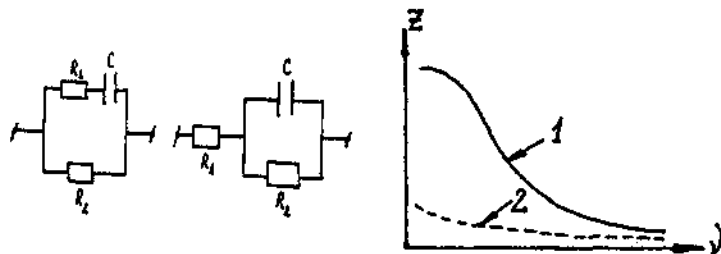


Рис. 5.42. Еквівалентні електричні схеми біологічних тканин

Експериментальні дослідження біологічних тканин свідчать про те, що найпростіші еквівалентні електричні схеми біологічних тканин можуть бути одержані послідовним та паралельним з'єднанням R та C (рис. 5.42). Таке з'єднання елементів у схемі забезпечує збіг частотних залежностей імпедансу біологічних тканин та вказаних схем.

Залежність повного опору (імпедансу) від частоти змінного струму називається *дисперсією імпедансу*, або дисперсією електропровідності. Для біологічних тканин дисперсія імпедансу має складну форму (рис. 5.43).

Вимірювання електропровідності біологічних тканин дає змогу вивчати процеси, що відбуваються у живих клітинах та тканинах при зміні їх фізіологічного стану як у нормі, так і при патологічній дії факторів, що ушкоджують тканину. Малі напруги, що використовуються при цьому, не вносять суттєвих змін у фізико-хімічні процеси, що відбуваються у біоб'єктах.

Для оцінки дисперсії імпедансу біологічних тканин розглядають *коефіцієнт дисперсії імпедансу* K , що дорівнює відношенню імпедансів біологічних тканин на низьких $Z(\text{нч})$ та високих $Z(\text{вч})$ частотах:

$$K = Z(\text{нч}) / Z(\text{вч}).$$

На практиці дисперсію імпедансу біологічних тканин вимірюють у діапазоні частот 1000 Гц (низька частота) – 10 МГц (висока частота). Для цих частот значення K для живої тканини дорівнює 10–15, а для ушкодженої або мертвої тканини не перевищує 5. За значенням цього коефіцієнта можна зробити висновок про життєздатність біотканин або органів, що підлягають трансплантації.

У цій роботі дослідження дисперсії імпедансу для різних біологічних тканин проводять у діапазоні частот змінного струму 200 Гц – 200 кГц.

Визначення імпедансу біологічної тканини здійснюють методом порівняння падіння напруги на відомому опорі та на біологічній тканині (рис. 5.44).

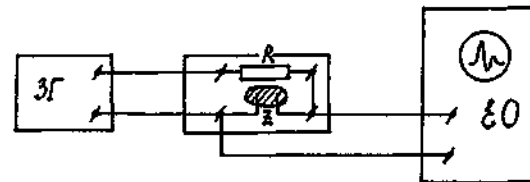


Рис. 5.44. Схема установки для дослідження дисперсії імпедансу біологічних тканин

Із запропонованої схеми видно, що електричний струм, що протікає через послідовно увімкнені опори (відомий – R і невідомий – Z), буде однаковий, тобто

$$I_R = I_Z, \quad I_R = \frac{U_R}{R}, \quad I_Z = \frac{U_Z}{Z} \quad \text{або} \quad \frac{U_R}{R} = \frac{U_Z}{Z},$$

звідки

$$Z = R \cdot \frac{U_Z}{U_R}.$$

Ця формула дає можливість виміряти імпеданс, визначивши падіння напруги на відомому опорі R та на об'єкті Z .

Якщо для вимірювання U_R і U_Z використовувати електронний осцилограф, не змінюючи коефіцієнт підсилення, то величину опору Z можна знайти за формулою

$$Z = R \cdot \frac{A_Z}{A_R},$$

де A_Z – амплітуда падіння напруги на біологічному об'єкті (в мВ),
 A_R – амплітуда падіння напруги на опорі R (в мВ).

Порядок виконання роботи

Завдання 1. Дослідити дисперсію провідності біологічної тканини.

1. Підготувати таблицю для занесення результатів вимірів.

Таблиця. Результати вимірів амплітуд падіння напруги і розрахунків імпедансу

Частота	200 Гц	2000 Гц	20 кГц	200 кГц
A_R (мВ)				
A_Z (мВ)				
Z (Ом)				
A_R (мВ)				
A_Z (мВ)				
Z (Ом)				

2. Приєднати макет з опором R до звукового генератора (ЗГ) та до осцилографа (ЕО). На голкоподібних штирях макета розташувати об'єкт дослідження. Увімкнути в електричну мережу ЗГ і ЕО.

3. Встановити на ЗГ частоту 200 кГц. Амплітуда вихідного сигналу не повинна перевищувати 100 мВ.

4. Підібрати чутливість осцилографа таким чином, щоб амплітуда сигналу A_R на опорі R була близько 10 мВ. Підключити контакти до об'єкта і поміряти (не змінюючи чутливості осцилографа) амплітуду сигналу A_Z на об'єкті. Якщо вона близько 10–15 мВ, то чутливість достатня для проведення вимірювань. У разі малої амплітуди напруги на об'єкті (менше 5 мВ) необхідно збільшити сигнал падіння напруги на опорі R вдвічі (до 20 мВ).

Дані про амплітуди A_R і A_Z занести до відповідних граф таблиці.

5. Повторити аналогічні процедури для всіх частот, що вказані в таблиці.

6. Замінити об'єкт дослідження та виконати аналогічні операції з дослідження дисперсії імпедансу.

7. Побудувати графіки залежності Z від частоти для різних об'єктів.

8. Розрахувати коефіцієнти дисперсії для досліджуваних об'єктів.

9. Зробити висновки з проведених досліджень. Оформити протокол лабораторної роботи.

Протокол повинен містити:

- мету роботи та стислі теоретичні відомості;
- таблицю вимірювань та розрахунків;
- графіки залежності імпедансу Z від частоти для різних об'єктів;
- висновки за результатами досліджень.

Задачі та запитання для самоконтролю

1. Що таке векторна діаграма і як вона будується для найпростіших електричних кіл (кіл, що вміщують лише: а) резистор; б) ємність; в) індуктивність), а також паралельне та послідовне з'єднання цих елементів?
2. Що таке імпеданс та як його розрахувати для електричних кіл, вказаних у попередньому запитанні?
3. Поясніть, чому навіть у "мертвій" тканині зберігається дисперсія імпедансу.
4. Чим пояснюється зменшення коефіцієнта дисперсії імпедансу при відмиранні біологічних тканин?
5. У скільки разів відрізняються імпеданси електричних кіл, що складаються з:
 - а) послідовно та паралельно з'єднаних індуктивності $L = 1$ мГн та ємності $C = 100$ мкФ;
 - б) послідовно та паралельно з'єднаних опорів $R = 500$ Ом та ємності $C = 0,1$ мкФ (в обох випадках частота змінного струму $\nu = 100$ Гц)?
6. Побудувати векторні діаграми для еквівалентних електричних схем біологічних тканин.

6.6.3. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА “Вимірювання концентраційного потенціалу компенсаційним методом”

Мета роботи: Вивчити природу виникнення концентраційного потенціалу. Ознайомитись з роботою концентраційного елемента і виміряти електрорушійну силу (ЕРС) концентраційного елемента компенсаційним методом.

Питання для підготовки до лабораторної роботи

- Мембранні потенціали спокою:
 - рівноважний потенціал Нернста;
 - дифузійний потенціал;
 - доннанівський потенціал;
 - стаціонарний потенціал Гольдмана–Ходжкіна–Катца.
- Компенсаційний метод вимірювання різниці потенціалів.

Додаткова література

- Владимиров Ю.А. и др. Биофизика. – М.: Медицина, 1983. – Гл. 5, 6, 7. – С. 95–144, 147–154.
- Костюк П.Г. и др. Биофизика. – К.: Вища школа, 1988.
- Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1994. – С. 244–165.

Додаткові теоретичні відомості

Концентраційний потенціал відноситься до типу рівноважних потенціалів. Розглядаючи різні умови руху іонів у просторі, можна одержати різні типи електричних потенціалів.

Рівноважний потенціал Нернста виникає при нерівномірному розподілі концентрації певних іонів у разі, коли мембрана проникна лише для цих іонів, і описується такою формулою:

$$\Delta\varphi_n = \frac{RT}{Fz} \ln \frac{c_1}{c_2}$$

Доннанівський потенціал виникає на мембрані, яка проникна для малих іонів різних знаків (Na^+ , K^+ , Cl^- та ін.) та непроникна для великих заряджених молекул (наприклад, білків), розташованих всередині клітинного простору. Формула для потенціалу Доннана має такий вигляд:

$$\Delta\varphi_d = \frac{RT}{Fz} \frac{\pi[P^-]}{2c_0}$$

де $[P^-]$ – концентрація білкових аніонів всередині клітини; c_0 – концентрація неорганічних іонів зовні.

Дифузійний рівноважний потенціал встановлюється в середовищі при наявності градієнта концентрацій іонів різного знака, що мають різну рухливість ($b^+ \neq b^-$), відповідно до формули

$$\Delta\varphi_{df} = \frac{RT}{Fz} \frac{b^+ - b^-}{b^+ + b^-} \ln \frac{c_1}{c_2}$$

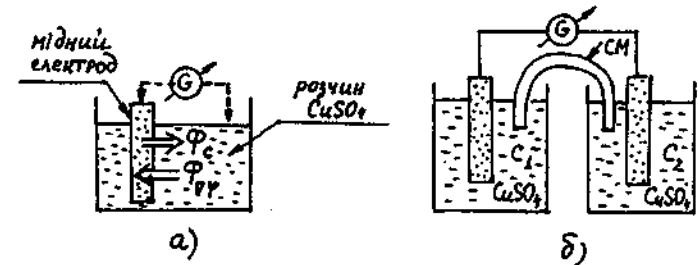


Рис. 5.45. Ілюстрація механізму виникнення концентраційного потенціалу

Концентраційний потенціал виникає при зануренні будь-якого металу у водний розчин власної солі певної концентрації. Така структура становить концентраційний елемент.

Розглянемо виникнення концентраційного потенціалу на прикладі концентраційного елемента, що складається з мідного електрода, зануреного у розчин мідного купоросу CuSO_4 (рис. 5.45, а). Взаємодію електрода з розчином можна охарактеризувати двома процесами: а) розчиненням мідного електрода, зумовленим різницею концентрацій міді в електроді та розчині (цей процес описується рівнянням Фіка); перехід іонів міді у розчин (потік Φ_c) спричинює перерозподіл зарядів і створення електричного поля; б) існуванням зворотного потоку іонів міді ($\Phi_{\nabla\varphi}$), зумовленого виникненням градієнта потенціалу.

Рівноважний стан характеризується рівністю цих потоків, тобто умовою, що сумарний потік іонів міді

$$\Phi = \Phi_c + \Phi_{\nabla\varphi} = 0$$

або

$$-D \frac{dc}{dx} - c \frac{DFz}{RT} \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

звідки

$$d\varphi = -\frac{RT}{Fz} \frac{dc}{c}.$$

Інтегруючи одержане рівняння, з урахуванням значень концентрацій міді в електроді c_0 і розчині c_p , одержимо таку величину концентраційного потенціалу φ_e :

$$\int_0^{\varphi_e} d\varphi = -\frac{RT}{Fz} \int_{c_0}^{c_p} \frac{1}{c} dc;$$

$$\varphi_e = -\frac{RT}{Fz} \ln \frac{c_p}{c_0}$$

або

$$\varphi_e = -\frac{RT}{Fz} \ln c_p + \varphi_0,$$

де $\varphi_0 = (RT/Fz) \ln c_0$ – деяка постійна величина, що визначається природою електрода та іонів у розчині.

Якщо занурені в розчини електроди з'єднати провідним соляним містком (рис. 5.45, б), то між електродами виникає концентраційна різниця потенціалів

$$\Delta\varphi_{\text{хн}} = \varphi_{e1} - \varphi_{e2} = \left(-\frac{RT}{Fz} \ln c_1 + \varphi_0 \right) - \left(-\frac{RT}{Fz} \ln c_2 + \varphi_0 \right)$$

або

$$\Delta\varphi_{\text{хн}} = \frac{RT}{Fz} \ln \frac{c_2}{c_1}.$$

Примітка. Соляний місток (СМ) заповнений агар-агаром з розчином КСІ. У цьому середовищі іони K^+ і Cl^- рухаються з

однаковою швидкістю і відповідно вирівнювання потенціалів розчинів відбувається без внесення додаткової дифузійної різниці потенціалів.

У цій роботі вимірюється різниця потенціалів між двома мідними електродами, зануреними в розчини мідного купоросу різних концентрацій (див. рис. 5.45, б), тобто електрорушійна сила концентраційного елемента.

Електрорушійна сила джерела електричного струму дорівнює, як відомо, різниці потенціалів між полюсами джерела при розімкненому зовнішньому колі. Для вимірювання електрорушійної сили джерела струму не можна користуватися вольтметром, бо при його увімкненні одержимо замкнене коло, по якому потече струм. Тому електрорушійну силу джерела струму вимірюють методом компенсації.

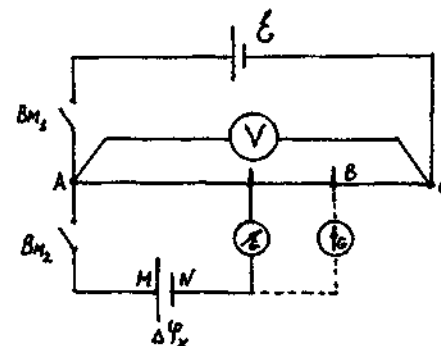


Рис. 5.46. Електрична схема для вимірювання електрорушійної сили концентраційного елемента методом компенсації

Для вимірювання електрорушійної сили концентраційного елемента прилади з'єднують так, як показано на рис. 5.46.

Слід підкреслити, що в точці А реохорда джерело струму E та концентраційний елемент $\Delta\varphi_x$ під'єднують однойменними полюсами. Коло, в яке під'єднані концентраційний елемент $\Delta\varphi_x$ та гальванометр, називають вимірювальним. Можна підібрати таке положення рухливого контакту реохорда, щоб стрілка гальванометра G при замиканні вмикача Bm_2 не відхилилася, що свідчить про відсутність струму у вимірювальному колі або про

рівність потенціалів точки B реохорда та точки N на електроді концентраційного елемента. Точки A та M також екіпотенціальні.

У цьому випадку електрорушійна сила концентраційного елемента дорівнюватиме різниці потенціалів на ділянці AB реохорда, тобто

$$\Delta\varphi_x = U_{AB}.$$

Отже, за законом Ома на ділянці AB падіння напруги становить

$$U_{AB} = I \cdot R_{AB},$$

тобто

$$\Delta\varphi_x = I \cdot R_{AB}.$$

При відсутності електричного струму у вимірювальному колі сила струму через реохорд буде такою:

$$I = \frac{U_{AC}}{R_{AC}},$$

де U_{AC} – падіння напруги на всій довжині реохорда, яке визначаємо за допомогою вольтметра.

Таким чином, значення ЕРС концентраційного елемента одержимо за формулою

$$\Delta\varphi_x = U_{AC} \frac{R_{AB}}{R_{AC}} = U_{AC} \frac{L_{AB}}{L_{AC}},$$

де L_{AC} – довжина реохорда; L_{AB} – довжина ділянки реохорда, на якій відбувається компенсація ЕРС концентраційного елемента.

Середню відносну похибку $\bar{\varepsilon}$ при визначенні ЕРС концентраційного елемента розраховують за формулою

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\overline{\Delta(\Delta\varphi_x)}}{\Delta\varphi_x} = \frac{\overline{\Delta U_{AC}}}{U_{AC}} + \frac{\overline{\Delta L_{AB}}}{L_{AB}} + \frac{\overline{\Delta L_{AC}}}{L_{AC}},$$

звідки одержують значення абсолютної похибки

$$\overline{\Delta(\Delta\varphi_x)} = \bar{\varepsilon} \overline{\Delta\varphi_x}.$$

Остаточний результат слід подати у такому вигляді:

$$\Delta\varphi_x = (\overline{\Delta\varphi_x} \pm \overline{\Delta(\Delta\varphi_x)}), \text{ В.}$$

Усі виміри необхідно повторити три рази і результати занести до таблиці.

Таблиця. Результати вимірів

№	L_{AB} , мм	ΔL_{AB} , мм	L_{AC} , мм	ΔL_{AC} , мм	U_{AC} , В	ΔU_{AC} , В	c_1 , моль	c_2 , моль	T , К
1									
2									
3									
Серед- нє			1000	0,5			0,1	0,01	

Порядок виконання роботи

Зібрати електричне коло за схемою, відповідно до рис. 5.46.

Накреслити таблицю для результатів вимірювання і занести до неї необхідні відомості.

Пересуваючи повзунок реохорда і замикаючи вмикач Bm_1 , досягти нульового відхилення стрілки гальванометра G . (Якщо “нуль” не встановлюється, слід перемкнути полярність концентраційного елемента і повторити цю операцію).

Дані про положення реохорда (довжину ділянки AB та показання вольтметра U_{AC}) занести до таблиці (вимірювання провести не менше трьох разів).

Розрахувати середнє значення ЕРС концентраційного елемента $\Delta\varphi_x$, використовуючи середні значення величин, що входять до формули. Визначити теоретичне значення $\Delta\varphi_x$ за формулою для концентраційної різниці потенціалів $\varphi_m = (RT/Fz)\ln(c_2/c_1)$ і порівняти експериментальний та теоретичний результати.

Зробити висновок про відповідність експериментального та теоретичного результатів, а також про можливі причини їх розходження.

Контрольні питання і задачі

1. Чому концентраційний потенціал є рівноважним? У чому полягає фізична суть рівноважного стану концентраційного елемента?
2. Визначити рівноважні потенціали для іонів Na^+ , K^+ і Cl^- для мембрани еритроцита, якщо концентрації цих іонів відповідно дорівнюють: зовні $c_e = 155, 5, 4 \text{ мМоль/л}$; всередині $c_i = 19, 136, 120 \text{ мМоль/л}$.
3. Вкажіть величини рівноважних потенціалів Нернста для іонів Na^+ , K^+ і Cl^- в нормі.

5.6.4. Практичне заняття “Вивчення біофізики мембран за допомогою комп’ютерних програм”

Схему програм з біофізики мембран наведено в таблиці:

Біофізика мембран	Файл
Блок №1. Вивчення структури мембран	bm_.exe
Блок №2. Вивчення мембранного транспорту	bm_.exe
Блок №3. Вивчення мембранних потенціалів	bmp_.exe
Блок №4. Вивчення потенціалів дії	bmp_.exe
Блок №5. Контрольні питання	bmq_.exe

Залежно від типу ЕОМ ці програми представлені або у вигляді одного блоку – m_.exe (при наявності твердого диску), або у вигляді трьох блоків: bm_.exe, bmp_.exe та bmq_.exe (при його відсутності та роботі з віртуальним диском).

Завдання 1. Вивчення структури мембрани і мембранного транспорту.

1. Запустити для виконання програму bm_.exe чи m_.exe.
2. Вийти у головне меню програми та вибрати курсором блок “Структура мембрани”, ознайомитися з теоретичним матеріалом.
3. Після закінчення роботи з цим блоком перейти до наступного блоку “Транспорт речовини крізь мембрану”, натиснувши клавішу F2 (нижня інформаційна строчка екрана) та ознайомитись з матеріалом цього блоку.

Завдання 2. Вивчення мембранних потенціалів.

1. Запустити для виконання програму bmp_.exe чи вибрати блок №3 “Вивчення мембранних потенціалів” при роботі з програмою m_.exe.
2. Ознайомитись з теоретичним матеріалом цього блоку.

Завдання 3. “Вивчення потенціалу дії (ПД) і дослідження зміни його форми”.

1. Запустити до виконання програму bmp_.exe. (Якщо ця програма є у загальному блоці, то можна перейти до виконання програми “Дослідження потенціалу дії”, запустивши її натиском клавіші F4, згідно з вказівками інформаційного рядка на нижній частині екрана).

2. Вивчити теоретичний матеріал теми “Потенціал дії” (екранні сторінки 1–11), після чого перейти до виконання завдань.

Завдання 4. Дослідити зміну потенціалу дії при зміні активності лише однієї частинки, яка активує чи інактивує іонні канали.

Діапазон зміни активності частинок 0,05–25 (нормі відповідає значення активності, що дорівнює 1).

1. Змінюючи активність від мінімальної до максимальної, отримати на екрані потенціал дії (ПД).

2. Намалювати у зошиті отримані графіки зміни ПД.

3. Зробити висновок про вплив активності цих частинок на зміну форми ПД.

Завдання 5. Дослідити зміну форми ПД при одночасній зміні проникності Na^+ - та K^+ -каналів (зміни активностей m -, h -, і n -частинок).

1. Дослідити зміну форми ПД для таких режимів:

а) $n = 1$ (активність n -часток залишити постійною), одночасно збільшуючи активності m -частинок (діапазон зміни 1–25) та зменшуючи активність h -частинок (діапазон зміни 1–0,05);

б) $n = 1$, одночасно змінюючи активності m -частинок від 1 до 0,05 та збільшуючи активність n -частинок від 1 до 25;

в) одночасно збільшуючи m -, h -, n - активності за вказаними діапазонами зміни цих активностей;

г) одночасно зменшуючи m -, h -, n - активності.

Завдання 6. Одержати ПД з чіткою фазою гіперполяризації.

Враховуючи досвід роботи по зміні форми ПД залежно від активності частинок, одержати потенціал дії з чіткою фазою гіперполяризації.

Завдання 7. Одержати ПД з чітким плато, розташованим вище лінії потенціалу, який дорівнює нулю.

Змінюючи активності частинок, виконати це завдання.

Після закінчення роботи відповісти на контрольні запитання, запустивши програму `btm_q.exe`.

Контрольні запитання до комп'ютерних програм з біофізики мембран (блок 5, файл `btm_q.exe`)

1. Вкажіть необхідні фізичні властивості, які повинен мати структурний елемент мембрани.
2. Чим визначається амфіфільність (амфіпатичність) структурного елемента мембрани?
3. Якими видами взаємодій можна пояснити гідрофобну та гідрофільну поведінку структурного елемента мембрани?
4. Вкажіть основні структурні компоненти мембрани.
5. Чим забезпечується механічна міцність мембрани?
6. Які компоненти входять до складу мембранних фосфоліпідів?
7. Виконання яких функцій мембрани забезпечують глікопротеїди?
8. Які компоненти входять до складу мембранних гліколіпідів?
9. Назвіть динамічні характеристики мембрани як рідкого кристалу.
10. Чому дорівнює товщина клітинної мембрани?
11. Чому дорівнює напруженість електричного поля мембрани?
12. Назвіть молекулярні структури, що відносяться до фосфоліпідів?
13. Яким чином можна зберегти рухливість фосфо- і гліколіпідів при зниженні температури?
14. Що таке "кінки"?
15. У мембранах яких структур і клітин переважно знаходяться гліколіпіді?
16. Чим зумовлений пасивний транспорт рідини через мембрану?
17. Чим зумовлений результуючий потік іонів при пасивному транспорті їх через мембрану?
18. Що описує рівняння Фіка?
19. Що описує рівняння Нернста-Планка?
20. Що описує рівняння Теорелла?
21. Вкажіть відмінні властивості полегшеної дифузії.
22. Вкажіть тривалість потенціалу дії в нормі для кардіоциту людини.
23. Якими рівняннями описується пасивний транспорт речовин через мембрану?
24. Вкажіть формулу, за якою визначається проникність мембрани.
25. За рахунок чого здійснюється активний транспорт речовин через мембрану?
26. Назвіть іони, які за допомогою активного транспорту (насосів) переносяться в бік збільшення концентрації.

27. Від чого залежить проникність мембрани для електрично нейтральних невеликих молекул?
28. Де локалізований кальцієвий мембранний насос?
29. Вкажіть функції K^+ - Na^+ -насоса.
30. Де локалізований протонний насос?
31. За рахунок чого протонний насос здійснює транспорт іонів водню?
32. Вкажіть загальні характеристики активного транспорту і полегшеної дифузії.
33. Вкажіть речовини, для яких транспорт через мембрану здійснюється за допомогою полегшеної дифузії.
34. Як здійснюється трансмембранний перенос великих молекул (білків, глікопротеїдів тощо)?
35. Що характеризує проникність мембран P і яку розмірність вона має?
36. Що таке потенціал дії?
37. Які умови враховуються при визначенні мембранного рівноважного потенціалу Нернста?
38. Які умови враховуються при визначенні дифузійного мембранного потенціалу?
39. Які умови враховуються при визначенні стаціонарного мембранного потенціалу?
40. Які умови враховуються при визначенні рівноважного потенціалу Доннана?
41. Вкажіть, для яких випадків доннанівський потенціал ближче всього до потенціалу клітини.
42. Вкажіть, як співвідносяться між собою у стані спокою проникності мембран живих клітин для іонів
43. Вкажіть значення потенціалу спокою мембран для еритроцита, міоциту жаби, аксона кальмара, кардіоциту собаки у нормі.
44. Як співвідносяться в початковий момент збудження проникності мембран для іонів у живих клітинах?
45. Чому дорівнює максимальне збільшення проникності мембрани для іонів Na^+ , K^+ і Cl^- при її збудженні?
46. Вкажіть причини утворення потенціалу дії.
47. Чим визначається форма початкової фази деполяризації мембрани при формуванні потенціалу дії?
48. Чим визначається фаза реполяризації мембрани при формуванні потенціалу дії?
49. Вкажіть тривалість потенціалу дії в нормі для аксону кальмара.

РОЗДІЛ 6. ТЕРМОДИНАМІЧНІ ТА СИНЕРГЕТИЧНІ ПРИНЦИПИ БІОФІЗИКИ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

“Віки і тисячоліття пройшли, доки людська думка спромоглася відзначити риси єдиного зв'язаного механізму у картині природи, що здавалася хаотичною”.

В.І. Вернадський

Зародження живої матерії в процесі еволюції доволищнього світу, виникнення впорядкованих структур в неживій природі та в складних біологічних системах – явища, які продовжують залишатися одними з найдивовижніших для розуміння в межах матеріалістичної науки.

Класичні запитання сучасного природознавства і науки в цілому можуть бути сформульовані так: чому, з одного боку, спостерігається встановлення рівноваги (теплової, механічної тощо), а з другого боку, спостерігається ускладнення об'єктів у процесі біологічної еволюції, тобто працює принцип Дарвіна? Чому знання точних фізичних і хімічних законів, таких як закони Ньютона, закон Кулона та інших, не дає змоги часто описати найпростіші властивості живих систем? Чи існує зв'язок між основними законами, за допомогою яких можна дослідити природні та суспільні явища?

За умови значної диференціації науки аж до самого останнього часу відповіді на ці запитання відносилися скоріше до компетенції філософії. Кожний розділ природознавства та суспільних наук використовував і використовує свої методи дослідження і підходи, які, зазвичай, не мають спільних точок зіткнення. Водночас існують універсальні принципи природи і відповідні методи дослідження, які можна застосувати для будь-яких систем. Це передусім методи термодинаміки та синергетики, до вивчення основ яких у застосуванні до складних медико-біологічних систем ми переходимо в цьому розділі.

6.1. ВІДКРИТІ БІОЛОГІЧНІ СИСТЕМИ, ЗАКОНИ ТЕРМОДИНАМІКИ І ТЕРМОДИНАМІЧНІ ПОТЕНЦІАЛИ

Найважливіша властивість живих організмів полягає в їх здатності перетворювати і запасати енергію в різних формах. Саме цим визначається значення термодинамічного підходу для вивчення спільних закономірностей перетворення енергії, які є універсальними і загальними для явищ як живої, так і неживої природи. Інша специфіка біологічних об'єктів полягає в тому, що вони не є ізольованими від зовнішнього середовища. Через контакти із зовнішнім середовищем живі організми обмінюються з оточенням речовиною, енергією та інформацією, тобто є *відкритими системами*.

Дослідники, вивчаючи складні процеси в живих системах, створюють певні моделі цих процесів шляхом аналізу медико-біологічних даних. При цьому, зокрема, використовується феноменологічний, або термодинамічний підхід. Закони термодинаміки відкритих систем представляють саме ту універсальну основу, на якій мають будуватися і вдосконалюватися подібні моделі. Нагадаємо основні закони термодинаміки.

Перший закон (перше начало) термодинаміки: теплота, що підводиться до системи, йде на зміну її внутрішньої енергії та на роботу, яку здійснює система над зовнішніми тілами.

Математичний запис 1-го начала термодинаміки виглядає так:

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (6.1)$$

де враховано, що внутрішня енергія U є повним диференціалом відповідних термодинамічних змінних, тоді як теплота Q і робота A не є такими.

Емпірична основа для 1-го начала термодинаміки була створена насамперед дослідженнями англійського фізика Джоуля, який в 1840–1845 рр. показав, що потрібна одна і та сама механічна робота для нагрівання певної кількості води.

Цікаво відзначити той значний внесок, який зробили медики у встановлення цього одного з найважливіших законів природи. Так, вважається, що честь відкриття 1-го закону (начала)

термодинаміки, який є по суті законом збереження енергії, належить разом з фізиками Джоулем і Гельмгольцем ще й лікарю Майєру.

Другий закон (друге начало) термодинаміки: в ізольованій системі неможливий перехід теплоти від менш нагрітого тіла до більш нагрітого.

Це формулювання 2-го закону, термодинаміки належить німецькому фізику Клаузіусу, який в 1865 р. ввів у науку фундаментальне поняття ентропії. *Ентропія S – це така функція стану, що характеризує напрямок самодовільного процесу в ізольованій системі.* Ентропія ізольованої системи зростає з наближенням до рівноважного стану. У рівновазі ентропія досягає свого максимального значення.

Важлива роль, яка відводиться в термодинаміці ентропії, пов'язана принаймні з двома причинами:

1) зміна ентропії δS характеризує теплоту δQ , яку одержала або віддала система при взаємодії з оточенням: $\delta S \geq \delta Q/T$ (знак “ \geq ” відповідає зворотним процесам, тоді як знак “ $>$ ” – незворотним, реальним процесам в природі);

2) ентропія характеризує ступінь впорядкованості (або неупорядкованості) системи. Згідно з принципом Больцмана ентропія пов'язана з термодинамічною ймовірністю W стану системи за допомогою такого фундаментального співвідношення:

$$S = k \ln W, \quad (6.2)$$

де k – стала Больцмана. Не входячи в теоретичні тонкощі, можна стверджувати, що термодинамічна ймовірність W дорівнює числу мікростанів, за допомогою яких реалізується даний емпіричний стан системи при заданій енергії, об'ємі та кількості частинок.

Термодинамічні потенціали. Термодинамічний стан будь-якої системи повністю визначається її *термодинамічними потенціалами*. Для кожного повного набору незалежних термодинамічних параметрів існує певний термодинамічний потенціал, за допомогою якого можуть бути обчислені будь-які макроскопічні характеристики системи. Наведемо визначення і основні властивості чотирьох термодинамічних потенціалів – внутрішньої енергії, ентальпії, вільної енергії Гіббса і вільної енергії Гельмгольца.

Внутрішня енергія U . Перші два закони (начала) термодинаміки дають спільно такий вираз для зміни внутрішньої енергії відкритої однокомпонентної системи:

$$dU = TdS - PdV + \mu dN. \quad (6.3)$$

З цього співвідношення випливає, що внутрішня енергія є природним термодинамічним потенціалом при обранні в якості набору незалежних змінних ентропії S , об'єму V і кількості часток N . Диференціювання внутрішньої енергії дає такі параметри, як температура T , тиск P і хімічний потенціал μ , що є спряженими в термодинамічному сенсі обраному набору незалежних змінних:

$$T = U'_{S,N}; \quad P = -U'_{S,N}; \quad \mu = U'_{S,V}.$$

Очевидно, що зміна внутрішньої енергії при адіабатичному процесі ($S = const$) визначається роботою діючих на систему зовнішніх сил, тоді як в умовах постійності об'єму V ця зміна визначається теплотою, що передається системі.

Ентальпія (тепловміст) H . Ентальпія пов'язана з внутрішньою енергією таким співвідношенням:

$$H = U + PV,$$

а її повний диференціал

$$dH = TdS + VdP + \mu dN. \quad (6.4)$$

З цього виразу стає зрозуміло, що ентальпія, як термодинамічний потенціал, має бути використана для набору незалежних змінних S , P , N . Для ізобаричного процесу зміна ентальпії визначається теплотою, що поглинає (віддає) система. Диференціювання ентальпії дає такі параметри:

$$T = H'_{P,N}; \quad V = H'_{S,N}; \quad \mu = H'_{S,P}.$$

Вільна енергія Гіббса G . Вільна енергія Гіббса пов'язана такими співвідношеннями з внутрішньою енергією і ентальпією:

$$G = H - TS = U + PV - TS,$$

а її повний диференціал

$$dG = -SdT + VdP + \mu dN. \quad (6.5)$$

Видно, що вільній енергії Гіббса відповідає набір незалежних змінних T, P, N . Спряжені в термодинамічному значенні параметри виходять як такі похідні від вільної енергії Гіббса:

$$S = -G'_{P,N}, V = G'_{T,N}, \mu = G'_{T,P}.$$

Останнє співвідношення показує, що хімічний потенціал μ є вільна енергія Гіббса в розрахунку на один моль при сталих температурі та тиску. У зв'язку з проведеним у попередньому п'ятому розділі розглядом мембранних електричних потенціалів клітин зауважимо, що в присутності електричного поля та із врахуванням розчиненої речовини хімічний потенціал (в цьому випадку його називають електрохімічним потенціалом) має такий вигляд:

$$\bar{\mu} = \mu_0 + kT \ln C + ze\varphi \quad (\text{в розрахунку на одну молекулу});$$

$$\bar{\mu} = \mu_0 + RT \ln C + zF\varphi \quad (\text{в розрахунку на один моль}),$$

де z – валентність; e – елементарний заряд; F – число Фарадея; μ_0 – хімічний потенціал розчинника; C – концентрація розчиненої речовини (наприклад, певного іона); φ – потенціал електричного поля.

Вільна енергія Гельмгольца F . Для цього термодинамічного потенціалу маємо

$$F = U - TS = H - PV - TS.$$

Відповідно

$$dF = -SdT + PdV + \mu dN. \quad (6.6)$$

Звідси випливає, що для вільної енергії Гельмгольца природним набором незалежних змінних є T, V, N .

Необхідно відзначити також, що в природних умовах значно легше реалізувати вимогу постійності температури T , ніж ентропії S . Тому два останні термодинамічних потенціали – вільні енергії Гіббса G і Гельмгольца F – знаходять більш широке застосування для опису медико-біологічних систем, оскільки для них ізотермічно-ізобарні або ізотермічно-ізохорні умови є найбільш природними. З наближенням до положення рівноваги вільні енергії Гіббса G і Гельмгольца F набувають своїх мінімальних значень.

6.2. ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ НЕЗВОРОТНИХ ПРОЦЕСІВ

Дослідження біофізичних процесів, що відбуваються в реальних системах, методами рівноважної термодинаміки часто є неадекватним наближенням. У загальному випадку фізичні і біофізичні об'єкти не знаходяться в положенні рівноваги. В них з кінцевою швидкістю протікають незворотні процеси, які прагнуть повернути систему в стан рівноваги. Добре відомими прикладами можуть бути процеси теплопровідності з характерним часом встановлення рівноваги або, як його ще називають, часом релаксації $\tau \approx L^2/\chi$ (L – лінійний розмір системи, $\chi = \lambda/\rho C_p$ – коефіцієнт температуропровідності, λ – коефіцієнт теплопровідності, ρ – густина, C_p – ізобарна теплоємність); процеси дифузії з часом релаксації $\tau \approx L^2/D$ (D – коефіцієнт дифузії); процеси внутрішнього тертя з часом релаксації $\tau \approx L^2/\nu$ ($\nu = \eta/\rho$ – кінематична в'язкість, η – динамічна в'язкість) та ін.

Термодинаміка незворотних процесів, що є феноменологічною основою для вивчення незворотних процесів у різних системах, в тому числі і біофізичних, спирається на такі положення та поняття: лінійний закон, принцип симетрії кінетичних коефіцієнтів, закони збереження, виробництво ентропії, спряження потоків, стаціонарний стан, теорема Пригожина та ін.

6.2.1. Лінійний закон

Лінійний закон становить узагальнення відомих емпіричних фактів, що формулюються у вигляді таких законів:

а) **закону Фіка**, що пов'язує потік частинок J_n , тобто кількість частинок, які за одиницю часу перетинають одиницю площі в перпендикулярному напрямку, і різницю (градієнт) концентрації ∇c за допомогою співвідношення $J_n = -D \nabla c$, де D – коефіцієнт дифузії;

б) закон Фур'є, що пов'язує потік тепла J_Q і різницю (градієнт) температури ∇T за допомогою співвідношення $J_Q = -\lambda \nabla T$, де λ – коефіцієнт теплопровідності;

в) закон Ома, що пов'язує потік заряду (густину електричного струму) J_ϕ і градієнт потенціалу електричного поля $\nabla \phi$ за допомогою співвідношення $J_\phi = -\sigma \nabla \phi$, де σ – коефіцієнт електропровідності.

Нагадаємо, що градієнт ∇A певної скалярної величини A є вектор, який за модулем дорівнює максимальному значенню похідної dA/dx , а за напрямком співпадає з напрямком зростання величини A .

Процеси переносу, в яких градієнт даної властивості викликає потік цієї ж фізичної властивості, називаються *прямими процесами переносу*. Очевидно, що перераховані вище приклади відносяться саме до такого класу процесів переносу. Окрім прямих, існують *непрямі (перехресні) процеси переносу*, в яких градієнт однієї фізичної властивості викликає потік іншої фізичної властивості.

Розглянемо приклад так званих термодифузійних явищ. Нехай у деякому середовищі спостерігаються два градієнти: концентрації c і температури T . Тоді в такому середовищі виникають потоки частинок і тепла, причому

$$J_n = -D\nabla c - \alpha \nabla T;$$

$$J_Q = -\lambda \nabla T - \beta \nabla c.$$

Процес виникнення потоку частинок під дією градієнта температури називається *ефектом Соре* (другий доданок у рівнянні для J_n). Зворотний процес, пов'язаний з виникненням потоку тепла під дією градієнта концентрації, називається *ефектом Дюфура*. Ще одним прикладом непрямого процесу переносу є термоелектропровідність – виникнення потоку електричного заряду під дією градієнта температури.

Для узагальнення наведених вище емпіричних законів розглянемо:

а) *термодинамічні сили*

$$X_i \Rightarrow \{\nabla c, \nabla T, \nabla \phi, \nabla v, \dots\},$$

що пов'язані з градієнтами різних фізичних величин (концентрації, температури, потенціалу електричного поля, швидкості тощо);

б) *потоки*

$$J_i \Rightarrow \{J_n, J_Q, J_e, J_{mv}, \dots\}$$

кількості частинок, тепла, електричного заряду, імпульсу тощо.

Лінійний закон термодинаміки незворотних процесів стверджує: *кожний потік становить лінійну функцію від термодинамічних сил*, тобто:

$$J_i = \sum_{k=1}^N L_{ik} X_k, \quad (6.7)$$

де L_{ik} – так звані кінетичні коефіцієнти; N – загальна кількість термодинамічних сил в системі. Зауважимо, що лінійний закон справедливий при порівняно невеликих відхиленнях системи від положення рівноваги, коли градієнти фізичних властивостей (термодинамічні сили) є малими. При великих відхиленнях від положення рівноваги необхідно враховувати старші по X_k доданки – квадратичні, кубічні тощо. Природно, що така теорія ускладнюється. Тут розглядається лише лінійний варіант термодинамічної теорії незворотних процесів.

Відзначимо ще один, здавалося б очевидний факт, що носить назву *принципу Кюрі*: *лінійний закон повинен зв'язувати потоки і термодинамічні сили однієї і тієї самої скалярної, векторної (в загальному випадку – тензорної) розмірності*. Іншими словами, в кожне рівняння лінійного закону повинні входити або скалярні величини, такі як тиск (ці величини називаються ще тензорами нульового рангу) або векторні величини, такі як градієнти концентрації, температури, потенціалу електричного поля, а також потоки частинок, тепла, електричного заряду (ці величини називаються ще тензорами першого рангу) або так звані тензори другого рангу, якими є потік імпульсу та градієнт швидкості. Принцип Кюрі дає змогу встановити достатньо нетривіальні факти, згідно з якими, наприклад, потік частинок, що є векторною величиною, не може викликатися просторовими похідними від швидкості, тобто тензорними величинами 2-го рангу та ін.

6.2.2. Принцип симетрії кінетичних коефіцієнтів і виробництво ентропії

Формулювання *принципу симетрії кінетичних коефіцієнтів (теорема Онсагера): при певному виборі термодинамічних сил і потоків матриця кінетичних коефіцієнтів є симетричною, тобто кінетичні коефіцієнти в перехресних явищах є рівними.*

Принцип симетрії кінетичних коефіцієнтів записується за допомогою такої простої математичної формули:

$$L_{ik} = L_{ki}. \quad (6.8)$$

Не зупиняючись детально на доведенні теореми Онсагера, конкретизуємо слова “при певному виборі сил і потоків”. Для цього розглянемо спочатку ентропію нерівноважного стану, вважаючи, що система знаходиться все ж таки досить близько від своєї рівноваги.

Позначимо через $\langle P_k \rangle_0 = P_{k0}$ значення параметрів (наприклад, густини частинок, енергії тощо), від яких залежить ентропія у положенні рівноваги, а через $\alpha_k = P_k - \langle P_k \rangle_0$ відхилення параметрів від своїх рівноважних значень. Розкладемо ентропію нерівноважного стану в такий ряд по відхиленнях α_k :

$$S(P_k) = S(P_{k0}) + \sum_k \left(\frac{\partial S}{\partial P_k} \right)_0 \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial P_k \partial P_l} \right)_0 \alpha_k \alpha_l + \dots$$

Враховуючи близькість системи до рівноважного стану, подальшими членами ряду будемо нехтувати. Оскільки похідні від ентропії по параметрах P_k розраховуються в положенні рівноваги, то через екстремальність ентропії в рівновазі маємо

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P_k} \right)_0 = 0.$$

Звідси для відхилення ентропії від свого максимального значення отримуємо такий вираз, що містить квадрати відхилень α_i параметрів від положення рівноваги:

$$\Delta S = S(P_k) - S(P_{k0}) = -\frac{1}{2} \sum_{k,l} g_{kl} \alpha_k \alpha_l, \quad (6.9)$$

де через $g_{kl} = g_{lk} = -\left(\frac{\partial^2 S}{\partial P_k \partial P_l} \right)_0$ позначені другі похідні від

ентропії S по параметрах α_i , що обчислені в стані рівноваги.

Потоки J_i і термодинамічні сили X_i обираються в такому вигляді:

$$J_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t}, \quad X_i = \frac{\partial \Delta S}{\partial \alpha_i}. \quad (6.10)$$

Тоді, враховуючи вираз для ΔS з формули (6.8) і симетрію коефіцієнтів $g_{ik} = g_{ki}$ для величин термодинамічних сил X_i отримуємо

$$X_i = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^N g_{il} \alpha_l - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N g_{ki} \alpha_k = -\sum_{l=1}^N g_{il} \alpha_l.$$

Обґрунтуванням для вибору сил і потоків у відповідності з формулами (6.10) є проста симетрична форма для величини

$$\sigma = \frac{\partial \Delta S}{\partial t}, \quad (6.11)$$

яка відіграє важливу роль у термодинаміці незворотних процесів. Ця величина називається *швидкістю виникнення ентропії*, або *виробництвом ентропії*. Зауважимо, що поки ми не розрізняли ентропію (виробництво ентропії) для всієї системи та для одиниці об'єму. Очевидно, так можна зробити для просторово однорідних систем. У цьому випадку фізичний зміст величини σ полягає в тому, що вона визначає зміну ентропії всього об'єму системи за одиницю часу. Для просторово неоднорідних систем (наприклад, цитоплазми поблизу мембран або біологічних рідин у зовнішньому полі) треба вводити уявлення про об'ємну густину виробництва ентропії, яка характеризує зміну ентропії за одиницю часу в одиниці об'єму середовища.

Обчислимо виробництво ентропії з врахуванням співвідношень (6.9) та (6.11)

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,k} g_{ik} \alpha_i \alpha_k \right) = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} g_{ik} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \alpha_k - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i,k} g_{ik} \alpha_i \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} (g_{ik} + g_{ki}) \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \alpha_k.\end{aligned}$$

З урахуванням зробленого в (6.10) вибору сил і потоків виробництво ентропії становить суму доданків, кожний з яких є добутком i -того потоку на i -ту термодинамічну силу:

$$\sigma = \sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \cdot \left(-\sum_k g_{ik} \alpha_k \right) = \sum_i J_i X_i. \quad (6.12)$$

Таким чином, наслідком теореми Онсагера є той факт, що з N^2 кінетичних коефіцієнтів є незалежними лише $N(N+1)/2$. Зауважимо також, що співвідношення $L_{ki} = L_{ik}$ виконується у разі, коли параметри α_i є парними функціями швидкостей (енергія, концентрація тощо). Нехай існують параметри (позначимо їх через β_i), які є непарними функціями швидкостей (наприклад, імпульс). Тоді принцип симетрії кінетичних коефіцієнтів (теорему Онсагера) для систем, що знаходяться в магнітному полі або обертаються, слід узагальнити таким чином:

$$L_{ik}^{\alpha\alpha}(B, \omega) = L_{ki}^{\alpha\alpha}(-B, -\omega);$$

$$L_{ik}^{\beta\beta}(B, \omega) = L_{ki}^{\beta\beta}(-B, -\omega);$$

$$L_{ik}^{\alpha\beta}(B, \omega) = -L_{ki}^{\beta\alpha}(-B, -\omega),$$

де B – індукція магнітного поля; ω – кутова швидкість.

6.2.3. Спряження потоків у біологічних системах

Для багатьох життєво важливих процесів, що проходять у відкритих біологічних системах, характерним є явище, яке називається *спряженням потоків*. Розглянемо суть цього явища, використовуючи основні положення термодинаміки незворотних процесів для відкритих біологічних систем, в яких крім дисипативних процесів дифузії, теплопровідності, в'язкості відбуваються також і хімічні (біохімічні) реакції.

Спочатку зупинимось коротко на описанні хімічних реакцій, що використовуються в термодинаміці незворотних процесів. Для відкритих багатокомпонентних систем термодинамічні потенціали містять, як зазначалося в розділі 6.1, доданок $\sum \mu_i N_i$, де сума береться по кількості компонентів $i = 1, \dots, n$. У хімічно (біохімічно) реагуючих системах виявляється корисним введення деякого внутрішнього параметра (узагальненої координати) ξ , який називається *степенем повноти*, або *числом обертів (пробігів) реакції*. Зміна цього параметра є інтегральною характеристикою реакції, пов'язаної зі зміною кількості молей dN_i реагуючих компонентів таким співвідношенням:

$$d\xi = dN_i / \nu_i, \quad (6.13)$$

де ν_i – стехіометричні коефіцієнти реакції, тобто числові коефіцієнти перед хімічними символами речовин у рівнянні реакції $\sum \nu_i M_i = 0$. Очевидно, що зміна кількості молей всіх речовин в хімічно реагуючій системі повністю визначається зміною числа молей одного певного компоненту N_i , що й дає можливість ввести величину ξ . Зауважимо, що рівняння, яке пов'язує ξ , T і P (або V), є рівнянням стану системи з хімічними (біохімічними) реакціями. Тоді маємо

$$\sum \mu_i dN_i = (\sum \nu_i \mu_i) d\xi = -A d\xi, \quad (6.14)$$

де величина $A = -\sum \nu_i \mu_i$ називається *спорідненістю або афінністю хімічної (біохімічної) реакції*. Ця величина була введена у хімічну термодинаміку де Донде і характеризує близькість системи до хімічної рівноваги. Так, для ізобарично-ізотермічної системи маємо:

а) у рівновазі $A = 0$ і відповідно зміна вільної енергії Гіббса $\Delta G = 0$;

б) при $\Delta G < 0$, $A > 0$ – реакція можлива;

в) при $\Delta G > 0$, $A < 0$ – реакція виявляється неможливою.

Хімічні (біохімічні) реакції, поряд з розглянутими раніше незворотними процесами дифузії, теплопровідності, в'язкості, також дають внесок у виробництво ентропії. Як було показано в попередньому параграфі, виробництво ентропії визначається добутком потоків J_i і термодинамічних сил X_i , що їх викликають,

тобто $\sigma = \sum J_i X_i$. Для хімічно реагуючої системи вибір потоку $J_{x_{im}}$ і термодинамічної сили $X_{x_{im}}$ визначається такими співвідношеннями:

$$J_{x_{im}} = d\xi/dt, \quad X_{x_{im}} = A/T.$$

Відповідно виробництво ентропії у такій системі отримує додатковий внесок, а саме:

$$\sigma_{x_{im}} = A (d\xi/dt) / T = AV_{x_{im}}/T, \quad (6.15)$$

де $V_{x_{im}} = d\xi/dt$ – швидкість хімічної реакції.

Тепер перейдемо безпосередньо до поняття спряження потоків. Нехай у досліджуваній системі відбуваються одночасно дві реакції, котрі є єдиними джерелами незворотності. Тоді виробництво ентропії у відповідності з формулою (6.15) має вигляд

$$\sigma = (A_1 V_1 + A_2 V_2) / T > 0$$

і є додатною величиною в силу 2-го закону термодинаміки. Ця нерівність спостерігається не тільки в тому випадку, коли кожний з доданків є додатним, але й тоді, коли один з них (скажімо, перший) – від'ємний, а другий – додатний і більший першого за модулем, тобто

$$A_1 V_1 < 0, \quad A_2 V_2 > 0, \quad |A_1 V_1| < A_2 V_2.$$

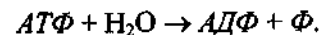
У цьому випадку прийнято називати першу реакцію *спряженою*, а другу – *спрягаючою*. Очевидно, що одна перша реакція була б неможливою в ізольованій системі, оскільки для неї спорідненість A_1 є від'ємна величина і виробництво ентропії в результаті цієї реакції також від'ємне. Однак ця реакція стає можливою через наявність іншої реакції, для якої виробництво ентропії є величина додатна.

Саме така ситуація і називається *спряженням потоків*, або *спряженням незворотних процесів*. Точніше кажучи, *спряженням потоків (процесів) називається таке співвідношення між потоками (процесами), при якому додатне виробництво ентропії від одного потоку (процесу) компенсує зменшення ентропії від другого потоку (процесу), яке було б неможливе в ізольованій системі*.

Приклад 1. Фосфорилування глюкози відбувається в результаті такої реакції:



де Φ – іон фосфорної кислоти. Цей процес сам по собі виявляється неможливим, так як у результаті цієї реакції відбувається збільшення вільної енергії Гіббса на величину $\Delta G = 13,4 \text{ кДж/моль}$ (див. кінець параграфу 6.1). Проте процес фосфорилування стає можливим при його спряженні з іншим процесом – гідролізом АТФ, що іде за такою реакцією:



Під час останньої реакції вільна енергія Гіббса зменшується на величину $\Delta G = -30,5 \text{ кДж/моль}$. Перша реакція (фосфорилування глюкози) є спряженою, друга (гідроліз АТФ) – спрягаючою. Результуюча реакція (брутто-реакція) записується у вигляді



Для такої результуючої реакції зміна вільної енергії Гіббса є від'ємною величиною: $\Delta G = -17,1 \text{ кДж/моль}$. Таким чином, спорідненість такої реакції є величиною додатною ($A > 0$), що робить її можливою.

Приклад 2. У ізольованій системі при наявності одного сорту частинок процес дифузії йде в напрямку від місць, де концентрація речовин більша, в місця, де вона менша. При наявності хоча б двох сортів частинок, а в загальному випадку – у багатокомпонентній системі, потік частинок будь-якого компоненту може рухатися в напрямку зростання концентрації.

Приклад 3. Своєрідне поєднання процесів, котрі розглянуто в перших двох прикладах, відбувається при *активному транспорті* речовини через біологічні мембрани, молекулярні механізми якого були описані в п'ятому розділі. В результаті активного транспорту речовина (наприклад, іони натрію та калію) переноситься в напрямку збільшення концентрації. Такий спряжений процес виявляється можливим завдяки спрягаючій реакції – реакції гідролізу АТФ.

6.2.4. Стаціонарний стан відкритих систем і теорема Пригожина щодо мінімуму виробництва ентропії

Розглянемо поняття стаціонарного стану, котре відіграє важливу роль в термодинамічному описанні відкритих систем.

Повна зміна ентропії dS у відкритій системі може бути представлена як сума двох доданків

$$dS = dS_i + dS_e, \quad (6.16)$$

що описують в загальному вигляді такі процеси:

- 1) процеси зміни ентропії всередині системи (dS_i);
- 2) процеси зміни ентропії через взаємодію відкритої системи з навколишнім середовищем (dS_e).

Коли б всередині досліджуваної системи відбувалися лише зворотні процеси, то зміна ентропії була б відсутня ($dS_i = 0$). Оскільки всередині реальної системи протікають незворотні дисипативні процеси, в результаті яких наростає ентропія, то $dS_i > 0$. Щодо знака величини dS_e , то він може бути довільним і залежить від того, відбувається поступлення ентропії в систему або відтік ентропії з неї, пов'язаний з потоками частинок, тепла та іншими процесами переносу через поверхню, що обмежує виділений об'єм досліджуваної системи.

Стаціонарним називається такий стан системи, при якому ентропія всієї відкритої системи S зберігається, тобто повна зміна ентропії дорівнює нулю ($dS = 0$).

Із умови постійності ентропії ($dS = 0$) і рівняння (6.16) безпосередньо випливає, що $dS_e = -dS_i$. Тоді в силу позитивності зміни ентропії dS_i за рахунок дисипативних процесів, що відбуваються всередині системи, зміна ентропії dS_e через взаємодію відкритої системи з довкіллям повинна бути від'ємною ($dS_e < 0$) і достеменно рівною за модулем зміні ентропії dS_i всередині системи. Подібна реалізація умови стаціонарності відкритої системи стає можливою, якщо ентропія, що наростає всередині системи, повністю переходить в навколишнє середовище. Іншими словами, можна стверджувати, що відкриті системи у стаціонарному стані живляться *негентронією (від'ємною ентропією) $N = -S$.*

Пригожин довів, що у *стаціонарному стані виробництво ентропії мінімальне* ($\sigma = \sigma_{\min}$). Це твердження має назву *“теорема Пригожина”*. Розглянемо міркування, що спонукають до встановлення цієї теореми.

Дійсно, з отриманих у параграфі 6.2.2 формул для виробництва ентропії $\sigma = dS/dt = \sum J_i X_i$ та лінійного закону $J_i = \sum L_{ik} X_k$ маємо

$$\sigma = \sum L_{ik} X_i X_k. \quad (6.17)$$

Для спрощення обмежимося випадком двох термодинамічних сил і відповідно двох потоків. Тоді, беручи до уваги принцип симетрії кінетичних коефіцієнтів ($L_{ik} = L_{ki}$), можна записати такий вираз для виробництва ентропії:

$$\sigma = L_{11} X_1^2 + 2L_{12} X_1 X_2 + L_{22} X_2^2.$$

Обчислимо часткові похідні від виробництва ентропії σ за термодинамічними силами X_1 і X_2 , а саме:

$$\partial\sigma/\partial X_1 = 2L_{11} X_1 + 2L_{12} X_2 = 2J_1;$$

$$\partial\sigma/\partial X_2 = 2L_{22} X_2 + 2L_{12} X_1 = 2J_2.$$

Отже, коли в стаціонарному стані відкритої системи потоки $J_1 = 0$ і $J_2 = 0$, то виробництво ентропії приймає екстремальне значення. В силу додатної визначеності квадратичної форми $\sigma = f(X_1, X_2)$ і пов'язаної з цим позитивності других похідних

$$\partial^2\sigma/\partial X_1^2 = 2L_{11} > 0, \quad \partial^2\sigma/\partial X_2^2 = 2L_{22} > 0$$

цей екстремум є мінімум (див. розділ 1 в першому томі), тобто виробництво ентропії у стаціонарному стані приймає мінімально можливе значення.

Принцип мінімуму виробництва ентропії у стаціонарному стані відкритої системи має надзвичайно важливе значення. Він дає кількісний критерій, що допомагає визначити *напрямок розвитку (еволюції) відкритої системи* будь-якої складності, а саме: *якщо у відкритій системі відбуваються незворотні процеси поблизу термодинамічної рівноваги, то по зменшенню виробництва ентропії у такій системі можна передбачити її перехід у стаціонарний стан.* Іншими словами, критерієм

наближення системи до стаціонарного стану є від'ємність похідної від виробництва ентропії за часом, тобто виконання нерівності

$$\partial \sigma / \partial t = \partial^2 S / \partial t^2 < 0. \quad (6.18)$$

Теорема Пригожина пояснює також принципову стійкість стаціонарних станів відкритих систем. Справді, якщо відкрита система самодовільно виходить з свого стаціонарного стану через флуктуації, то в ній відбувається збільшення швидкості виробництва ентропії ($\partial \sigma / \partial t > 0$). Тоді через теорему Пригожина необхідним наслідком подібної зміни стану системи мають бути такі процеси всередині системи, при яких вона знову повернеться до свого початкового стаціонарного стану. Принцип мінімуму виробництва ентропії (теорема Пригожина) відіграє таку саму роль для відкритих систем, як *принцип Ле Шательє–Брауна*, що пояснює стійкість рівноважних систем: *будь-який зовнішній вплив, який виводить систему з положення рівноваги, викликає в ній такі процеси, які прагнуть послабити результат цих зовнішніх впливів.*

6.3. ВІДКРИТІ МЕДИКО-БІОЛОГІЧНІ СИСТЕМИ, ЩО ЗНАХОДЯТЬСЯ ДАЛЕКО ВІД РІВНОВАГИ (ЕЛЕМЕНТИ СИНЕРГЕТИКИ)

Визначним досягненням у розвитку науки за останні роки стало розуміння фундаментальних основ і принципів самоорганізації у відкритих системах різної природи (фізичних, хімічних, біологічних та ін.) поодаль від їх положення рівноваги. Зараз вже можна говорити про створення *міждисциплінарної області науки – синергетики, котра вивчає загальні принципи самоорганізації і утворення просторових, часових і просторово-часових структур у відкритих нерівноважних системах.* Сам факт утворення нових структур (упорядкування) в процесі еволюції знаходиться в уявному протиріччі з другим началом термодинаміки, з суті якого випливає, що з плином часу обов'язково відбувається зникнення структур (розупорядкування) з одночасним підвищенням сумарної ентропії всієї системи. Насправді цього протиріччя, що виникло ще при співставленні

другого начала термодинаміки і еволюційного принципу Дарвіна, не існує. Утворення структур відбувається у відкритій підсистемі, котра завжди становить частину певної більшої системи. Якщо ця остання є замкненою системою, то дисипативні процеси, що у ній відбуваються, спонукають до зростання ентропії усієї системи, але це не обов'язково викликає зростання ентропії кожної її частини.

Поява наприкінці 70-х років ХХ століття нового міждисциплінарного наукового напрямку, який отримав назву "синергетика", створила надійні засади для посилення інтеграційних тенденцій в науці та освіті. Як вже зазначалося, синергетика вивчає загальні принципи самоорганізації та утворення впорядкованих структур у відкритих нерівноважних системах різної природи.

Термін "*самоорганізація*" визначає процеси (явища), які пов'язані із зміною структури і забезпеченням узгодженої поведінки системи завдяки наявності внутрішніх зв'язків і контактів із зовнішнім середовищем. Здатністю до самоорганізації і утворення впорядкованих структур володіють системи живої та неживої природи, а також штучні системи.

Якщо до виникнення синергетики природничі та інші науки могли обходитися під час використання системного підходу до своїх об'єктів дослідження без врахування колективних ефектів, які спонукають до утворення стійких структур в часі та просторі, нині послідовне вивчення цих проблем стало можливим на підставі синергетичних методів. Особливо важливим і гострим постає питання щодо впорядкованості і самоорганізації під час дослідження енергетичних, екологічних, соціальних, політичних, медико-біологічних та інших глобальних проблем.

Існує досить велика кількість прикладів виникнення впорядкованих структур у системах різної природи:

у фізиці – це фазові переходи типу надпровідність і надплинність, конвективна нестійкість, страти у газовому розряді, пентагональні структури у плазмі токамаків, когерентне випромінювання лазерів, солітони;

в астрофізиці – це червона пляма Юпітера, полярні саява;

у *хімії* – періодична окислювально-відновна реакція Белоусова–Жаботинського;

у *біології* – періодичні процеси при гліколізі і фотосинтезі, морфогенетичні процеси у сімействі колективних амеб, коливальна динаміка чисельності популяцій;

у *медицині* – утворення ревербераторів (спіральных хвиль) у міокарді, спіральні хвилі і гексагональні структури у сітківці ока при депресії Леао;

в *обчислювальній техніці* – паралельні обчислення і надійність роботи ЕОМ, розпізнання образів;

у *соціології і політології* – формування суспільної думки, стійкість політичних систем;

в *екології* – поширення епідемій (пандемій) і забруднення, а також велика кількість інших процесів.

Просте перерахування цих прикладів показує, що синергетика тісно пов'язана з різними галузями науки і техніки. Це не означає, що вона використовує цілковито різнорідні поняття. Одним з головних аспектів світоглядного значення синергетики, ціннішим досягненням синергетичного підходу якраз і є те, що в ній вдається обґрунтувати нові “перші принципи”, що лежать в основі процесів самоорганізації і впорядкування або, більш загально кажучи, функціонування відкритих складних систем.

Одна з основних причин процесів самоорганізації та впорядкування формулюється у вигляді принципу, який можна було б назвати “*принципом узагальненого дарвінізму*”, а саме: *просторові, часові та просторово-часові структури в органічному та неорганічному світі виникають як прояв колективних коливань через флуктуації, їх взаємодію і відбір тих з них, які мають найбільший час затухання (релаксації)*. Такі найтриваліші живучі процеси характеризуються змінними, які у синергетиці називаються *параметрами порядку* або *керуючими модами* (коливаннями). Саме вони визначають еволюцію системи, котра первісно мала дуже багато степенів свободи. В результаті колективної взаємодії різних мод у такій системі може виділитися лише кілька параметрів порядку. У цьому полягає зміст *принципу підлеглості*, котрий відіграє дуже важливу роль у синергетичних процесах.

Впорядковані структури, які утворюються у відкритих системах, далеких від рівноваги, поділяються на просторові, часові і просторово-часові (табл. 6.1).

Таблиця 6.1. Типи впорядкованих структур та їх параметри

Система	Тип структури	Просторова розмірність системи d	Характерні параметри
Реакція БЖ	Просторові структури, часові осциляції	$d = 1, 2$ $d = 1, 2, 3$	$\lambda \approx 1$ см $T \approx 4$ хв
Баретер (дріт із струмом в середовищі H_2 і He)	Просторові структури, автохвилі	$d = 1, 2$ $d = 3$	$v \approx 1$ см/с $T \approx 5$ хв $V \approx 10-50$ мкм/с
Гліколіз	Часові осциляції, автохвилі	$d = 3$	$T \approx 5$ хв
Плазмодій міксоміцети	Часові осциляції	$d = 3$	$\lambda \approx 1-100$ мкм $v \approx 1$ мм/хв
Морфогенез	Просторові структури	$d = 3$	$\lambda \approx 1$ мкм – 1 см
Сітківка ока	Спіральні хвилі	$d = 3$	$\lambda \approx 1$ мкм $v \approx 1$ мм/хв

До просторових структур відносяться гексагональні комірки Бенара, згадані вище спіральні структури, що в певний момент часу можна спостерігати в реакції Белоусова–Жаботинського (БЖ), в колонії соціальних амеб (плазмодії міксоміцети), в міокарді, на сітківці ока при депресії Леао тощо.

Часові структури спостерігаються в екологічних суспільствах (типovým прикладом є періодична з часом зміна чисельності популяцій в моделі “хижак–жертва”, що буде розглянута пізніше), часові осциляції при гліколізі і фотосинтезі тощо.

Просторово-часові структури мають місце при спостереженні реакції Белоусова–Жаботинського протягом досить тривалого часу (десятки хвилин), в динамічних процесах розповсюдження ревербераторів в міокарді, при поширенні нервового імпульсу в аксоні тощо.

Розглянемо деякі приклади впорядкування та самоорганізації систем різної природи, про які згадувалося вище, докладніше.

Особливу увагу при цьому ми будемо звертати на схожість, певну подібність цих явищ. Ця схожість поведінки різноманітних систем (наприклад, дивний перебіг періодичної хімічної реакції Белоусова–Жаботинського, утворення спіральних структур в колонії соціальних амеб, поява ревербераторів у міокарді тощо) дає підстави говорити про так званій “ізоморфізм”, тобто подібність, явищ утворення впорядкованих структур у зовсім різних за своєю природою відкритих системах.

Періодична хімічна реакція Белоусова–Жаботинського. У 1951 році радянський хімік Б.П. Белоусов відкрив нову реакцію, суть якої зводилася до того, що протягом кількох годин з періодом приблизно 4 хвилини змінювався колір хімічно реагуючих компонентів – від червоного до синього і навпаки, тобто ця реакція була періодичною. Лише через вісім років Б.П. Белоусову вдалося надрукувати повідомлення про своє відкриття у реферативному журналі “Сборник рефератов по радиационной медицине” за 1958 г. Далі теоретичні аспекти цієї реакції розроблялися А.М. Жаботинським, а потім А.М. Заїкіним. Було з’ясовано, що хімічна реакція Белоусова є окисновідновною, автокаталітичною реакцією, в якій беруть участь іони церія змінної валентності. Саме зміна валентності іонів церія від 3 до 4 (і навпаки) викликає зміну кольору реакції. У 1970 р. А.М. Заїкін і А.М. Жаботинський створили зручні умови для експериментального спостереження періодичної хімічної реакції,

відкритої Б.П. Белоусовим, коли вилили розчин, в якому відбувалася ця реакція, тонким шаром в чашку Петрі. В такій системі, яка потім отримала назву хімічного реактора Заїкіна–Жаботинського, ними спостерігалися спіральні автохвилі хімічної активності – дуже ефектні природні структурні утворення (рис. 6.1). Якщо спіральні хвилі в чашці Петрі, що вивчалися А.М. Жаботинським та



Рис. 6.1. Спіральні хвилі в реакції Белоусова–Жаботинського (фотографія А.Т. Уінфрі)

А.М. Заїкіним, були двовимірні, то американський біофізик А. Уінфрі зміг спостерігати згодом тривимірні автохвилі хімічної активності. Детальний хімічний механізм періодичної реакції Белоусова був остаточно описаний (після перших робіт А.М. Жаботинського і А.М. Заїкіна) венгерським вченим Є. Керошем та американцями Р. Філдом і Р. Нойесом. Останні розробили для цього спеціальну *кінетичну модель*, яка отримала назву “*орегонатор*” (за назвою американського штату Орегон, де мешкали автори цієї моделі). Інша кінетична модель “*брюсселятор*”, що мала також за мету пояснення перебігу періодичної автокаталітичної хімічної реакції Белоусова–Жаботинського, була створена І.Р. Пригожиным та Г. Ніколісом (назва моделі пов’язана, очевидно, зі столицею Бельгії, де у Вільному Університеті Брюсселя працював лауреат Нобелівської премії І.Р. Пригожин).

Спіральні структури в колонії соціальних амеб. Ще один дивний приклад самоорганізації можна спостерігати у біологічному суспільстві, а саме – в колонії соціальних амеб (грибів-слизівиків *Dictyostelium discoideum*). Соціальними ці амеби називаються тому, що їм притаманна властивість до об’єднання (агрегації) у відповідні просторові структури, які мають спіральну форму. Виявляється, що коли амеби мають вдосталь їжі, вони існують як окремі і розвиваються індивідуально. Зовсім інша ситуація відбувається, коли їжа закінчується. Тоді голодні амеби починають спонтанно та в імпульсному режимі виділяти спеціальну хімічну речовину – цАМФ (циклічний аденозинмонофосфат), який відіграє роль морфогена, тобто сприяє формоутворенню. Просторовий розподіл цього морфогена, точніше кажучи, – градієнт концентрації цАМФ, є просторовою міткою, яка дає можливість всім іншим амебам збиратися (агрегувати) у спіральні або концентричні структури. Таким чином, механізм хімічної сигналізації виявився надзвичайно важливим у процесі формоутворення – морфогенезу. Принциповим є той факт, що структури в колонії соціальних амеб (рис. 6.2) виявляються подібними до автохвиль хімічної активності в реакції Белоусова–Жаботинського не лише за зовнішніми ознаками, а й тому

що ці спіральні утворення виникають у відкритих системах, які є активними за своєю природою, (іншими словами, збудливими через існуючий в них запас енергії).



Рис. 6.2. Спіральні структури в колонії соціальних амеб (фотографія Г. Гереша і Б. Хесса)

Спіральні структури (ревербератори) в міокарді. Вперше спіральні структури в міокарді були відкриті у 1946 році мексиканським кардіохірургом А. Розенблютом та математиком Н. Вінером, який по праву вважається “батьком” кібернетики. У той рік А. Розенблют запросив свого друга Н. Вінера відпочити з ним, тоді ж він і розповів Н. Вінеру про небезпечну серцеву хворобу – фібриляцію, яка дуже часто призводить до миттєвої зупинки серця. І вони разом створили модель, яка показала, що при порушенні механічної однорідності серцевого м’язу – міокарду (така неоднорідність спостерігається біля витoku вени з серця) з’являється спіральна хвиля електричного збудження міокардіальних клітин. Ця спіральна хвиля отримала назву “ревербератор” (рис. 6.3). В подальшому вдалося довести, що ревербератори виникають не лише там, де порушується механічна неоднорідність, але і в точках, де з’являється неоднорідність по деякому прихованому параметру активного середовища, яким є міокард, – періоду рефрактерності (див. нижче). Саме ці точки стають джерелами появи спіральних хвиль (ревербераторів).

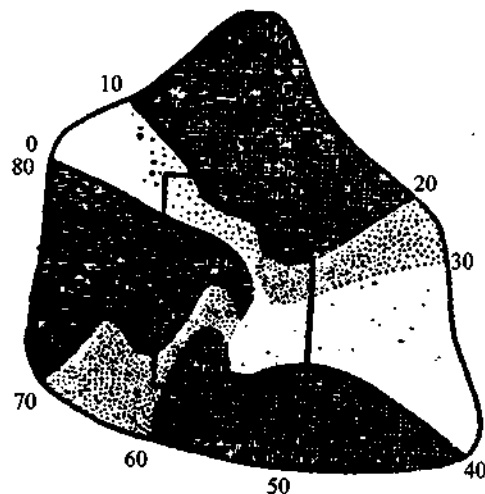


Рис. 6.3. Спіральна хвиля в серцевому м’язі кролика (з роботи М. Алессі, Ф. Бонке, Ф. Шопмана; цифрами позначені моменти часу в мілісекундах)

Прямим наслідком розмноження ревербераторів у міокарді є тахікардія (зміна нормального ритму роботи серця, а саме – збільшення частоти серцевих скорочень), а потім і фібриляція (хаотична пульсація серця). Розуміючи механізми появи ревербераторів, можна вести свідомий пошук ліків та інших немедикаментозних методів запобігання фібриляції. Треба підкреслити, що хімічний реактор, де відбувається періодична реакція Белоусова–Жаботинського, є тим активним аналоговим середовищем, в якому були зроблені успішні експерименти в цьому напрямі.

Сучасні підходи до основних синергетичних проблем самоорганізації та впорядкування використовують потужні та добре апробовані методи, на які спираються *а) теорія фазових перетворень; б) теорія нелінійних коливань і автохвиль; в) кінетичні моделі типу “брюсселятора” і “орегонатора”; г) теорія катастроф* та деякі інші підходи. Нижче ми зупинимося детальніше на цих питаннях.

Розпочнемо з аналізу сучасного стану і досягнень *теорії фазових переходів*, яка складає (поряд з іншими методами) наукову і методичну основу синергетики. В критичних точках,

які визначають процеси самоорганізації і впорядкування, слід приділяти особливу увагу флуктуаційним ефектам. В останні 2–3 десятиліття досягнуто великих успіхів у з'ясуванні ролі флуктуацій – відхилень різних термодинамічних параметрів (густини, концентрації, температури, тиску тощо) від своїх середніх значень. Це стало можливим завдяки розвитку універсальних методів фізики фазових переходів і критичних явищ, заснованих на ідеях теорій масштабної інваріантності (скейлінгу) і ренормалізаційної групи, які були розвинуті в роботах О.З. Паташинського, В.Л. Покровського, М. Фішера, Л. Каданова, К. Вільсона та інших вчених.

Вихідним при побудові статистичної теорії фазових переходів є поняття параметра порядку та поля, спряженого йому в термодинамічному сенсі (табл. 6.2). Іншою принципово важливою характеристикою систем, в яких відбуваються фазові переходи, є радіус кореляції, який визначає ту відстань, на якій флуктуації параметра порядку, тобто їх відхилення від середніх значень, впливають одна на одну (корелюють між собою). З наближенням до точки фазового переходу величина радіуса кореляції сильно зростає. Таким чином, різним системам поблизу їх фазових переходів стає притаманною колективна взаємодія флуктуацій на великих відстанях та на значних часових інтервалах. Більш того, в поведінці цих систем з'являється універсальність, тобто їх властивості (рівняння стану, різні рівноважні та кінетичні характеристики) описуються однаковими законами, які називають масштабно-інваріантними або скейлінговими. Цей результат є дуже сильним і принциповим через те, що дослідивши детально критичну поведінку однієї системи (наприклад, рідини поблизу її критичної точки), можна перенести отримані результати на систему іншої природи (наприклад, магнетик, надпровідник, хімічно реагуючу систему тощо) за допомогою своєрідного “словника” (частина цього словника міститься у табл. 6.2), який пов'язує між собою відповідні величини систем різної природи.

Таблиця 6.2. Параметри порядку та спряжені поля для різних систем

Система	Параметр порядку	Спряжене поле
Однокомпонентна рідина	Відхилення питомого об'єму від критичного значення	Відхилення температури і тиску від критичних значень
Двокомпонентна суміш поблизу критичного стану розшарування	Відхилення концентрації від критичного значення	Різниця хімічних потенціалів компонентів
Система з хімічними реакціями	Степінь повноти (число обертів) хімічної реакції	Спорідненість хімічної реакції

Залежність рівноважних та кінетичних властивостей від температури, зовнішнього поля та інших змінних поблизу точок фазових переходів характеризується степеневими законами, де показники степенів мають назву критичних індексів. Величини критичних індексів залежать від просторової розмірності системи, розмірності (числа компонентів) параметра порядку, а також від радіуса потенціалу взаємодії. Системи, що мають однакові значення цих характеристик (наприклад, є тривимірними, із скалярним параметром порядку і короткосяжним радіусом міжмолекулярної взаємодії), потрапляють в один і той самий “клас універсальності”. Це означає, що такі системи, як однокомпонентна рідина чи бінарна рідка суміш, магнетик в так званому наближенні Ізінга, хімічно реагуюча система, система “медіатор-рецептор” у синаптичній щілині тощо, описуються поблизу своїх критичних точок однаковими степеневими скейлінговими законами.

Потрібно розрізняти *рівноважні* та *нерівноважні фазові переходи*. Для рівноважних фазових переходів, про які йшлося вище, притаманна поступова зміна таких параметрів, як тиск, температура, хімічні потенціали компонентів розчину тощо (ці параметри називають інколи “польовими”), а також стрибкоподібна зміна таких параметрів, як об'єм, ентропія, концентрації компонентів розчину тощо (ці параметри називають інколи

“густинними”). У разі нерівноважних фазових переходів відбуваються різкі зміни в поведінці параметрів системи, які спричиняють появу впорядкованих структур. Ці процеси впорядкування і самоорганізації певною мірою нагадують рівноважні фазові переходи, де відбувається стрибкоподібна зміна “густинних” параметрів. Проте суттєвою особливістю нерівноважних фазових переходів (на відміну від рівноважних) є те, що вони відбуваються у відкритих системах, в яких через взаємодію з навколишнім середовищем спостерігається від’ємна зміна (тобто зменшення) ентропії. Звичайно, нерівноважні фазові переходи (їх називають ще кінетичними фазовими переходами) є набагато різноманітнішими, ніж рівноважні (термодинамічні) фазові переходи.

Розглянемо загальні властивості відкритих систем, в яких існують різноманітні процеси впорядкування. На відміну від рівноважних утворень, які можуть бути описані та досліджені відомими методами термодинаміки та статистичної фізики, в нерівноважних системах реалізуються так звані *дисипативні структури* (цей термін вперше був введений І.Р. Пригожиным).

Прикладом звичайних рівноважних структур є рідина чи кристал, які існують в залежності від температури, тиску та інших зовнішніх параметрів. Дисипативні структури утворюються завдяки потокам енергії, імпульсу, маси через границі системи. Типовим прикладом дисипативної структури є так звані комірки Бенара, які виникають в реальній в’язкій рідині при наявності в ній різниці температури. Коли рідина підігривається знизу (існує потік тепла через нижню границю в такій відкритій системі), то раптово при деякому співвідношенні між товщиною шару рідини, різницею (градієнтом) температури, в’язкістю та іншими параметрами в раніше однорідній рідині виникають шестигранні утворення –

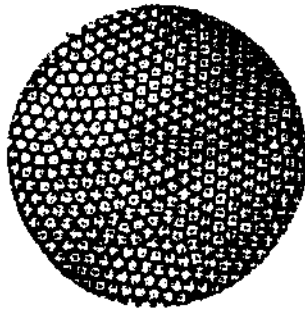


Рис. 6.4. Гексагональні комірки Бенара

Елементи синергетики 471

комірки Бенара (рис. 6.4). Такий процес є проявом взаємодії флуктуацій (відхилень параметрів системи від середніх значень). Роль взаємодії флуктуацій зростає і стає вирішальною поблизу критичних (біфуркаційних) точок. Ця взаємодія може стати настільки сильною, що існуюча раніше структура (в нашому випадку – однорідна рідина) руйнується. В ній з’являються більш впорядковані структури, які й називаються дисипативними.

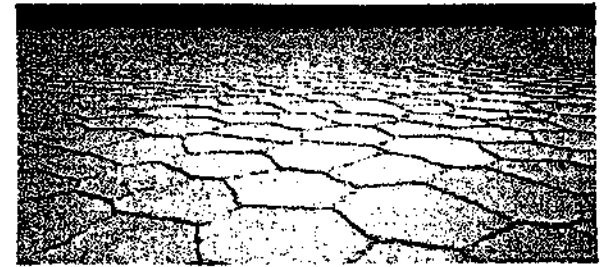


Рис. 6.5. Гексагональні структури, що виникли на поверхні солоного озера Юмі в Болівії (фото К. Хірояма з “Дейлі Юміурі”)

Дуже схожий до комірок Бенара вигляд мають гексагональні структури, що спостерігаються на висушеній поверхні солоного озера Юмі в Болівії (рис. 6.5). Можливо, це також є проявом синергетичних процесів, що виникають при конвекційній нестійкості нерівноважної відкритої системи. Значна схожість цих гексагональних структур дивує і є безумовним викликом людському розуму, як і поширеність спіральних структур у зовсім різних за своєю природою системах.

Інший тип впорядкування відкритої системи – це *автохвилі* та *автоколивання*, що були розглянуті вище на прикладі хімічної реакції Белоусова–Жаботинського чи ревербераторів у міокарді. Відомими прикладами автохвиль і автоколивань є також хвиля поширення потенціалу дії (зміни електричного потенціалу) вздовж нервового волокна (аксона), хвиля горіння, автоколивання при гліколізі та фотосинтезі тощо.

Загальні риси всіх цих процесів полягають у наявності наступних спільних особливостей середовища, де вони відбуваються:

1. Середовища, в яких поширюються автохвилі або автоколивання, є **активними**. У звичайних пасивних середовищах, де спостерігаються пружні, теплові або електромагнітні хвилі, енергія хвилі передається від джерела у віддалені точки з послабленням. На відміну від пасивних середовищ, в активних йдуть процеси накопичення енергії та її вивільнення при відповідному механізмі збудження.

2. Активні середовища мають три різні стани свого функціонування:

– **стан спокою**, який реалізується у відсутності зовнішніх впливів;

– **стан збудження**, який виникає при наявності зовнішніх впливів;

– **стан рефрактерності**, який виникає після зникнення збудження і протягом якого система повертається в стан спокою (якщо система перебуває у стані рефрактерності, вона не може бути переведена у стан збудження доти, доки вона не перейде у стан спокою).

3. Цікава властивість автохвильових процесів, в тому числі й ревербераторів в серцевому м'язі, пов'язана з так званим **ефектом синхронізації**. Суть цього ефекту полягає в тому, що коли в активному середовищі діють кілька джерел коливань і хвиль з різними частотами, то найстійкішими є коливання і хвилі з максимальною частотою. Іншими словами, всі коливання з меншими частотами подавляються коливаннями з більшими частотами.

4. Властивості автохвиль в активних середовищах і хвиль у пасивних середовищах досить сильно відрізняються (табл. 6.3). У цій таблиці, в останньому стовпчику, містяться відомості і про ще один тип впорядкованих структур – **солітони** (поодинокі хвилі).

Вперше солітон був відкритий С. Расселом у 1834 році досить випадково, як часто й робляться великі відкриття. С. Рассел вивчав в той час рух барж різних форм, що мали різні швидкості, з метою надати рекомендації щодо будівництва барж у зв'язку з переходом від кінської тяги до парової. Саме проводячи ці спостереження, він відкрив солітон, про що так написав у своєму звіті “Доповідь про хвилі”: “Я слідкував за

рухом баржі, яку швидко тягнула вздовж вузького каналу пара коней, коли баржа раптово зупинилася; але маса води, яку баржа привела в рух, не зупинилася. Замість цього вона зібралася біля носа судна в стані божевільного руху, потім раптово залишила його позаду і покотилася вперед з дуже великою швидкістю, прийнявши форму великого одинокого підвищення, тобто водяного пагорба, який продовжував свій шлях вздовж каналу, не змінюючи своєї форми та не знижуючи швидкості”. Нині солітони відкриті у багатьох середовищах – в магнетиках, надпровідниках, живих системах, атмосферах Землі та планет. Досить ймовірно, що солітони мали важливе значення для процесу еволюції Всесвіту. Хромодинаміка, сучасна теорія елементарних частинок, передбачає появу (поки що не відкритих експериментально) солітонів, які можуть нести магнітний заряд. Таким чином, справедливим є твердження, що наука про солітони інтенсивно розвивається в останні роки.

Таблиця 6.3. Порівняння властивостей автохвиль в активних середовищах, хвиль у пасивних середовищах і солітонів

Властивість	Автохвилі в активних середовищах	Лінійні хвилі у пасивних середовищах	Солітони в консервативному нелінійному середовищі
1. Дисипація (втрата) енергії	Велика	Мала	Немає
2. Компенсація втрат енергії	Спостерігається	Немає	Немає
3. Збереження швидкості	Спостерігається	Немає	Спостерігається
4. Принцип суперпозиції	Немає	Спостерігається	Немає
5. Анігіляція при зіткненні	Спостерігається	Немає (в загальному випадку)	Немає
6. Інтерференція	Немає	Спостерігається	Немає
7. Дифракція	Спостерігається	Спостерігається	Спостерігається
8. Відбивання	Немає	Спостерігається	Спостерігається

Зрозуміло, що методи синергетики повинні добре працювати у випадках, коли йдеться саме про кооперативну поведінку систем різної природи з утворенням впорядкованих структур. Нижче ми розглянемо приклади застосування синергетичних методів до деяких соціальних і політичних процесів.

Насамперед постає питання: чи можливо взагалі сподіватися на успіх при застосуванні подібних методів до об'єктів, які складаються з великої сукупності індивідуумів? Справді, поведінка окремого індивіда в складних ситуаціях, як правило, непередбачена, вона визначається дуже великою кількістю часто випадкових факторів. Тому зрозуміло, що скоріш за все неможливо створити детерміновану математичну модель такої поведінки окремої людини. Разом з тим, очевидно, можна сподіватися на досить точне передбачення середньостатистичної поведінки окремого представника даної соціальної групи. Саме в цьому випадку, тобто на рівні статистичних закономірностей, стають корисними математичні методи, що спираються на досягнення сучасної синергетики.

Спочатку зупинимося на застосуванні методів синергетики до соціології, зокрема на процесі формування громадської думки. Розглянемо приклад, який пов'язаний з цим процесом і відомий як експеримент С. Еша. Нехай людині показують кілька предметів різної довжини (рис. 6.6).

Питання, на яке треба дати відповідь, таке: "Як співвідносяться між собою довжини першого і останнього відрізків?" Як виявляється і це цілком зрозуміло, відповідь залежить від того, чи відомі людині результати попереднього опитування. Так, наприклад, якщо в результаті попереднього опитування 60% опитуваних відповіли, що останній відрізок довший за перший, то людина з більшою ймовірністю підтвер-

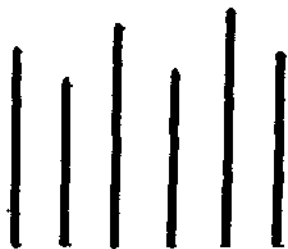


Рис. 6.6. Експеримент С. Еша (з книги Г. Хакена "Синергетика. Ієрархія неустойчивостей в самоорганізуючихся системах і устроях")

дити цей висновок. Насправді, обидва відрізки мають однакові довжини.

Іншим цікавим прикладом подібної зміни точки зору є особливості процесу зорового сприйняття, що називаються ефектом гістерезису (рис. 6.7) та ефектом порушеної симетрії (рис. 6.8). В першому випадку зорове сприйняття об'єкта залежить від напрямку, в якому розглядається цей рисунок, тоді як в другому результат залежить від того, на чому фокусується увага – на центральній білій частині рисунка, де чітко видно вазу, або на бокових чорних частинах, де видно два обличчя.



Рис. 6.7. Ефект гістерезису (з книги Г. Хакена "Синергетика")

Універсальні методи термодинаміки та синергетики можуть бути успішно застосовані і до вивчення політичних процесів, зокрема проблеми стійкості політичних систем. Цікаві результати в цьому напрямку були отримані визначним українським фізиком і політичним діячем І.Р. Юхновським. Як вже вказувалося раніше, мірою впорядкованості будь-якої системи, в тому числі і політичної, є притаманна їй ентропія S

(або негентропія N). Чим менша величина ентропії S (або чим вище значення негентропії N , оскільки негентропія дорівнює ентропії з протилежним знаком: $N = -S$), тим більш впорядкованою є система. Таким чином, переходу від менш досконалої до більш досконалої політичної системи відповідає зменшення ентропії або збільшення негентропії.

Стійкість будь-якої політичної системи визначається режимом її функціонування. І. Р. Юхновський

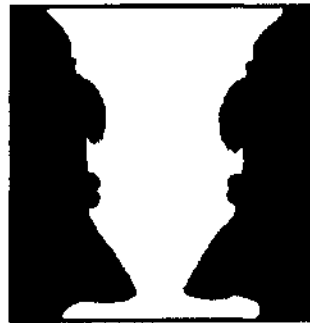


Рис. 6.8. Ефект порушеної симетрії (з книги Г. Хакена "Синергетика")

пропонує розглянути такі два граничних режими функціонування політичних систем:

1. Політична система є *відкритою* в термодинамічному розумінні цього терміну. Це означає, що система вільно обмінюється з навколишнім середовищем всім, чим можна обмінюватись – насамперед енергією, ентропією (негентропією) та інформацією.

Тут слід зауважити, що: а) ентропія й інформація визначаються однаковою чином; б) ентропія та інформація не можуть бути зведені до енергії.

Щоб краще зрозуміти останнє твердження, досить пригадати відомий приклад з киданням двох монет з однакою висоти. Нехай обидві монети однакові за інформацією, що в них міститься: на них, з одного боку, викарбований один і той самий герб, а на другому боці – однакова цифра. Проте вони мають зовсім різні маси. Тоді, коли ми їх одночасно кидаємо з однакою висоти, виділяється, звичайно, зовсім різна енергія, оскільки маси монет є різними (нагадаємо, що ця енергія дорівнює добутку маси на прискорення вільного падіння і на висоту). Що стосується інформації, яка отримується під час кидання цих монет, то вона є абсолютно однаковою і дорівнює 1 біту, оскільки реалізується один варіант з двох можливих (герб або цифра), тобто 0 або 1.

2. Політична система існує в режимі, *ізолюваному* від зовнішнього середовища. Звичайно, не існує абсолютно ізолюваних політичних і соціальних систем. Але є приклади, коли реальні системи існували в стані, який можна вважати досить наближеним до ізолюваного стану (наприклад, колишній СРСР). Фізично стан подібної ізоляції відповідає адіабатичній ситуації, коли не відбувається теплообміну системи з навколишнім середовищем. Тоді, як впливає з першого закону термодинаміки (див. формулу (6.1)), будь-яка робота виконується за рахунок внутрішньої енергії системи. Це обов'язково призводить до зростання ентропії (чи зменшення негентропії), тобто до зменшення впорядкованого стану системи і, врешті-решт, до її деградації. Загальні перші принципи природи і суспільства, зокрема другий закон термодинаміки, дають змогу підтвердити

цей важливий висновок щодо функціонування політичної системи, яка є ізолюваною, а саме: *абсолютно детермінований шлях до розпаду (тобто такий процес, який відбувається з ймовірністю, що дорівнює одиниці) є характерною рисою еволюції всіх ізолюваних систем будь-якої природи.*

Ще один дуже цікавий напрям досліджень, який має принципове значення для різних галузей знань і описує стрибкоподібні зміни поведінки систем різноманітної природи – це сучасна *теорія катастроф*. Розглянемо її основні принципи та ідеї.

У 1972 році в Нью-Йорку вийшла з друку давно анонсована до цього книга французького математика-тополога Р. Тома "Структурна стійкість і морфогенез". Вже сама назва цієї книги вказувала на її достатньо універсальний характер. Дійсно, Р. Том поставив перед собою задачу створення такого варіанта математичної теорії динамічних (еволюційних) систем, який був би придатним для біології та інших галузей науки, досить далеких від математики і який в цьому сенсі не є настільки точним, як фізика, хімія і ряд інших наук. Основна ідея Р. Тома полягала в тому, щоб застосувати теорію динамічних систем з класифікацією особливих точок за А. Пуанкаре для аналізу як структурно-стійких станів, нечутливих до малих збурень (змін параметрів системи), так і різких (розривних) змін станів системи при плавній зміні параметрів, які називаються *катастрофами*.

По своїй суті знаходження особливих точок за методом А. Пуанкаре зводиться до відшукування стаціонарних, тобто тих, що не залежать від часу, розв'язків системи диференціальних рівнянь для параметрів порядку, які визначають поведінку досліджуваного об'єкта. Особливі точки знаходяться згідно з розв'язком відповідної системи диференціальних рівнянь стосовно так званих збурень по відношенню до стаціонарних розв'язків. Залежно від знака дійсної (Re) та уявної частини (Im) коренів λ характеристичного рівняння особливі точки поділяються на стійкі та нестійкі вузли і фокуси, сідла та центри або граничні цикли (табл. 6.4).

Таблиця 6.4. Типи особливих точок (класифікація Пуанкаре)

Тип особливої точки	Значення коренів	
	Дійсна частина	Уявна частина
Стійкий вузол	$\text{Re } \lambda_1 < 0$ $\text{Re } \lambda_2 < 0$	$\text{Im } \lambda_1 = 0$ $\text{Im } \lambda_2 = 0$
Нестійкий вузол	$\text{Re } \lambda_1 > 0$ $\text{Re } \lambda_2 > 0$	$\text{Im } \lambda_1 = 0$ $\text{Im } \lambda_2 = 0$
Сідло	$\text{Re } \lambda_1 < 0$ $\text{Re } \lambda_2 > 0$	$\text{Im } \lambda_1 = 0$ $\text{Im } \lambda_2 = 0$
Стійкий фокус	$\text{Re } \lambda_1 < 0$ $\text{Re } \lambda_2 < 0$	$\text{Im } \lambda_1 \neq 0$ $\text{Im } \lambda_2 \neq 0$
Нестійкий фокус	$\text{Re } \lambda_1 > 0$ $\text{Re } \lambda_2 > 0$	$\text{Im } \lambda_1 \neq 0$ $\text{Im } \lambda_2 \neq 0$
Центр (граничний цикл)	$\text{Re } \lambda_1 = 0$ $\text{Re } \lambda_2 = 0$	$\text{Im } \lambda_1 \neq 0$ $\text{Im } \lambda_2 \neq 0$

Рис. 6.9 ілюструє можливі види особливих точок для динамічних систем з двома параметрами порядку згідно з класифікацією А. Пуанкаре. Як бачимо з відповідних фазових портретів системи, для *стійкого вузла* характерний рух точки, що зображує динамічну еволюцію системи, до стаціонарного стану (особливої точки) як по першому, так і по другому параметру порядку. У разі *нестійкого вузла* система віддаляється від особливої точки по обох параметрах порядку. Якщо корені характеристичного рівняння мають різні знаки, тобто особлива точка – *сідло*, то така особлива точка є теж нестійкою, але лише по одному з параметрів порядку.

Якщо для стійкого і нестійкого вузлів та сідла характерна неперіодична поведінка, то для всіх інших особливих точок притаманна періодична (коливальна) поведінка динамічної системи. Для *стійкого фокуса* фазовий портрет зображується у вигляді спіралі, що накручується на особливу точку – це відповідає затухаючим коливанням в часі для обох параметрів порядку систем. Для *нестійкого фокуса* спостерігається зворотна ситуація – спіраль розкручується, що відповідає коливанням параметрів порядку, амплітуда яких зростає з часом. І нарешті, в

останньому випадку *центра (граничного циклу)* в системі відбуваються незатухаючі коливання (автоколивання) параметрів порядку.

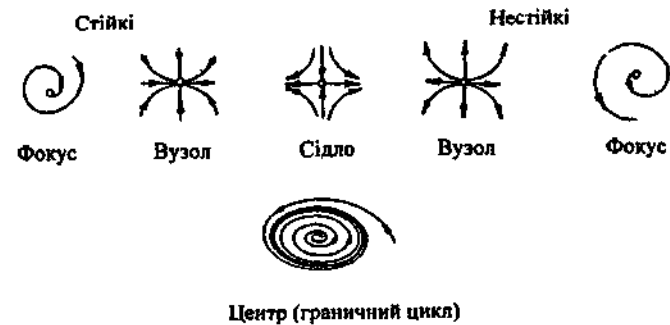


Рис. 6.9. Фазові портрети можливих видів особливих точок

Зауважимо, що стійкі та нестійкі вузли та фокуси, а також сідла характеризують “*грубі*” системи, тоді як граничний цикл (центр) – “*негрубі*”. Поняття “*груба*” і “*негруба*” системи були вперше введені завдяки дослідженням нелінійних динамічних систем, які були виконані визначним математиком О.О. Андроном та його учнями. Під “*грубою*” системою мається на увазі така система, яка знаходиться поблизу свого рівноважного стану і яка не може бути виведена зі стану рівноваги при зміні параметрів. Очевидно, що “*негруба*” система легко виводиться за рахунок незначної зміни параметрів зі свого стану рівноваги, який є нестійким. Зрозуміло, що чисто математичне (точніше сказати – топологічне) поняття “*грубості*” і “*негрубості*” має надзвичайно широке застосування в психології, економіці, політиці та інших областях під час вивчення стійкості цих систем.

Повертаючись до теорії катастроф Р. Тома, можна сказати, що вона становить сучасний розвиток теорії стійкості динамічних систем А. М. Ляпунова (поняття стійкості взагалі є дуже важливою характеристикою динамічної системи) і теорії особливостей Х. Уїтні, які узагальнюють собою відомі в класичному математичному аналізі дослідження на екстремум. Недарма створення теорії катастроф порівнювалося в 70-х роках – роках

її виникнення – з переворотом в математиці, пов'язаним зі створенням І. Ньютоном і Г.-В. Лейбніцем диференціального і інтегрального числень.

Дослідження з нелінійної динаміки мали дуже великий вплив на формування основних ідей і принципів теорії катастроф. Так, значним результатом цих досліджень став суттєвий розвиток уявлень про *біфуркації* (термін “біфуркація” буквально означає “роздвоєння”), тобто про якісні перебудови динамічних систем.

Нові важливі результати в теорії біфуркацій належать визначному російському математику В. І. Арнольду, який незалежно від Р. Тома довів деякі принципові теореми в теорії катастроф. Р. Том, який вважається автором теорії катастроф, віддає пріоритет у винаході терміну “теорія катастроф” англійському математику – топологу К. Зіману. Саме К. Зіману присвятили свою прекрасну монографію “Теорія катастроф та її застосування” Т. Постон і І. Стюарт, написавши в передмові: “Кристоферу Зіману, біля ніг якого ми сидимо, на плечах якого ми стоїмо”. Дивним є той факт, що математик К. Зіман придумав так звану “машину катастроф” – досить простий пристрій, який легко може бути виготовлений і який дає змогу дуже наочно спостерігати різкі зміни поведінки машини при незначній варіації параметрів. Опис “машини катастроф” можна знайти у чудовій, невеличкій за об'ємом книзі В. І. Арнольда “Теорія катастроф”, в якій подається, з одного боку, науково-популярне, а з іншого – дуже глибоке і витончене викладення основних принципів теорії катастроф.

Представляють інтерес висловлені В. І. Арнольдом загальні міркування з погляду теорії катастроф щодо тенденцій (“принципів”) переходу до “кращого стану” системи довільної природи (фізичної, хімічної, біологічної, соціальної, політичної тощо).

1. *“Принцип тендітності гарного (стійкого)”*: система, що знаходиться на границі стійкості, з більшою ймовірністю переходить в нестійкий стан. Це пов'язано з досить зрозумілим з інтуїтивного погляду правилом: “гарні” (зокрема, стійкі) системи повинні задовольняти кільком (інколи багатьом) вимогам, тоді як

“погані” можуть мати хоча б один недолік, тобто між “гарними” і “поганими” системами в цьому сенсі відсутня симетрія.

2. *“Принцип погіршення на шляху до кращого”*: в процесі послідовної еволюції системи до кращого стійкого стану з поганого нестійкого відбувається погіршення, до того ж на початковій стадії процесу переходу до кращого стану швидкість погіршення зростає. Максимум протидії на шляху до кращого реалізується до досягнення найгіршого стану. Далі в цьому самому поганому стані протидія зменшується і може повністю зникнути, коли система знаходиться вже достатньо близько до кращого стану.

3. *“Принцип стрибкоподібного покращання”*: якщо система стрибком, а не в процесі поступової еволюції, проскакує найгірший стан і опиняється поблизу гарного, то далі вона самодовільно рухається в бік цього гарного стану.

4. *“Принцип еволюції до катастрофи”*: нехтування основними законами природи і суспільства, які спираються на ефекти зворотного зв'язку (в суспільному житті та політиці – це, насамперед, відсутність особистої відповідальності за прийняті рішення), веде до катастрофи.

Таким чином, підводячи підсумок короткого огляду сучасних синергетичних процесів у природничих та суспільних науках, можна сказати, що *значення синергетики для освіти і науки пов'язане з інтеграцією знань з різних дисциплін, посиленням міжпредметних зв'язків, використанням цього нового міждисциплінарного напрямку для глибокого розуміння єдності законів природи і суспільства, а отже, розвитку особистості як кінцевої мети всієї освітньої діяльності.*

6.4. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ У СКЛАДНИХ МЕДИКО-БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМАХ

Звернемося спочатку до якісного аналізу динамічної системи, що описується двома нелінійними диференціальними рівняннями довільного вигляду

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y); \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned}\quad (6.19)$$

Дослідимо стійкість стаціонарного стану такої системи, застосовуючи метод малих збурень і лінеаризації диференціальних рівнянь. Для цієї мети представимо розв'язок у вигляді такої суми стаціонарних значень змінних x_0, y_0 і малих збурень ζ, η :

$$x = x_0 + \zeta, \quad y = y_0 + \eta.$$

Лінеаризуючи систему диференціальних рівнянь, тобто залишаючи лише ті доданки, що містять перші степені малих збурень ζ, η , отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dt} &= P(x_0 + \zeta, y_0 + \eta) = a\zeta + b\eta; \\ \frac{d\eta}{dt} &= Q(x_0 + \zeta, y_0 + \eta) = c\zeta + d\eta,\end{aligned}\quad (6.20)$$

де коефіцієнти a, b, c, d пов'язані з похідними

$$a = P'_x(x_0, y_0); \quad b = P'_y(x_0, y_0); \quad c = Q'_x(x_0, y_0); \quad d = Q'_y(x_0, y_0).$$

Важливе значення в якісному аналізі поведінки динамічних систем відіграє часова еволюція послідовних станів досліджуваної системи у вигляді траєкторії руху зображуваної точки у фазовому просторі x, y . Така траєкторія називається **фазовим портретом**, або **фазовою кривою** системи. Залежно від вигляду фазового портрета динамічні системи поділяються, як вже вказувалося раніше, на грубі та негрубі. "Грубі" системи – це системи, характер траєкторії яких у фазовому просторі зберігається при малих змінах похідних a, b, c, d . "Негрубі" системи – це такі, траєкторії яких відчуюють достатньо різкі якісні зміни при малих варіаціях параметрів a, b, c, d .

Будемо шукати загальний розв'язок досліджуваної динамічної системи поблизу її стаціонарного стану у вигляді

$$\zeta = A \exp(\lambda t), \quad \eta = B \exp(\lambda t).$$

Тоді

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dt} &= \lambda\zeta = aA e^{\lambda t} + bB e^{\lambda t}; \\ \frac{d\eta}{dt} &= \lambda\eta = cA e^{\lambda t} + dB e^{\lambda t},\end{aligned}$$

звідки маємо

$$\lambda A = aA + bB, \quad \lambda B = cA + dB.$$

Ненульовий розв'язок цієї алгебраїчної системи рівнянь щодо коефіцієнтів A і B спостерігається лише за умови, що головний визначник рівний нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

або $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$.

Звідси для коренів цього рівняння, яке називається характеристичним, маємо

$$\lambda_{1,2} = [(a + d)/2] \pm \{[(a + d)/4] - (ad - bc)\}^{1/2}.$$

Якщо корені не є кратними, то розв'язок системи може бути подано у такому вигляді:

$$\begin{aligned}\zeta &= C_{11} e^{\lambda_1 t} + C_{12} e^{\lambda_2 t}; \\ \eta &= C_{21} e^{\lambda_1 t} + C_{22} e^{\lambda_2 t}.\end{aligned}$$

Нехай корені λ_1, λ_2 – дійсні. Тоді особливі точки у відповідності з класифікацією Пуанкаре (див. табл. 6.4) являють собою вузли або сідла, а саме:

а) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ – **стійкий вузол**;

б) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ – **нестійкий вузол**;

в) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ або $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ – особлива нестійка точка, яка називається "**сідлом**";

г) якщо λ_1, λ_2 – комплексно-спряжені величини, тоді у системі відбуваються коливання; особлива точка – **фокус**, причому якщо $\text{Re}\lambda_{1,2} < 0$ – **стійкий фокус**, якщо $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0$ – **нестійкий фокус**.

д) якщо $\text{Re}\lambda = 0$, то у системі відбуваються незатухаючі коливання; особлива точка – **центр** або **граничний цикл**. Зауважимо, що стійкий і нестійкий вузли, стійкий і нестійкий

фокуси, а також сідла характеризують “грубі” системи, тоді як граничний цикл (центр) – “негрубі”.

Як вже зазначалося, поблизу критичних (біфуркаційних) точок малі зміни зовнішніх параметрів можуть спонукати до якісних перебудов (біфуркацій) фазових портретів досліджуваних систем.

Розглянемо найбільш типові біфуркації:

1. Біфуркація з одного вузла (фокуса) в два вузли (фокуса).

За певних умов розв'язки, що відповідають стійкому вузлу (фокусу), можуть стати нестійкими і відбувається перехід у два нових стійких вузли. При відмінній від нуля уявній частині коренів характеристичного рівняння вузли перетворюються, очевидно, в фокуси.

2. Біфуркація Хопфа із фокуса в граничний цикл. Для цього випадку, вивченого вперше Хопфом, корені характеристичного рівняння є комплексно-спряженими числами

$$\lambda_1 = \text{Re}\lambda_1 + i \text{Im}\lambda_1, \lambda_2 = \text{Re}\lambda_2 - i \text{Im}\lambda_2.$$

При $\text{Re}\lambda \rightarrow 0$ корені наближаються до уявної вісі. У результаті первинно стійкий фокус перетворюється у граничний цикл, тобто у системі виникають періодичні в часі коливання.

3. Біфуркації граничного циклу. При подальшій зміні керуючих параметрів можуть відбутися нові перебудови фазових траєкторій системи, при яких можливі такі біфуркації: а) старий граничний цикл переходить в новий один або більше граничних циклів у одній і тій самій площині; б) старий двовимірний граничний цикл переходить у тривимірний граничний цикл, до того ж у випадку незамкнених траєкторій виникає рух зображуючої точки по поверхні тора; в) старий граничний цикл з періодом T_1 переходить у новий, рухаючись по якому система повертається у початковий стан за час $T_2 = 2T_1$ (біфуркація подвоєння періоду).

4. Дивні аттрактори. При зміні керуючих параметрів фазова траєкторія, що являє собою рух по тору, може стати нестійкою і хаотичною. У цьому випадку, який отримав назву дивного аттрактора, траєкторії руху зображуючої точки у фазовій площині стають недетермінованими (рис. 6.10). Якщо для

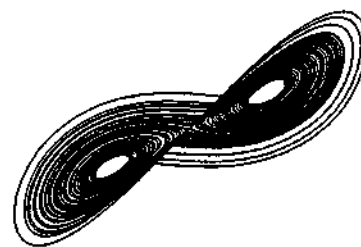


Рис. 6.10. Фазовий портрет дивного аттрактора

простих аттракторів (стійких особливих точок і граничних циклів) усі фазові траєкторії стягуються у близьке оточення цих точок або граничного циклу, то для дивного аттрактора усі фазові траєкторії розбігаються і хаотично переміщуються, залишаючись в області тяжіння дивного аттрактора.

Зручним методом аналізу стійкості фазових траєкторій є дослідження так званих *показників Ляпунова*. Не вдаючись у достатньо тонкі і складні математичні деталі, показники Ляпунова можна визначити як узагальнення показника степені у виразі для експоненціального в часі розв'язку $\delta x(t)$, який характеризує диференціальне рівняння першого порядку довільного вигляду, а саме:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \delta x(t)}{t}.$$

Кількість показників Ляпунова не повинна перевищувати розмірність простору, в якому задана шукана величина $\delta x(t)$. Тоді виявляється можливим сформулювати такі критерії для простих і дивних аттракторів у термінах показників Ляпунова (розглянемо для визначення тривимірний випадок):

а) якщо всі три показники Ляпунова від'ємні, то аттрактор – стійкий фокус;

б) якщо два показники від'ємні, а третій рівний нулю, то аттрактор – граничний цикл;

в) якщо один показник від'ємний, а два інші дорівнюють нулю, то аттрактор – стійкий тор;

г) якщо один з показників Ляпунова виявляється додатнім, то стає можливим хаотичний рух зображуючої точки. Так, при $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$ виникає дивний (хаотичний) аттрактор, до того ж фазові сусідні траєкторії швидко розходяться при незначній зміні початкових умов. Одним з перших прикладів

дивного аттрактора стала гідродинамічна (метеорологічна) модель Лоренца, розв'язки якої виявили хаотичне розбігання фазових траєкторій в силу ефектів турбулентності і неточності завдання початкових умов. Зауважимо, що при $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ або при $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 = 0$ фазові портрети системи є відповідно нестійкий тор або нестійкий граничний цикл, які не є аттракторами.

Для встановлення універсальних закономірностей в самоорганізованих системах, які мають різні геометричні розміри, розуміння ролі їх спонтанного ускладнення, наявності в них просторово корельованих областей широко залучаються методи кінетичних моделей, які були покладені в основу сучасної теорії дисипативних структур (І. Р. Пригожин, Г. Ніколіс, П. Гленсдорф та ін.).

В якості конкретного прикладу кінетичної моделі розглянемо відому модель "хижак-жертва", яку запропонували А. Лотка і В. Вольтера. Система нелінійних диференціальних рівнянь цієї моделі має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon_1 x - \gamma_1 xy; \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma_2 xy - \varepsilon_2 y. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Перше рівняння описує динаміку чисельності першого типу тварин – "жертв" (наприклад, зайців), які живляться рослинами. Перший доданок у правій частині цього рівняння описує природне розмноження жертв, тоді як другий – їх зменшення від зустрічей з "хижаками" (наприклад, рисями). Друге рівняння характеризує динаміку зміни чисельності хижаків: перший доданок у правій частині задає збільшення хижаків, які живляться жертвами, а другий – природне зменшення жертв при відсутності цієї їжі.

Проведемо аналіз моделі "хижак-жертва". Стационарний розв'язок моделі визначається з такої системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 x_0 - \gamma_1 x_0 y_0 &= 0, & y_0 &= \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}; \\ -\varepsilon_2 y_0 + \gamma_2 x_0 y_0 &= 0, & x_0 &= \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Лінеаризація рівнянь системи (6.21) поблизу стаціонарного розв'язку дає

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= \varepsilon_1(x_0 + \zeta) - \gamma_1(x_0 + \zeta)(y_0 + \eta) = -\varepsilon_2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \eta; \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\varepsilon_2(y_0 + \eta) + \gamma_2(x_0 + \zeta)(y_0 + \eta) = \varepsilon_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \zeta. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Шукаючи розв'язок цієї системи у вигляді

$$\zeta = A \exp(\lambda t), \quad \eta = B \exp(\lambda t), \quad (6.24)$$

отримуємо таке характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \varepsilon_2 \gamma_1 / \gamma_2 \\ -\varepsilon_1 \gamma_2 / \gamma_1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\lambda^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0,$$

звідки отримуємо шукані корені

$$\lambda_{1,2} = \pm i (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{1/2}. \quad (6.25)$$

Таким чином, відповідно до класифікації особливих точок по А. Пуанкаре отримана особлива точка в моделі "хижак-жертва" є центр (або граничний цикл). Фазові криві становлять замкнуті траєкторії.

Оскільки для малих збурень $\zeta(t)$ і $\eta(t)$ виконуються співвідношення вигляду

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= C_{11} e^{i\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} t} + C_{12} e^{-i\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} t}; \\ \eta(t) &= C_{21} e^{i\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} t} + C_{22} e^{-i\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} t}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

то цей результат відображає те, що ми спостерігаємо в реальних умовах, тобто експериментально, а саме: періодичну зміну чисельності популяцій хижаків і жертв (рис. 6.11).

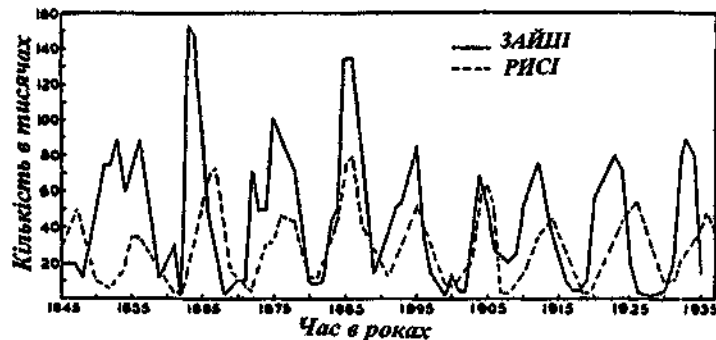


Рис. 6.11. Періодична зміна чисельності популяції в екологічній системі "хижак (рисі) – жертва (зайці)" за даними мисливської компанії "Хадсон-Бей" (з книги Г. Хакена "Синергетика")

Недолік розглянутої вище моделі Лотка–Вольтерра – її "негрубість". Іншими словами, випадкові зміни чисельності одного з видів змінюють амплітуди коливань кожного виду. В реальності такого не спостерігається. Покращання моделі Лотка–Вольтерра пов'язане з врахуванням самообмежень в зростанні чисельності обох популяцій, що описується введенням останніх (третьох) доданків у рівняння такої моделі:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon_1 x - \gamma_{12} xy - \gamma_{11} x^2; \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon_2 y + \gamma_{21} xy - \gamma_{22} y^2. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Дослідження особливих точок для такої покращаної моделі показує, що коли при $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 0$ особлива точка становить центр або граничний цикл (негруба система), то при $\gamma_{11} \neq 0$, $\gamma_{22} \neq 0$ особлива точка є вже стійкий фокус або стійкий вузол, тобто система стає грубою.

Ще одним популярним прикладом кінетичних моделей процесів самоорганізації, як вже відзначалося, є модель "брюсселятора" (Пригожин, Ніколіс, Лефевр), яка описує хімічний

автокаталітичний процес. Близька до "брюсселятора" кінетична модель "орегонатора" була запропонована і досліджена Філдом і Ноейсом. Зокрема, модель "орегонатора" описує автохвильові процеси, які виникають в періодичній окислюваль-но-відновній реакції Белоусова–Жаботинського.

6.5. ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ "ТЕРМОДИНАМІКА ВІДКРИТИХ БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ"

Мета заняття:

1. Вивчити основні положення термодинаміки відкритих біологічних систем, що обмінюються речовиною та енергією з навколишнім середовищем.
2. Навчитися застосовувати термодинамічні методи для дослідження відкритих медико-біологічних систем.

Теоретичні питання, що розглядаються на практичному занятті

1. Термодинамічний метод вивчення медико-біологічних систем.
2. Термодинаміка рівноважних ізольованих систем.
3. Перший та другий закони (начала) термодинаміки.
4. Ентропія, зв'язок ентропії з термодинамічною ймовірністю (принцип Больцмана).
5. Термодинамічні потенціали.
6. Термодинаміка відкритих систем поблизу положення рівноваги.
 - 6.1. Лінійний закон для потоків і термодинамічних сил.
 - 6.2. Перехресні процеси переносу, принцип симетрії кінетичних коефіцієнтів.
 - 6.3. Виробництво ентропії.
 - 6.4. Спряження потоків.
 - 6.5. Стаціонарний стан відкритих систем, теорема Пригожина.
7. Термодинаміка відкритих систем, далеких від положення рівноваги. Процеси впорядкування в системах різної природи. Поняття про синергетику.

Додаткова література

1. Біофізика / Под ред. Ю.А. Владимірова – М.: Медицина, 1983.
2. Ремізов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996.

3. Хакен Г. Синергетика. – М.: Мир, 1980.
4. Чалый А.В. Неравновесные процессы в физике и биологии. – К.: Наукова думка, 1997.
5. Чалый О.В. Синергетичні принципи освіти та науки. – К.: Випол, 2000.

Завдання для самостійної роботи і перевірки кінцевого рівня знань

Після вивчення теоретичного матеріалу слід ознайомитись з еталонами розв'язку задач і виконати завдання для перевірки кінцевого рівня знань.

Типові задачі з еталонами розв'язків

Задача 1

Маємо 2 молекули в об'ємі, який розділений напівпроникною перегородкою. Намалювати можливі конфігурації в цій системі. Знайти: а) число мікростанів, тобто термодинамічну ймовірність; б) ентропію; в) ймовірність (частоту появи) кожної з конфігурацій.

Розв'язок

Можливі конфігурації для системи з 2 молекул в заданому об'ємі представлені на рис. 6.12.

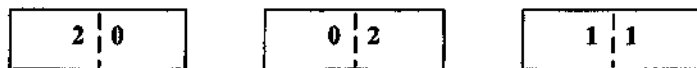


Рис.

6.12. Можливі конфігурації для молекул а і б в об'ємі з напівпроникною перегородкою

Число мікростанів (термодинамічна ймовірність) дорівнює

– для першої конфігурації $W_1 = 1$;

– для другої конфігурації $W_2 = 1$;

– для третьої конфігурації $W_3 = 2$.

Ентропія кожної з конфігурацій дорівнює

$$S_1 = S_2 = k \ln 1 = 0, S_3 = k \ln 2 = 9,57 \cdot 10^{-24} \text{ Дж / К.}$$

Ймовірність (частота появи) кожної з конфігурацій дорівнює

$$P_1 = P_2 = 1/4, P_3 = 1/2.$$

Задача 2

Узагальнити закон Ома в диференціальній формі на випадок, коли в системі є ще й градієнт концентрації числа частинок.

Розв'язок

Закон Ома в диференціальній формі має вигляд $j = \gamma E$, де j – густина електричного струму; γ – коефіцієнт електропровідності; E – напруженість електричного поля.

Оскільки напруженість зв'язана відомим співвідношенням з градієнтом потенціалу електричного поля $E = -\nabla\varphi$, то закон Ома набуває такого вигляду: $j = -\gamma \nabla\varphi$.

Згідно з лінійним законом термодинаміки необернених процесів, в присутності градієнта концентрації числа частинок ∇c маємо таке узагальнення закону Ома в диференціальній формі:

$$j = -\gamma \nabla\varphi + L_{12} \nabla c,$$

де L_{12} – кінетичний коефіцієнт, що відповідає за перехресний процес появи додаткового внеску в електричний струм за рахунок градієнта концентрації числа частинок.

Завдання для перевірки кінцевого рівня знань

1. Записати зміну ентальпії через зміну внутрішньої енергії, об'єму і тиску. Розглянути окремий випадок ізобарної системи.
2. Записати зміну вільної енергії Гіббса через зміну ентальпії, температури і ентропії. Розглянути окремий випадок ізотермічної системи.
3. В об'ємі, що розділений напівпроникною перегородкою, знаходиться $N = 3$ молекули. Знайти число мікростанів (термодинамічну ймовірність) і ймовірність (частоту появи) кожної з конфігурацій.
4. Знайти ентропію кожної з конфігурацій для задачі 3.
5. В об'ємі, що розділений напівпроникною перегородкою, знаходиться $N = 4$ молекули. Знайти число мікростанів (термодинамічну ймовірність) і ймовірність (частоту появи) кожної з конфігурацій.
6. Знайти ентропію кожної з конфігурацій для задачі 5.
7. В об'ємі, що розділений напівпроникною перегородкою, знаходиться $N = 5$ молекули. Знайти число мікростанів (термодинамічну ймовірність) і ймовірність (частоту появи) кожної з конфігурацій.
8. Знайти ентропію кожної з конфігурацій для задачі 7.

9. Написати вираз для потоку частинок при наявності різниці концентрації і температури. Розглянути окремий випадок відсутності потоку частинок у такій системі.
10. Написати вираз для потоку частинок при наявності різниці концентрації і тиску. Розглянути окремий випадок відсутності потоку частинок у такій системі.
11. У системі є два градієнти (температури і концентрації) і два потоки (частинок і тепла). Записати відповідні лінійні закони і принцип симетрії кінетичних коефіцієнтів для такої системи.
12. Записати у загальному вигляді лінійний закон для густини електричного струму через мембрану. Взяти до уваги, що з обох сторін мембрани різні концентрації і потенціали електричного поля.

РОЗДІЛ 7. ОПТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕДИКО-БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ

*“А если это так, то что есть красота,
И почему её обожествляют люди?
Сосуд она, в котором пустота.
Или огонь, мерцающий в сосуде.”*

М. Заболоцький

Оптичні методи знаходять дуже широке використання в теоретичній і практичній медицині. Мікроскопи, рефрактометри, поляриметри, нефелометри, концентраційні колориметри, спектрофотометри, лазери – це далеко не повний перелік оптичних приладів, що застосовуються в клініках, санітарно-епідеміологічних станціях, лабораторіях медико-біологічного профілю.

В широкому розумінні *оптика* – це наука про світло та його взаємодію з речовиною. Оптика вивчає не тільки видиму частину спектра електромагнітних хвиль ($\lambda \approx 400 \text{ нм} - 760 \text{ нм}$), тобто світло у вузькому значенні цього терміну, але й більш короткі електромагнітні хвилі – ультрафіолетове випромінювання ($\lambda \approx 10 \text{ нм} - 400 \text{ нм}$) та більш довгі електромагнітні хвилі – інфрачервоне випромінювання ($\lambda \approx 760 \text{ нм} - 1-2 \text{ мм}$). Інколи до оптичного випромінювання відносять навіть м'яке рентгенівське випромінювання ($\lambda \approx 0,2 \text{ нм} - 80 \text{ нм}$) та радіохвилі міліметрового діапазону.

Оптику умовно поділяють на геометричну, фізичну та фізіологічну.

Геометрична оптика вивчає закони поширення світла з урахуванням відбивання і заломлення світлових пучків на межах різних середовищ, пояснює умови формування оптичних зображень і нехтує такими поняттями, як довжина електромагнітної хвилі і відповідно явищами інтерференції, дифракції, дисперсії.

Фізична оптика, що вивчає природу світла та світлових явищ, у свою чергу, поділяється на окремі розділи: *хвильова оптика*, яка досліджує такі явища, як інтерференція, дифракція,

дисперсія та інші, де проявляється хвильова (електромагнітна) природа світла; *квантова оптика*, яка вивчає явища, в яких проявляється квантова природа світла та нелінійний характер взаємодії оптичного (зокрема, лазерного) випромінювання з речовиною; такі розділи фізичної оптики, як *кристалооптика*, *металооптика*, *оптоелектроніка*, *магнітооптика*, *електрооптика* тощо.

Фізіологічна оптика має своїм предметом дослідження зорового сприйняття (саме ця мета найкраще відповідає семантиці грецького терміну *оптиху* – наука про зір). Фізіологічна оптика вивчає роботу зорового аналізатора від процесів, що відбуваються в сітківці ока, до процесів формування зорових зображень в головному мозку.

Різноманітні зв'язки між природними явищами створюють внутрішню красу науки, пізнання якої є велика насолода для кожної людини, особливо для її творців. Водночас розвиток науки завжди проходив і проходить через “проби та помилки”. Нільс Бор сказав якось, що спеціаліст – це той, хто знає типові помилки своєї професії і вміє їх уникнути. Оптика (може, як жодний з інших розділів фізичної науки) наводить дуже багато прикладів людських драм та щасливих осяянь вчених, що її створили.

Якщо у когось з студентів-медиків можуть виникнути сумніви щодо необхідності вивчення оптичних явищ, досить згадати велику кількість оптичних приладів, що використовуються в медицині і які згадувалися вище. Без цих приладів, так само як і без розуміння досить складних процесів, що відбуваються в біологічних об'єктах під дією оптичного випромінювання, неможлива плідна робота сучасного лікаря.

Один з творців операційного числення (є в математиці такий розділ, за допомогою якого можна розв'язувати диференціальні рівняння, переводячи їх з “простору оригіналів”, де вони задані, у так званий “простір зображень”, де ці рівняння стають алгебраїчними) Хевісайд говорив: “Чи стану я відмовлятися від свого обіду тільки тому, що я не повністю розумію процес травлення?”. Нехай ця фраза надихне шановних читачів на

уважне вивчення цього розділу, присвяченого оптичним методам дослідження медико-біологічних систем.

7.1. ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА

Як відомо, світло має електромагнітну природу і виявляє як хвильові, так і корпускулярні властивості. В одних оптичних явищах в більшій степені виявляються хвильові властивості, а в інших – корпускулярні.

Розглянемо гармонічну електромагнітну хвилю. В кожній точці простору, в якому поширюється така хвиля, відбувається періодична зміна напруженості електричного і індукції магнітного полів, тобто в деякій точці A , що розташована на відстані x від джерела хвилі, напруженість електричного поля E змінюється з часом за законом

$$E = E_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = E_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \quad (7.1)$$

де $\lambda = \frac{c}{\nu} = cT$ – довжина хвилі; c – швидкість поширення світла.

Хвиля, що має жорстко визначену λ або ν , є певною абстракцією, такою самою як “точкова маса” або “точковий заряд”. Ця абстракція значно полегшує опис та вивчення світлових явищ. Що стосується реального випромінювання, воно, як правило, вміщує набір частот, що називається спектральним складом даного випромінювання. Формула (7.1) стосується ідеально монохроматичного випромінювання, що вміщує лише одну частоту коливань.

Нехай в точку A надходить монохроматичне випромінювання від двох джерел S_1 і S_2 (рис. 7.1). Якщо вектори напруженості E_1 та E_2 електричного поля цих хвиль мають в точці A однаковий напрямок, то результуюча напруженість E в точці A становитиме $E_A = E_1 + E_2$. Одиниця об'єму в оточенні точки A (будемо вважати, що цей об'єм заповнений повітрям або вакуумом з відносною діелектричною сталою $\epsilon = 1$) отримує від хвилі, що поширюється від джерела S_1 , енергію електричного поля $w_{E_1} = \epsilon_0 E_1^2 / 2$, а від джерела S_2 – $w_{E_2} = \epsilon_0 E_2^2 / 2$. Енергія в

одиниці об'єму (об'ємна густина енергії) навколо точки A , що розрахована по результуючій напруженості E_A , набуває вигляду

$$w_{\text{рез}} = \frac{\varepsilon_0 E_A^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 (E_1 + E_2)^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} + \frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2} + \varepsilon_0 E_1 E_2 > w_{E_1} + w_{E_2},$$

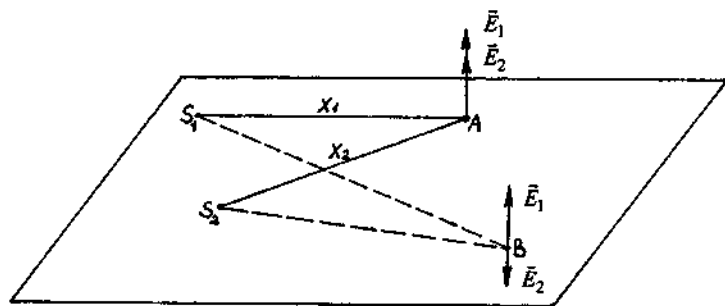


Рис. 7.1. Інтерференція монохроматичних світлових хвиль від двох джерел S_1 та S_2

тобто перебільшує суму енергій, що надсилаються в цей об'єм джерелами S_1 і S_2 . Нібито порушується закон збереження енергії? Але ми не врахували ту обставину, що в сусідніх точках середовища (наприклад, в точці B), куди світлові хвилі надходять, маючи протилежно спрямовані вектори E_1 та E_2 , енергія в одиниці об'єму, розрахована по результуючій напруженості $E_B = E_1 - E_2$, виявляється меншою за суму енергій, що надсилаються в цей об'єм джерелами S_1 і S_2 :

$$w_{\text{рез}} = \frac{\varepsilon_0 E_B^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 (E_1 - E_2)^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} + \frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2} - \varepsilon_0 E_1 E_2 < w_{E_1} + w_{E_2}.$$

Якщо $|E_1| = |E_2|$, то в точці B дві хвилі, додаючись, дають темряву.

Таким чином, внаслідок накладання світлових хвиль відбувається перерозподіл енергії цих хвиль в просторі. *Додавання кількох світлових хвиль, внаслідок якого утворюється чергування світлих та темних ділянок, тобто відбувається перерозподіл енергії цих хвиль в просторі, називається інтерференцією світла.*

7.1.1. Інтерференція від двох когерентних світлових джерел

Розглянемо найпростіший випадок інтерференції монохроматичних світлових хвиль від двох однакових джерел. Припустимо, що ці джерела випромінюють хвилі в однакових фазах. В цьому випадку фази векторів E_1 і E_2 в будь-якій точці залежать від відстаней x_1 і x_2 цієї точки до джерел S_1 і S_2 . Отже, якщо

$$E_1 = E_0 \sin \omega \left(t - \frac{x_1}{c} \right), \quad E_2 = E_0 \sin \omega \left(t - \frac{x_2}{c} \right),$$

то

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos \omega \frac{(x_2 - x_1)}{2c} \sin \omega \left(t - \frac{(x_1 + x_2)}{2c} \right). \quad (7.2)$$

В тих точках, де аргумент косинуса дорівнює непарній кількості $\pi/2$, тобто

$$\frac{\omega (x_2 - x_1)}{2c} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.3)$$

значення $\cos \omega \frac{(x_2 - x_1)}{2c} = 0$, а отже і результуюча напруженість електричного поля E в будь-який момент часу дорівнюватиме нулю, тобто світлові хвилі гасять одна одну.

Знайдемо розташування точок, в яких буде відбуватися "гасіння" двох монохроматичних світлових хвиль з однаковою амплітудою E_0 . Оскільки $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, то з (7.3) маємо

$$x_2 - x_1 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (7.4)$$

Таким чином, в точках, що знаходяться від джерел S_1 і S_2 на відстанях, які задовольняють умові (7.4), світла не буде.

Розташування точок, в яких амплітуда сумарної напруженості E має максимум, визначається умовою

$$\cos \omega \frac{(x_2 - x_1)}{2c} = 1; \quad \frac{\omega (x_2 - x_1)}{2c} = 2k \frac{\pi}{2},$$

звідки

$$x_2 - x_1 = 2k \frac{\lambda}{2}, \quad (7.5)$$

тобто різниця ходу $x_2 - x_1$ дорівнює в цьому випадку парній кількості $2k$ півхвиль $\lambda/2$. Отже, (7.4) є умовою гасіння світла, а (7.5) – його підсилення.

Якщо хвилі 1 і 2 поширювались в різних середовищах до точки, в якій спостерігалася інтерференція, то умови гасіння та підсилення світла виглядатимуть відповідно:

$$x_2 n_2 - x_1 n_1 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2};$$

$$x_2 n_2 - x_1 n_1 = 2k \frac{\lambda}{2},$$

де n_1 і n_2 – абсолютні показники заломлення середовищ.

Добуток геометричного шляху на показник заломлення, тобто xn , називається оптичною довжиною шляху, а величина $\delta = x_2 n_2 - x_1 n_1$ – оптичною різницею ходу інтерферуючих хвиль.

Таким чином, максимуми спостерігаються в тих точках, для яких оптична різниця ходу інтерферуючих хвиль дорівнює парній кількості півхвиль, а мінімуми – в тих точках, для яких оптична різниця ходу дорівнює непарній кількості півхвиль.

Необхідно підкреслити, що для постійного взаємного підсилення або гасіння світлових хвиль у будь-якій точці простору різниця фаз хвиль, що надходять в цю точку, не повинна змінюватись з часом. Світлові хвилі однакової довжини та поляризації, що надходять в певну точку з незмінною в часі різницею фаз, називаються **когерентними**. Таким чином, лише когерентні хвилі здатні утворювати інтерференційну картину, що не змінюється з часом. Саме тому її можна спостерігати візуально, фотографувати тощо.

Два різних джерела незвозі давати когерентні хвилі через такі причини:

1) збудження елементарних джерел світла (атомів, молекул) внаслідок їх участі в тепловому русі відбувається цілком

хаотично, а отже, і фази випромінюваних ними світлових хвиль змінюються з часом також хаотично;

2) час випромінювання монохроматичної хвилі, напруженість електричного поля в якій визначається формулою (7.1), триває приблизно $t_{\text{випр}} \approx 10^{-8}$ с. За цей час хвиля поширюється на відносно коротку відстань $l = ct_{\text{випр}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \times 10^{-8} \text{ с} = 3 \text{ м}$, тобто монохроматична хвиля (інколи кажуть хвильовий цуг) зосереджена в просторовому інтервалі порядку 3 м. Різні джерела одночасно випромінюють безліч монохроматичних хвиль з різними частотами і напрямками коливань напруженості електричного поля. За цих умов ймовірність зустрічі в одній точці простору двох когерентних хвиль з однаковою частотою (довжиною хвилі) практично дорівнює нулю. Тому когерентність інтерферуючих хвиль можливо створювати лише штучно – шляхом розділення кожної хвилі, яка випромінюється джерелом, на дві, що рухаються до місця зустрічі різними шляхами. Для забезпечення когерентності властивості середовища на шляху променів не повинні змінюватись з часом, а оптична різниця їх ходу не повинна перевищувати 3 м. Когерентність світлових променів можна здійснити цілою низкою способів (рис. 7.2, 7.3).

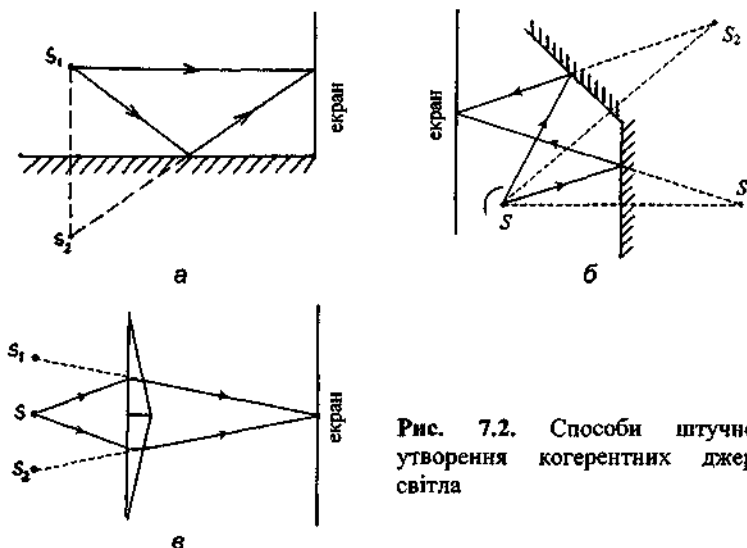


Рис. 7.2. Способи штучного утворення когерентних джерел світла

1. За допомогою дзеркал змушують інтерферувати дві частини однієї хвилі (дзеркало Ллойда, рис. 7.2, а; подвійне дзеркало Френеля, рис. 7.2, б). Результат отримуємо такий самий, як від двох когерентних джерел S_1 і S_2 . Насправді точка S_2 в дзеркалі Ллойда і точки S_1 і S_2 в дзеркалі Френеля не є джерелами світла, а становлять уявні зображення в дзеркалах джерела світла S .

2. В методі біпризми Френеля (рис. 7.2, в) світло від джерела S спрямовується на дві тонкі скляні призми, що склеєні своїми основами. Світло, заломлюючись в призмах, утворює два когерентні пучки, котрі, перекриваючись, потрапляють на екран, утворюючи інтерференційну картину від двох когерентних джерел, нібито розташованих в точках S_1 і S_2 .

3. Використовуються тонкі (прозорі) плівки, на поверхнях яких інтерферують відбиті та заломлені хвилі (рис. 7.3).

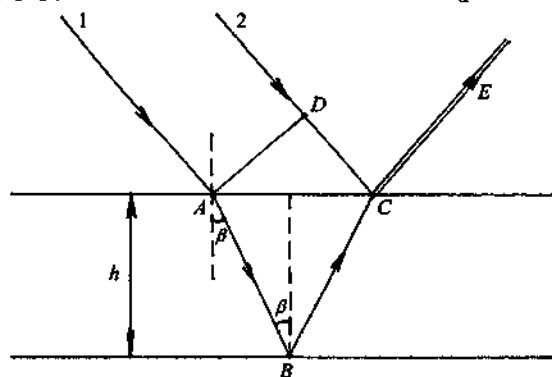


Рис. 7.3. Інтерференція заломленої та відбитої хвиль на поверхні тонкої прозорої платівки або плівки

Припустимо, що на прозору плівку товщиною h з показником заломлення n падає плоска хвиля. Знайдемо оптичну різницю ходу променів 1 і 2, що інтерферують в точці C . Опустимо перпендикуляр AD з точки A на промінь 2. Промінь 1, заломлюючись і далі зазнавши відбиття від нижньої границі плівки, пройшов довжину шляху $AB + BC$ в речовині з показником заломлення n , а промінь 2 – відстань DC в повітрі.

Враховуючи, що при відбитті світла від більш оптично густого середовища фаза хвилі змінюється на π (тобто

загублюється півхвилі), для оптичної різниці ходу променів 1 і 2 маємо

$$\delta = (AB + BC)n - (DC + \frac{\lambda}{2}). \quad (7.6)$$

Оскільки

$$AB + BC = \frac{2h}{\cos \beta}, \text{ а } DC = AC \sin \alpha = 2h \operatorname{tg} \beta \sin \alpha = \frac{2hn \sin^2 \beta}{\cos \beta},$$

з (7.6) маємо

$$\delta = 2 \frac{hn}{\cos \beta} - \frac{2hn}{\cos \beta} \sin^2 \beta - \frac{\lambda}{2} = 2hn \cos \beta - \frac{\lambda}{2}.$$

Якщо $\delta = (2k + 1)\lambda/2$, то промені 1 і 2 в результаті інтерференції в точці C гасять один одного і в напрямку CE відбите світло не спостерігається, тобто вся світлова енергія цілком поступає всередину плівки і від її поверхні не відбивається. Це явище застосовують в складних оптичних системах для “просвітлення оптики” – методу зменшення втрат світла при відбитті, а отже, збільшення енергії, що прямує до реєструючих систем – фотоплівки, очей тощо. Практично цього досягають шляхом утворення на поверхнях лінз та призм тонких прозорих плівок з окислу металу. Товщину і показник заломлення плівки підбирають таким чином, щоб промені, відбиті від зовнішньої і внутрішньої поверхонь плівки, взаємно гасили один одного.

7.1.2. Історія відкриття явища просвітлення оптики, праці О. Смакули

Слід зазначити, що честь відкриття явища просвітлення оптики належить одному з відомих українських фізиків ХХ століття Олександру Смакулі, який народився в с. Доброводи на Тернопільщині у вересні 1900 року. В 1922 році він закінчує знаменитий Геттінгенський університет в Німеччині і вже через 5 років, у грудні 1927 р., стає доктором філософії після захисту дисертації з фізичної оптики на математико-природничому факультеті цього університету. Восени 1934 р. О. Смакула починає працювати у відомій фірмі “Карл Цейс” в німецькому місті

Єна. Саме тут він робить відкриття і отримує перший в світі патент на спосіб виготовлення просвітленої оптики. Суть цього способу, як вже згадувалося вище, полягає в зменшенні відбиття світла, що суттєво покращує яскравість і якість оптичних зображень. Так, при показнику заломлення скла $n_{ск} = 1,5$ втрати при відбиванні світла становлять 4% при перпендикулярному падінні світла на одну плоску поверхню. Оскільки в складних оптичних приладах таких поверхонь буває досить багато, то й втрати на відбивання світла можуть бути дуже великими. Наприклад, при 10 поверхнях з $n_{ск} = 1,5$ вони складають 40%, а при 30 поверхнях вже 80%. Реальні втрати можуть бути ще більшими, оскільки світлові промені падають, як правило, на поверхні під кутами падіння, відмінними від нуля, тобто не перпендикулярно відбиваючій поверхні.

О. Смакула, розглядаючи умови інтерференції, які призводять до гасіння відбитих від різних поверхонь світлових променів, довів, що гасіння двох хвиль відбувається тоді, коли амплітуди хвиль однакові (*умова амплітуд*) і коли ці хвилі мають різницю ходу $\lambda/2$ або різницю фаз, що дорівнює π (*умова фаз*). Умова амплітуд буде виконана, якщо показник заломлення прозорої металевої плівки $n_{пл}$ буде пов'язаний з показником заломлення скляної поверхні простим співвідношенням: $n_{пл} = \sqrt{n_{ск}}$. Друга умова – умова фаз – буде виконана, якщо оптична товщина плівки, тобто добуток її показника заломлення $n_{пл}$ на геометричну товщину $d_{пл}$, буде задовольняти такій умові:

$$n_{пл} d_{пл} = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Далі О. Смакула, який був відомий як спеціаліст по виготовленню монокристалів для оптичних цілей (йому належить чудовий підручник “Монокристали”), знайшов відповідні матеріали, які задовольняють обом умовам – умові амплітуд і умові фаз. Для зовнішніх поверхонь це був флюорид магнію MgF_2 з показником заломлення $n \approx 1,38$, а для внутрішніх поверхонь – криоліт $3NaF \cdot AlF_3$ з показником заломлення $n \approx 1,34$.

Промислове виробництво просвітлювального покриття оптичних поверхонь було розпочате в Єні вже в 1936 році під

науковим керівництвом О. Смакули, який працював директором дослідної лабораторії оптичної фірми “Карл Цейс”. Цей метод спричинив справжню революцію в оптичній промисловості при виготовленні мікроскопів, телескопів, теодолітів та інших оптичних приладів, а також в фото- і кінематографічній галузях при виготовленні фотоапаратів, кінокамер тощо.

В 1945 році після закінчення другої світової війни О. Смакула опинився у США, де він працював в одному з найвідоміших навчальних закладів – Массачузетському технологічному інституті (МТІ) в Бостоні. Тут він став повним професором і директором лабораторії фізики кристалів. Помер О. Смакула в травні 1983 року. Рішенням 30-ї сесії Генеральної конференції ЮНЕСКО 2000 рік був оголошений роком О. Смакули, а 100-річний ювілей Олександра Смакули відзначався в Україні на державному рівні згідно з постановою Кабінету Міністрів.

7.1.3. Інші застосування явища інтерференції світла

Явище інтерференції світла широко використовують для створення різних вимірювальних та контролюючих пристроїв. Вимірювальні прилади, які використовують принцип інтерференції світла, називаються *інтерферометрами*. Вони застосовуються для вимірів з високим ступенем точності показників заломлення, довжин хвиль, для визначення якості поверхонь. На рис. 7.4 наведено принципову схему інтерферометра Майкельсона. Використання тонкого напівпрозорого шару срібла, нанесеного на скляну платівку, дає змогу поділити світлову хвилю і на дві частини – відбиту і ту, що пройшла крізь шар. Отримані таким чином когерентні хвилі за допомогою дзеркал спрямовують в прилад (мікроскоп, зорову трубу), в якому спостерігається інтерференція. Різниця ходу променів δ визначається положенням дзеркал та товщиною платівки. Якщо пересунути дзеркало на відстань $\lambda/2$, то δ зміниться на λ , що відповідає зміщенню інтерференційної картини на цілу смугу. Такий зв'язок між переміщенням дзеркала і зміною інтерференційної картини дає можливість вимірювати λ за відомим зміщенням дзеркала і, навпаки, – зміну δ за відомою

довжиною хвилі. Звичайно, дзеркала розташовують таким чином, щоб промені 2 і 3 від розходження до зустрічі пройшли однакові оптичні шляхи. Якщо на шляху променів 2 і 3 розташувати однакові кювети K_1 і K_2 відповідно з досліджуваною речовиною (з показником заломлення n_x) і еталонною (з показником заломлення n_0), то оптична різниця ходу променів 2' і 3' $\delta = 2ln_x - 2ln_0$, де l – товщина кювет. Далі, якщо внаслідок різниці ходу інтерференційна картина змістилася на κ смуг, тобто $\delta = \kappa\lambda$, то

$$n_x = n_0 + \frac{\kappa\lambda}{2l}$$

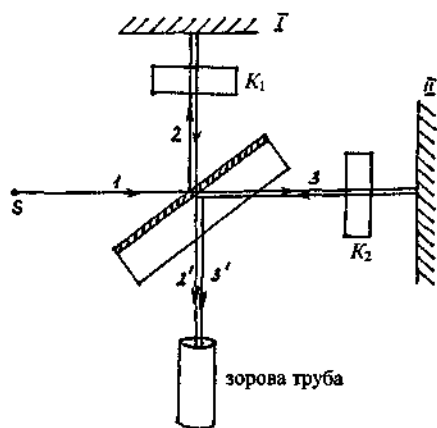


Рис. 7.4. Хід променів в інтерферометрі Майкельсона

Експериментатор здатний зафіксувати зміщення інтерференційної картини на 0,1 смуги, тобто $\kappa = 0,1$. В цьому випадку при $l = 2,5$ см і $\lambda = 500$ нм маємо

$$\Delta n = n_x - n_0 = \frac{0,1 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}} = 10^{-6}$$

Таким чином, можна зафіксувати відміну в показниках заломлення в шостому знаку після коми. Інтерферометр, призначений для виміру показника заломлення n , називається інтерференційним рефрактометром. Сполучення інтерферометра та мікроскопа (інтерференційний мікроскоп) використовують в

біології для спостереження нефарбованих об'єктів, виміру їх товщини. Промінь світла, як і в інтерферометрі, поділяється на два промені (рис. 7.5). Промінь 2 проходить крізь мікрооб'єкт, а промінь 1 – поза ним. Накладаючись в точці В, промені інтерферують. По зміні інтерференційної картини можна визначити товщину мікрооб'єкта при відомому n або визначити n по відомій товщині.

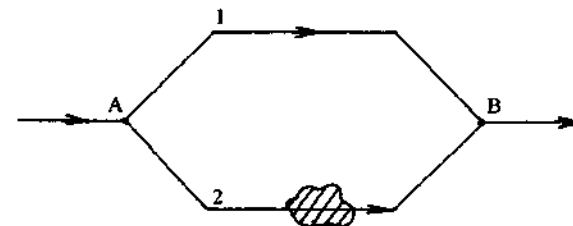


Рис. 7.5. Принципова схема інтерференційного мікроскопа

7.2. ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА

Якщо на шляху світлової хвилі розташовані непрозорі тіла або екрани з отворами, то за ними утворюється область тіні, котру можна окреслити геометрично, вважаючи, що промені – прямі лінії (рис. 7.6, а, б).

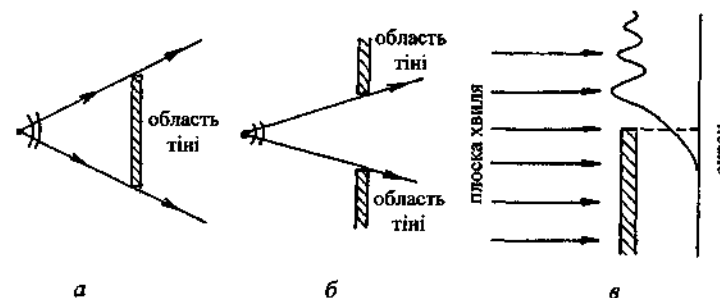


Рис. 7.6. Утворення області геометричної тіні а, б та дифракція на краю платівки в

Більш детальні спостереження свідчать про існування на межі між областями світла і тіні багатьох максимумів і мінімумів. Це означає деякий перерозподіл світлової енергії на цій межі.

Інакше кажучи, світлова хвиля потрапляє в область геометричної тіні.

Огинання світловою хвилею границь непрозорих тіл з утворенням інтерференційного перерозподілу енергії по різних напрямках називається дифракцією світла. На рис. 7.6в наведено криву розподілу інтенсивності світла внаслідок дифракції від краю пластівки. Можливість спостереження дифракції залежить від співвідношення між довжиною хвилі λ та розмірами d перешкоди або отвору.

Кут, на який відхиляються промені дифрагуючої хвилі від початкового напрямку, називається кутом дифракції φ (рис. 7.7). Існує певна закономірність: $\varphi \sim \lambda / d$, тобто кут дифракції тим більший, чим менші лінійні розміри d перешкоди (отвору) при даній довжині хвилі λ .

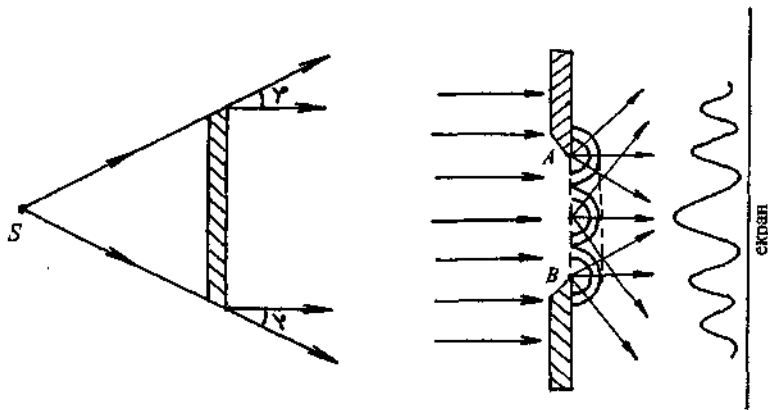


Рис. 7.7. Відхилення променів від прямолінійного напрямку при дифракції

Рис. 7.8. Пояснення явища дифракції згідно з принципом Гюйгенса-Френеля

Явище дифракції можна пояснити, користуючись *принципом Гюйгенса-Френеля*. Згідно з *принципом Гюйгенса* кожна точку фронту хвилі можна розглядати як джерело вторинних хвиль (сферичних в однорідному і ізотропному середовищі). Огинаюча цих вторинних хвиль становить фронт хвилі в наступний момент часу. Розглянемо такий приклад: крізь отвір AB проходить плоска монохроматична хвиля, енергія якої рівномірно розподілена

вздовж фронту (рис. 7.8). У перерізі AB кожна точка фронту є джерелом елементарної сферичної хвилі. Побудувавши огинаючу цих хвиль в наступний момент часу, переконаємося, що фронт потрапляє в область геометричної тіні. Залишається відкритим питання про розподіл енергії вздовж фронту хвилі. Цю задачу можна розв'язати, якщо доповнити принцип Гюйгенса уявленням Френеля. Згідно з *принципом Френеля* всі точки, до яких доходить фронт хвилі, стають джерелами вторинних елементарних хвиль, які є когерентними і можуть, таким чином, інтерферувати.

7.2.1. Дифракція на щілині в паралельних променях

Під час перпендикулярного падіння світла на площину щілини шириною a всі точки фронту хвилі AB коливаються в однаковій фазі. Тому промені, які не змінили свого напрямку, не мають різниці ходу і, фокусуючись лінзою в точці O екрана, дають максимум освітленості (рис. 7.9).

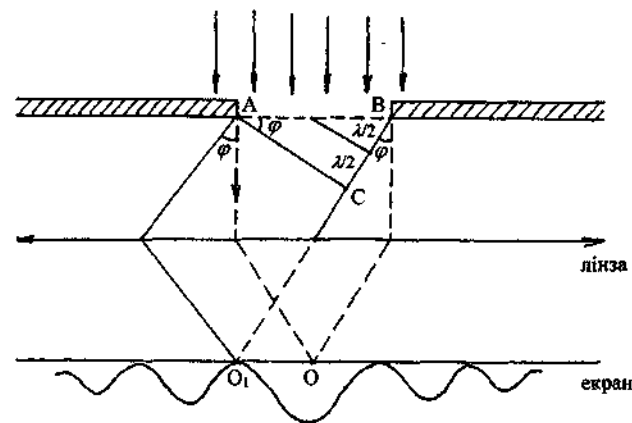


Рис. 7.9. Дифракція на щілині в паралельних променях

Промені, які внаслідок дифракції відхилились на кут φ від напрямку променів, що падають на щілину, набувають різницю ходу δ . Визначимо цю різницю ходу, побудувавши фронт хвилі для цих променів. Для цього з точки A опустимо перпендикуляр на промінь, що виходить з точки B . Очевидно, що різниця ходу δ дорівнює довжині відрізка BC . Розіб'ємо BC на відрізки

величиною $\lambda/2$. Якщо провести з точок поділу прями, паралельні AC , фронт хвилі в щілині AB виявиться поділеним на зони, які називаються **зонами Френеля**. Вторинні хвилі, що йдуть від симетричних точок сусідніх зон Френеля, гасять одна одну. Для даних ширини щілини a і довжини хвилі λ кількість зон n залежить від кута φ відхилення променів

$$n = \frac{BC}{\lambda/2} = \frac{a \sin \varphi}{\lambda/2}. \quad (7.7)$$

Число n може бути парним і непарним. Якщо n – парне число, то результатом інтерференції вторинних хвиль буде мінімум, оскільки в кожних двох сусідніх зонах маємо симетрично розташовані промені з $\delta = \lambda/2$, котрі, інтерферуючи в точці O_1 , гасять один одного. Таким чином, напрямок на мінімум визначається умовою $n = 2\kappa$, де $\kappa = 1, 2, 3, \dots$. Враховуючи (7.7), маємо $\delta = a \sin \varphi_{\min} = 2\kappa \lambda/2$ або

$$\sin \varphi_{\min} = \frac{\kappa \lambda}{a}. \quad (7.8)$$

Якщо $n = (2\kappa + 1)$ (остання зона може бути і неповною), то в точці O_1 спостерігатиметься максимум, тобто напрямок на максимум визначається умовою $a \sin \varphi_{\max} = (2\kappa + 1) \lambda/2$ або

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{(2\kappa + 1) \lambda}{2a}. \quad (7.9)$$

З формули (7.9) маємо: 1) за умови $a \gg \lambda$, $\sin \varphi_{\max} \cong 0$, тобто кут дифракції φ малий, і явище дифракції важко спостерігати; 2) за умови $a \ll \lambda$, $\sin \varphi_{\max} \cong 1$, звідки $\varphi_{\max} \cong \pi/2$, тобто весь екран буде освітленим і не спостерігатиметься чергування максимумів і мінімумів. Очевидно, що для спостерігання дифракційної картини необхідне виконання умови $a \approx \lambda$.

7.2.2. Дифракційна решітка

Явище дифракції можна використовувати для дослідження спектрів випромінювання і поглинання, а також визначення довжини хвилі. Для цього використовується **дифракційна**

решітка – оптичний пристрій, що становить сукупність великої кількості паралельних вузьких щілин. Решітка створюється шляхом нанесення подряпин (штрихів) на скляну платівку. Проміжки між штрихами – це щілини, що пропускають світло. Позначимо ширину щілини a , а проміжок між щілинами – b . Величину $d = a + b$ називають **періодом дифракційної решітки**. При падінні світла на дифракційну решітку у всіх щілинах виникають вторинні когерентні хвилі, які внаслідок дифракції утворюють в фокальній площині лінзи інтерференційну картину (рис. 7.10), що складається з великої кількості максимумів і мінімумів різної інтенсивності. Ця картина відтворює інтерференцію як променів, що пройшли кожен окрему щілину, так і променів, що пройшли різні щілини і падають на лінзу під однаковими кутами. Останні і утворюють найбільш інтенсивні максимуми, що називаються головними.

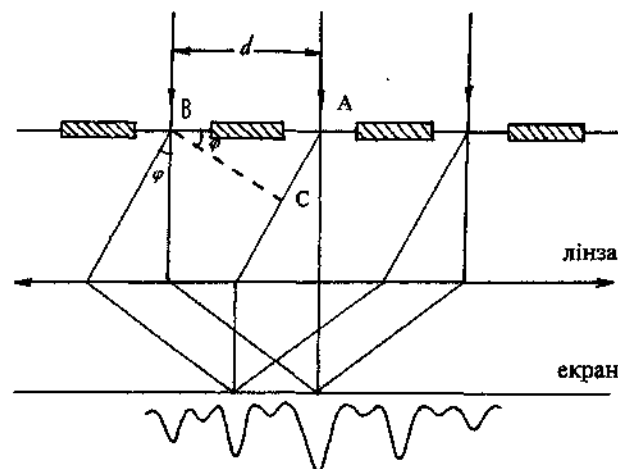


Рис. 7.10. Дифракція плоскої хвилі на дифракційній решітці

Розглянемо симетричні промені, що йдуть з сусідніх щілин (рис. 7.10). Якщо різниця ходу δ цих променів дорівнює цілому числу довжин хвиль, на екрані в результаті інтерференції цих хвиль виникає максимум. При цьому $\delta = AC = \kappa \lambda$, але $AC = d \sin \varphi$, отже,

$$d \sin \varphi = \kappa \lambda, \quad (7.10)$$

де κ – порядок максимуму ($\kappa = 0, 1, 2, \dots$).

Співвідношення (7.10) називають *формулою дифракційної решітки*. Головні максимуми розташовані симетрично по відношенню до центрального максимуму ($\varphi = 0$). Можна показати, що між двома головними максимумами спостерігається $N - 1$ мінімум, де N – кількість щілин в решітці. Головні максимуми на інтерференційній картині значно вужчі і різкіші, ніж при дифракції на одній щілині. Із збільшенням кількості щілин N окремі додаткові мінімуми майже не розрізняються і проміжки між головними максимумами стають темними, а головні максимуми – різкішими. При падінні на решітку білого чи немонохроматичного світла кожний максимум, окрім центрального, розкладається в спектр. В цьому випадку значення κ вказує на порядок спектра.

Головними характеристиками дифракційної решітки як оптичного приладу є *кутова дисперсія D* і *роздільна здатність R* .

Нехай кутова відстань між двома лініями спектра, що відрізняються по довжині хвилі на $d\lambda$, дорівнює $d\varphi$. Величину $D = d\varphi/d\lambda$ називають кутовою дисперсією. Кутова дисперсія чисельно дорівнює першій похідній від кута відхилення променів по довжині хвилі або кутовій відстані між двома лініями спектра, які відповідають довжинам хвилі, що відрізняються на одиницю. Кутова дисперсія визначає ширину спектра.

Продиференціюємо формулу дифракційної решітки (7.10)

$$d \cos \varphi d\varphi = \kappa d\lambda,$$

звідки

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\kappa}{d \cos \varphi},$$

тобто кутова дисперсія тим більша, чим менший період решітки d і більший порядок спектра κ .

Можливість розрізнити близькі лінії залежить не лише від ширини спектра, тобто від D , а й від ширини окремих ліній, котрі можуть накладатися одна на одну. Розрізнення спектральних ліній оцінюють роздільною здатністю R , яка дорівнює

відношенню довжини хвилі до найменшого інтервалу довжин хвиль, котрі можуть бути розрізнені:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Якщо $\lambda_1 \cong \lambda_2$, а $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, то $R = \lambda_1/\Delta\lambda$ або $R = \lambda_2/\Delta\lambda$. Розрахунки показують, що

$$R = \kappa N,$$

тобто роздільна здатність дифракційної решітки збільшується із зростанням кількості штрихів N і порядку спектра κ .

Згідно з принципом Релея, дві спектральні лінії розрізняються, якщо максимум однієї лінії співпадає з найближчим мінімумом іншої лінії (рис. 7.11) або знаходиться на більшій відстані від нього.

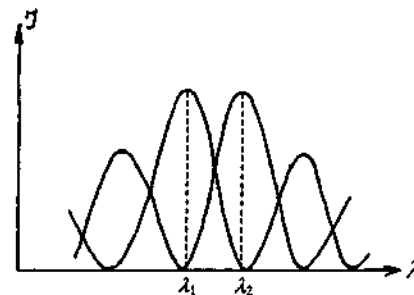


Рис. 7.11. Розрізнення двох спектральних ліній згідно з принципом Релея

7.2.3. Голографія та її застосування в медицині

Голографія – метод запису та відновлення об'ємного зображення, який базується на явищах інтерференції та дифракції.

Принцип голографії вперше запропонував англійський фізик Д. Габер в 1948 році, але його реалізація стала можливою лише в 60-х роках після створення лазера – джерела когерентного випромінювання. При звичайному фотографуванні на фотоплівці фіксується лише інтенсивність світлових хвиль, відбитих від різних точок предмета, без врахування фазових співвідношень між хвилями, що зумовлені різною відстанню від точок предмета до фотоплівки. Реєстрація фаз можлива внаслідок інтерференції хвиль.

Для отримання голографічного зображення пучок випромінювання лазера за допомогою лінз поділяється на дві частини (рис. 7.12, а).

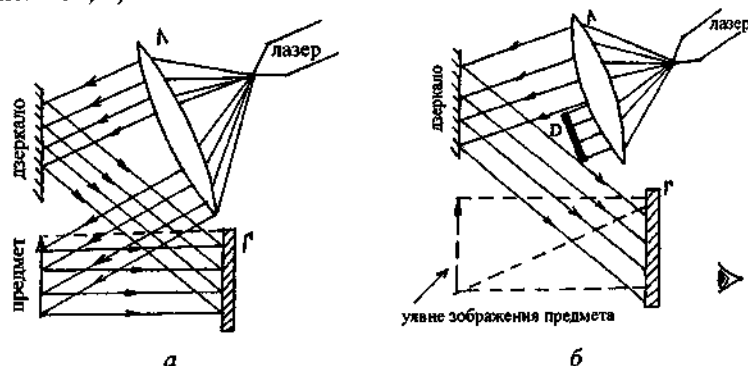


Рис. 7.12. Принципи утворення а та відтворення б голографічного зображення.

Одна частина за допомогою дзеркала спрямовується на фотопластинку Г. Це так званий опорний пучок. Друга частина – предметний або сигнальний пучок – спрямовується на предмет. Хвиля, відбита або розсіяна предметом, падає на фотопластинку і на її поверхні відбувається інтерференція відбитої хвилі з опорним пучком. Інтерференційна картина, зафіксована на фотопластинці, становить голограму. При падінні на голограму опорного пучка відновлюється зображення предмета. Око, яке дивиться крізь голограму, бачить уявне зображення предмета (предмет нібито “завис” у просторі в тому місці, де він був розташований при зйомці (рис. 7.12, б). Якщо змінювати положення ока, можна побачити різні деталі предмета, розташовані один поза одним і невидимі при прямому спостереженні. Об’ємне зображення вміщує більше інформації, ніж плоске, а тому має широкі перспективи застосування в медицині (наприклад, голографічний гастроскоп). При відновленні зображення можна змінити довжину опорної хвилі. Так, голограма, що утворена ультрафіолетовими або інфрачервоними променями, може бути відновлена видимим світлом. Більш того, голограму, отриману в ультразвукових (механічних) хвилях, можна відновити видимим світлом. Це відкриває широкі можливості застосування

ультразвукової голографії для розглядання внутрішніх органів з діагностичною метою. Зображення предмета можна збільшити, якщо голограму, отриману за допомогою плоскої опорної хвилі, освітити сферичною хвилею. Цей метод застосовується в голографічному мікроскопі.

7.3. ГЕОМЕТРИЧНА ОПТИКА

Геометрична оптика – розділ оптики, в якому вивчаються закони поширення світла в прозорих середовищах на підставі уявлень про світловий промінь як про лінію, вздовж якої поширюється світлова енергія. Як вже зазначалося, в геометричній оптиці хвильовий характер світла не враховується. З дослідження явищ інтерференції і дифракції випливає, що хвильові ефекти перестають бути суттєвими при $\lambda \rightarrow 0$. Таким чином, *геометрична (променева) оптика – граничний випадок хвильової оптики за умови дуже малої довжини хвилі*.

Основні задачі, які розглядає геометрична оптика, такі: 1) формування світлового зображення; 2) хід променів у оптичних системах; 3) похибки оптичних систем, які впливають на якість зображення.

Основні закони геометричної оптики:

- 1) закон прямолінійного поширення світла;
- 2) закони відбивання світла;
- 3) закони заломлення світла.

Ці закони виходять із *принципу Ферма* – принципу найкоротшого за часом оптичного шляху:

$$t_{\min} = \int_A^B ds / v,$$

де v – швидкість поширення світла у середовищі. У відповідності з принципом Ферма, який був сформульований як загальний закон поширення світла, справжній шлях поширення світла між точками A і B є той шлях, для проходження якого світлу потрібний мінімальний час порівняно з будь-яким іншим шляхом між цими точками.

7.3.1. Ідеальна центрована оптична система

Система сферичних поверхонь (лінз) називається *центрованою*, якщо центри всіх сферичних поверхонь лежать на одній прямій, яка має назву *головної оптичної осі* системи.

Згідно з теорією оптичних систем, яка була розроблена відомим німецьким математиком Гауссом, ідеальною оптичною системою є система, в якій зображення є подібним предмету, тобто будь-якій точці чи лінії простору предметів відповідає одна і тільки одна точка чи лінія простору зображень. Такі точки та лінії називаються *спряженими*. Аналогічно, кожній площині простору предметів (об'єктів) повинна відповідати спряжена площина простору зображень. Таким чином, теорія ідеальних оптичних систем є чисто геометричною теорією, яка встановлює зв'язок між точками, лініями і площинами.

Ідеальною оптичною системою з достатнім ступенем точності можна вважати центровану, якщо обмежитись областю поблизу вісі симетрії – головної оптичної осі. Промені, що поширюються поблизу головної оптичної осі, зветься *параксіальними*.

Теорія Гаусса встановлює зв'язок між так званими *кардинальними точками і площинами*, завдання яких повністю описує всі властивості *центрованої оптичної системи (ЦОС)* і дає змогу користуватись нею, не розглядаючи реального ходу променів у цій системі.

Нехай MM і PP – крайні сферичні поверхні, що обмежують нашу систему, O_1O_2 – її головна вісь, n_1 і n_2 – показники заломлення середовищ (рис. 7.13). З променем A_1 , паралельним O_1O_2 , спряжений промінь A_2 , який проходить через точку F_2 (згідно з властивостями ідеальної системи). Візьмемо інший промінь O_1 вздовж головної оптичної осі.

Спряжений з ним промінь O_2 йтиме також вздовж головної осі. Точка F_2 – точка перетину двох променів A_2 і O_2 , є зображенням точки, в якій перетинаються промені A_1 і O_1 , спряжені з A_2 і O_2 . Оскільки промінь A_1 паралельний O_1O_2 , то точка, що спряжена з F_2 , лежить на нескінченності. Таким чином, точка F_2 – це фокус даної системи, розташований в просторі зображень. Аналогічно променю B_2 спряжений промінь B_1 , який проходить через передній фокус системи F_1 .

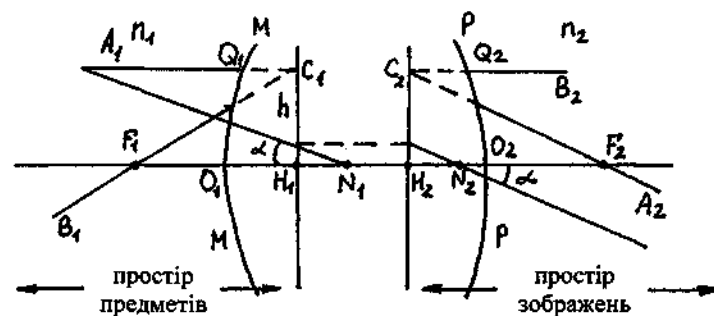


Рис. 7.13. Кардинальні точки і площини ЦОС

Площина, яка проходить через фокус перпендикулярно O_1O_2 , називається *фокальною*. Оскільки промені A_1 і B_1 спряжені з променями A_2 і B_2 , то спряженими виявляються точки перетину цих променів – C_1 і C_2 . Через C_1 і C_2 проведемо площини перпендикулярно до головної оптичної осі, які перетнуть її в точках H_1 і H_2 . Ці точки також є спряженими і називаються *головними точками*. Площини, які проходять через ці точки перпендикулярно до головної оптичної осі, називаються *головними площинами*. Вони відзначаються тим, що промінь, який падає на одну площину в точці C_1 на відстані h від головної осі, виходить із другої площини в точці C_2 , розташованій на такій самій відстані від осі. Таким чином, відрізки $|C_1H_1| = |C_2H_2| = h$, тобто лінійне збільшення цих відрізків дорівнює одиниці.

Головні точки і фокуси називаються ще *кардинальними точками* ЦОС, а площини, які проходять через них і перпендикулярні O_1O_2 – *кардинальними площинами*.

Відстані від головних точок до фокусів називаються *фокусними відстанями* системи:

$$[F_1H_1] = f_1, \quad [F_2H_2] = f_2.$$

Існує також ще одна пара кардинальних точок N_1 і N_2 , які називають *вузловими* або *нодальними*. Їх особливість полягає в тому, що спряжені промені, які проходять через ці точки, мають однаковий кут нахилу до оптичної осі. Якщо показники заломлення простору предметів та простору зображень є

однаковими ($n_1 = n_2$), то вузлові точки співпадають з відповідними головними точками.

Отже, в ЦОС виділяють шість кардинальних точок: два фокуси (F_1 і F_2), дві головні (H_1 і H_2) і дві вузлові (N_1 і N_2) і відповідно шість кардинальних площин. У тонкій лінзі, яка є частковим випадком ЦОС, є три кардинальні точки, оскільки головні і вузлові точки співпадають з оптичним центром.

Як приклад, розглянемо побудову зображення точкового джерела світла S_1 (рис. 7.14).

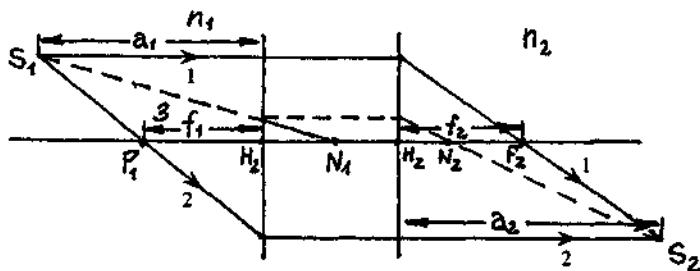


Рис. 7.14. Побудова зображення точки в ЦОС

Промінь із світлової точки S_1 , паралельний головній оптичній осі, проводимо до перетину з головною площиною простору зображень, а потім через другий фокус F_2 . Промінь 2 йде через перший фокус F_1 до головної площини простору предметів, а потім паралельно головній оптичній осі. Перетин променів 1 і 2 у просторі зображень дає зображення S_2 світлової точки S_1 .

Можна навести такі формули, які пов'язують положення предмета і його зображення:

$$\frac{f_1}{a_1} + \frac{f_2}{a_2} = 1, \quad \frac{f_1}{n_1} = \frac{f_2}{n_2},$$

де a_1 і a_2 – відстані від предмета до головної площини простору предметів і від головної площини простору зображень до зображення предмета відповідно, f_1 і f_2 – фокусні відстані, а n_1 і n_2 – показники заломлення середовищ.

Важливим елементом оптичних систем, які утворюють зображення предмета, є *оптична діафрагма* – це отвір у

непрозору тілі, який обмежує ширину пучка світлових променів, центр якого лежить на головній осі оптичної системи.

Діафрагма, яка найбільш сильно обмежує світловий пучок (незалежно від місця її знаходження в оптичній системі), називається *апертурною діафрагмою*. Такою діафрагмою може служити край чи оправа лінзи, наприклад, об'єктива. Ця діафрагма обмежує ширину оптичних пучків, а також не пропускає в оптичну систему промені, що падають на лінзу під великими кутами до головної оптичної осі. Вона підвищує чіткість зображення і сприяє усуненню аберацій та, водночас, обмежує кількість світлових променів, які попадають в оптичну систему, тобто зменшує яскравість зображення. Кут θ , який рівний половині кута, утвореного двома крайніми променями, що падають в отвір апертурної діафрагми з точки перетину площини предмета з головною оптичною віссю, називається *апертурним кутом* оптичної системи.

7.3.2. Похибки оптичних систем

Головна задача оптичної системи полягає в утворенні правильного зображення предмета, яке становить (у найпростішому випадку) плоску картину, перпендикулярну головній оптичній осі.

Якщо для формування зображення в лінзі використовуються вузькі світлові пучки, що падають на лінзу під невеликими кутами (параксіальні пучки), і відсутня дисперсія, то зображення буде геометрично вірним і чітким. На практиці ці умови реалізуються далеко не завжди і це призводить до того, що в зображеннях, які утворює лінза, спостерігаються різні похибки чи недоліки, які називаються *абераціями*.

Основні аберації лінз (чи оптичних систем):

- 1) при широких пучках – *сферичні аберації і дисторсія*;
- 2) при пучках, що падають на лінзу під значними кутами – *астигматизм і кривизна поля*;
- 3) *хроматична аберація*, яка пов'язана з дисперсією.

Сферична аберація викликана тим, що краї лінзи внаслідок великої кривизни поверхні заломляють промені сильніше, ніж центральна частина. Через це головні фокуси для крайніх і центральних променів не співпадають (рис. 7.15).

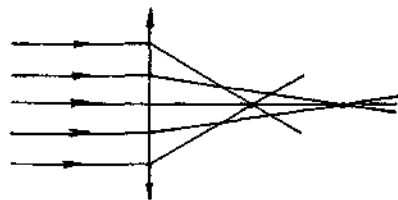


Рис. 7.15. Сферична аберація

Дисторсія зумовлена тим, що лінійні збільшення

лінзи для точок предмета, які знаходяться на різних відстанях від головної оптичної осі, дещо відрізняються і тому прямі контури предмета, який лежить у площині, перпендикулярній до головної оптичної осі, набувають форми дуг. Щоб позбавитись цих аберацій, можна зробити світловий пучок вужчим за допомогою діафрагми (при цьому зменшується яскравість зображення) або доповнити дану лінзу іншими, аберації яких мають протилежний характер (наприклад, поєднання збираючої лінзи з розсіювальною).

Кривизна поля полягає в тому, що фокуси паралельних променів, які падають на лінзу під значними кутами до головної осі, не лежать у фокальній площині і зображення на плоскому екрані має різну чіткість у різних місцях.

Астигматизм виникає внаслідок неоднакового заломлення променів, що проходять крізь лінзу в різних меридіональних площинах. В оптичних приладах це спостерігається у разі падіння променів на лінзу правильної сферичної форми під значними кутами до головної осі. Астигматизм може спостерігатися також і при прямому падінні променів на лінзу, якщо остання має відхилення від правильної сферичної форми. Цей вид астигматизму зустрічається як один із недоліків оптичної системи ока. Частіше зустрічається астигматизм, при якому найбільша різниця в заломленні променів спостерігається у двох взаємно-перпендикулярних меридіональних площинах. Такий астигматизм називається **правильним**. Розглянемо його на прикладі двоякоопуклої лінзи. Припустимо, що лінза із сферичною поверхнею має у вертикальній площині дещо меншу кривизну

поверхні, ніж у горизонтальній (рис. 7.16). У цьому випадку з пучка променів, що падають паралельно головній осі OO' , промені, що проходять крізь лінзу по вертикальному діаметру (наприклад, промені 2-2), після заломлення перетнуться у точці F_2 , розташованій далі від оптичного центра лінзи, а промені, що проходять крізь лінзу по горизонтальному діаметру (наприклад, промені 1-1), – у точці F_1 , розташованій дещо ближче до нього.

На екрані A , що проходить через точку F_1 , в якій перетнулися після лінзи промені 1-1, виникає світла вертикальна смуга внаслідок того, що промені 2-2 у цій площині ще не перетнулися.

На екрані B , розміщеному в точці F_2 , в якій сходяться після лінзи промені 2-2, виникає світла горизонтальна смуга, оскільки промені 1-1 у цій площині вже розходяться після того, як вони перетнулися раніше у точці F_1 . На екрані, розміщеному між площинами A і B , буде спостерігатися світла пляма круглої чи овальної форми. Така ж сама картина зустрічається при астигматизмі внаслідок похилого падіння променів на лінзу правильної геометричної форми. У цьому випадку також можна використовувати хід променів, що наведений на рис. 7.16.

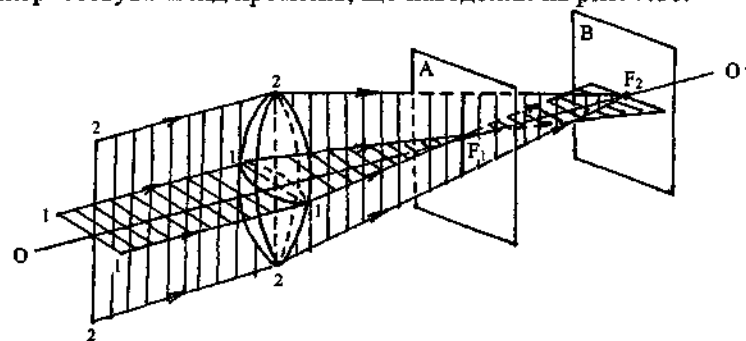


Рис. 7.16. Хід променів у збиральній лінзі при астигматизмі

Для виправлення астигматизму, особливо правильного, часто застосовуються лінзи, обмежені циліндричними поверхнями. Системи, які виправлені на астигматизм, називаються **анастигматами**.

Хроматична аберация зумовлена залежністю показника заломлення від довжини хвилі, тобто від кольору світлової хвилі (явище дисперсії). В результаті виникає спотворення, внаслідок якого навіть для параксіальних променів немонахроматичний пучок має цілу сукупність фокусів вздовж відрізка F_1F_2 головної оптичної осі. Отже, точка на осі зображується кружечком кольорових кілець, послідовність яких залежить від місця знаходження екрана (рис. 7.17). Для усунення даного типу абераций використовуються сорти скла з різними показниками заломлення і різною дисперсією. Такі системи називаються **ахроматичними**.

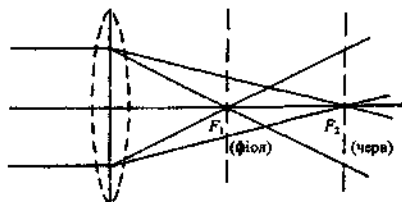


Рис. 7.17. Хроматична аберация

Розглянемо *перший випадок*. Як видно з рис. 7.18, зображення A_1B_1 предмета AB знаходиться у фокальній площині окуляра, і тому всі промені після заломлення в окулярі йдуть від цього зображення паралельно до побічної осі, яка з'єднує точку A_1 і оптичний центр лінзи окуляра O_1 . Заломлююча система ока, яка має в середньому оптичну силу 63 *дптр*, фокусує ці паралельні промені на сітківку, де виникає зображення A_2B_2 реального предмета AB .

Збільшення мікроскопа Γ_m , як і збільшення будь-якої ЦОС, визначається добутком збільшення лінз, що входять до її складу:

7.3.3. Оптична мікроскопія

Перейдемо до розгляду оптичної системи мікроскопа і його основних характеристик. Мікроскоп являє собою ЦОС, яка у найпростішому випадку складається з двох лінз: об'єктива і окуляра. Хід променів у мікроскопі зображений на рис. 7.18.

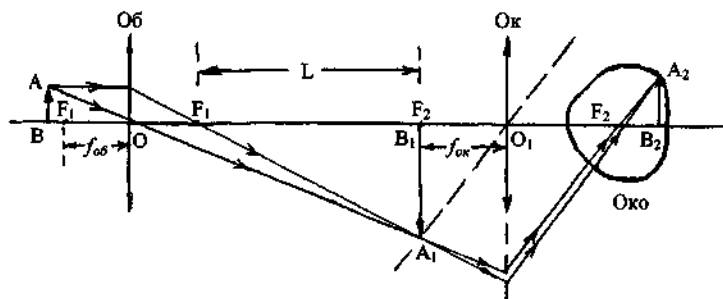


Рис. 7.18. Схематичний хід променів у мікроскопі

У мікроскопі предмет AB розміщується безпосередньо за переднім фокусом об'єктива (Об). В такому випадку його зображення A_1B_1 буде дійсним, оберненим, збільшеним і

знаходиться за подвійним фокусом об'єктива. Бажано, щоб окуляр (Ок) розміщувався так, щоб площина, в якій лежить зображення A_1B_1 , знаходилася у фокальній площині окуляра або між його переднім фокусом і самим окуляром, але в безпосередній близькості від фокуса F_2 . В першому випадку око не напружується, оскільки до нього йдуть паралельні промені. В другому випадку потрібна акомодация (див. параграф 7.7, де викладаються біофізичні основи зорової рецепції), щоб зібрати промені, що розходяться після заломлення в окулярі, на сітківку ока.

Збільшення мікроскопа Γ_m , як і збільшення будь-якої ЦОС, визначається добутком збільшення лінз, що входять до її складу:

$$\Gamma_m = \Gamma_{об} \cdot \Gamma_{ок} \approx \frac{L \cdot D}{f_{об} \cdot f_{ок}}, \quad (7.11)$$

де L – оптична довжина тубуса – відстань між заднім головним фокусом об'єктива і переднім головним фокусом окуляра, D – відстань найкращого зору ($D \approx 25$ см).

Таким чином, *теоретичне збільшення мікроскопа дорівнює відношенню добутку оптичної довжини тубуса на відстань найкращого зору до добутку фокусних відстаней об'єктива і окуляра*.

Основні характеристики мікроскопа – роздільна здатність, межа розрізнення і корисне збільшення.

Роздільна здатність – властивість мікроскопа давати окремо зображення двох, поряд розміщених, світлих точок предмета.

Теорія роздільної здатності мікроскопа була розроблена Е. Аббе, а потім Л. І. Мандельштамом і Д. С. Рождественським.

Роздільна здатність мікроскопа зумовлена хвильовими властивостями світла і передусім дифракційними явищами. Вона визначається роздільною здатністю об'єктива, в який входять промені світла, що дифрагують на структурних деталях предмета, і залежить, таким чином, від апертурного кута θ і довжини хвилі. Роздільна здатність є характеристикою, яка обернена до межі розрізнення Z_{\min} – найменшої відстані між двома світлими точками предмета, які сприймаються в мікроскопі окремо. Чим менша межа розрізнення, тим вища роздільна здатність оптичного приладу.

В теорії Аббе формула для межі розрізнення Z_{\min} має такий вигляд для “сухого” мікроскопа:

$$Z_{\min} = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}.$$

При використанні імерсійного об'єктива (тобто у разі, коли між предметом і об'єктивом розміщена рідина з показником заломлення n) значно збільшується яскравість зображення і роздільна здатність мікроскопа. У цьому випадку формула для межі розрізнення набуває вигляду

$$Z_{\min} = \frac{\lambda}{2n \sin \theta}. \quad (7.12)$$

Величина $A = n \cdot \sin \theta$ називається *числовою апертурою*. Оцінимо цю величину. Максимальна кутова апертура $\theta_{\max} \approx 70^\circ$, тоді для сухого об'єктива $A = \sin 70^\circ = 0,94$, а для імерсійного, якщо $n = 1,5$, $A = 1,5 \cdot 0,94 = 1,4$. Використовуючи світло з $\lambda = 0,555$ мкм, до якого найбільш чутливе людське око, отримаємо для межі розрізнення такі значення: для сухого мікроскопа $Z_{\min} = 0,3$ мкм, а для імерсійного мікроскопа $Z_{\min} = 0,2$ мкм.

Не має сенсу нескінченно зменшувати Z_{\min} , оскільки деталі предмета повинні розрізнитися і оком. Реальне збільшення мікроскопа визначається так званим *корисним збільшенням* $\Gamma_{\text{корис}}$, яке визначається співвідношенням

$$\Gamma_{\text{корис}} = \frac{Z'}{Z_{\min}},$$

де Z' – межа розрізнення ока, тобто розмір зображення на сітківці ока предмета, який має величину, що співпадає з межою розрізнення мікроскопа Z_{\min} на відстані найкращого зору $D = 25$ см.

Нормальне око розрізняє дві точки, кутові відстані між якими мають порядок $2' - 4'$, тобто декілька кутових хвилин. Тоді для такої кутової відстані межа розрізнення ока становить

$$Z' = 25 \cdot (2 + 4) \cdot \frac{3,14}{180 \cdot 60} = (0,014 \div 0,028) \text{ см} = (140 \div 280) \text{ мкм}.$$

Таким чином, корисне збільшення мікроскопа

$$\Gamma_{\text{корис}} = (140 \div 280) \cdot 2 \cdot A / \lambda.$$

Тоді для сухого мікроскопа при $\lambda = 0,555$ мкм і числовій апертурі $A = 0,94$ маємо

$$\Gamma_{\text{корис}} = 500 \div 1000,$$

а для імерсійного мікроскопа з числовою апертурою $A = 1,43$

$$\Gamma_{\text{корис}} = 700 \div 1400.$$

Отже, у звичайному оптичному мікроскопі корисне збільшення не може перевищувати значення $\Gamma_{\text{корис}} \approx 1500$. Ці збільшення називають *корисними*, тому що при них око розрізняє всі елементи структури об'єкта, які розрізнені мікроскопом.

Для вирішення різноманітних завдань у біологічних дослідженнях використовують різні методи спостереження об'єктів за допомогою мікроскопа, основними з них є такі:

- методи світлого і темного полів у відбитих променях або променях, що проходять крізь об'єкт;
- методи спостереження в поляризованому і люмінесцентному світлі;
- метод фазового контрасту;
- метод ультрамікроскопії та ін.

7.4. ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА

Електромагнітні хвилі, як відомо, є поперечними. У випромінюванні різних джерел (розжарених твердих тіл, газів, що світяться) внаслідок хаотичного руху елементарних джерел світла – атомів та молекул – присутні всілякі напрямки коливань

вектора напруженості електричного поля E . Таке випромінювання називається **природним** (рис. 7.19, а). Якщо спроектувати всі вектори E , що присутні у природному світлі, на дві взаємно перпендикулярні площини A та B , що проходять через світловий промінь, то суми проєкцій на площини A та B виявляються однаковими (рис. 7.19, б). Тому природне світло умовно позначають так, як це подано на рис. 7.19, в.

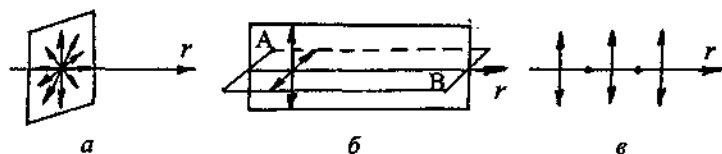


Рис. 7.19. Проекції векторів напруженості електричного поля E в природному світлі: на площину, перпендикулярну променю r (а), на дві взаємно перпендикулярні площини A та B (б) та умовне позначення природного світла (в)

Випромінювання, в якому коливання вектора E відбуваються лише в одному напрямку, називається **поляризованим** (наприклад, випромінювання електрона в поодинокому акті). Площина, в якій розташовані вектор E та вектор r , що визначає напрямок поширення випромінювання (тобто світловий промінь), називається **площиною поляризації**. На рис. 7.20, а зображена площина поляризації A , а на рис. 7.20, б наведені умовні позначення поляризованого світла.

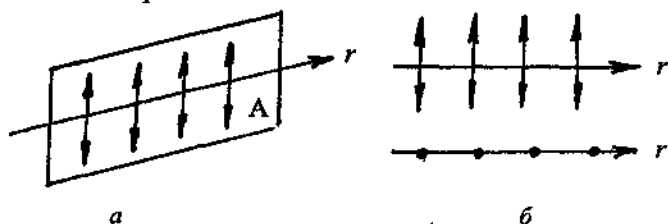


Рис. 7.20. Площина поляризації (а) та умовне позначення поляризованого світла (б)

Світло, в якому коливання вектора E одного напрямку переважає коливання інших напрямків, називається **частково поляризованим**. Співвідношення символічних позначень \uparrow та \bullet характеризує ступінь поляризації (рис. 7.21). Поляризоване світло

можна одержати з природного за допомогою приладів, що називаються **поляризаторами**.

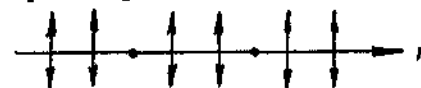


Рис. 7.21. Умовне позначення частково поляризованого світла

7.4.1. Поляризація світла при відбиванні та заломленні

Якщо природне світло падає на відбиваючу поверхню діелектрика (скла, слюди) під кутом α , який задовольняє умові Брюстера $\operatorname{tg} \alpha = n$, то відбита хвиля виявляється плоскополяризованою, причому вектор E у відбитому світлі коливається в площині, яка перпендикулярна до площини падіння (рис. 7.22, а). Кут α , який задовольняє умові Брюстера, називається **кутом повної поляризації** або **кутом Брюстера**. Можна довести, що при виконанні умови Брюстера відбиті та заломлені промені виявляються перпендикулярними один до одного. Дійсно, відповідно до закону заломлення світла

$$\sin \alpha / \sin \beta = n,$$

згідно з умовою Брюстера $\sin \alpha / \cos \alpha = n$, отже

$$\sin \beta = \cos \alpha,$$

звідки випливає, що $\alpha + \beta = 90^\circ$, тоді

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ.$$

Заломлений промінь у цьому разі виявляється максимально частково поляризованим у площині падіння (рис. 7.22, а). Недоліком поляризації при відбиванні є мала частка відбитого від діелектрика випромінювання (3–5% при відбиванні від скляної пластинки). Саме тому на практиці використовують багатократне відбивання від стопи пластинок. Промінь, що проходить крізь стопу, поступово звільняючись від коливань, перпендикулярних до площини падіння, стає практично плоскополяризованим у площині падіння (рис. 7.22, б).

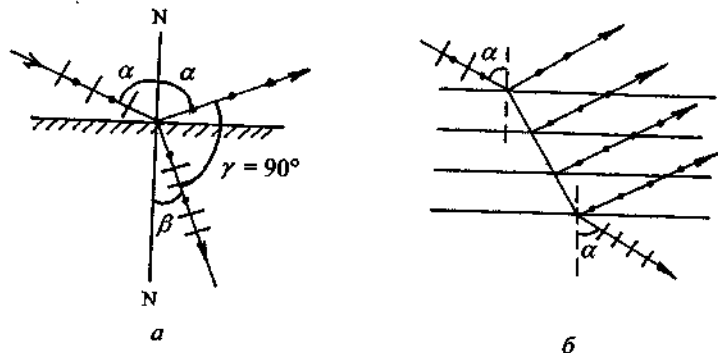


Рис. 7.22. Поляризація світла при відбиванні під кутом Брюстера

7.4.2. Поляризація при подвійному променезаломленні в кристалах

При проходженні світла крізь кристали (за винятком тих, котрі належать до кубічної системи) світловий промінь роз'єднується на два промені, які поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах (рис. 7.23). Це явище одержало назву *подвійного променезаломлення*. Для одного з цих двох променів не виконуються закони заломлення світла (він відхиляється від напрямку падаючого променя навіть при нульовому куті падіння на передню грань кристала) і тому він називається *незвичайним e*. Другий промінь, який задовольняє законам заломлення, зветься *звичайним o*. Подвійне променезаломлення пояснюють різними швидкостями поширення звичайних (v_o) та незвичайних (v_e) променів і тому різними показниками заломлення n_o і n_e .



Рис. 7.23. Подвійне променезаломлення в кристалі

Хід звичайних та незвичайних променів у кристалах можна наочно уявити за допомогою хвильових поверхонь. Уявіть, що всередині кристала відбувся світловий спалах, внаслідок чого в усі боки поширюються дві хвилі: звичайна та незвичайна. В деякий момент часу їх хвильові поверхні займуть положення, відображене на рис. 7.24. Сферичний фронт відповідає звичайній хвилі, а еліпсоїдальний – незвичайній, швидкість поширення якої залежить від напрямку. Для “додатних” кристалів $v_o > v_e$ (рис. 7.24, а), а для “від’ємних” $v_o < v_e$ (мал. 7.24, б). У кристалах існує напрямок, вздовж якого звичайний та незвичайний промені поширюються з однаковими швидкостями ($v_o = v_e$), просторово не розділяючись. Цей напрямок називається *оптичною віссю кристала*. Найбільша різниця швидкостей звичайного та незвичайного променів спостерігається в напрямку, перпендикулярному оптичній осі кристала. Площина в кристалі, яка проходить крізь оптичну вісь та падаючий промінь, називається *головною*. У звичайному промені вектор E коливається перпендикулярно головній площині, а у незвичайному – в головній площині.

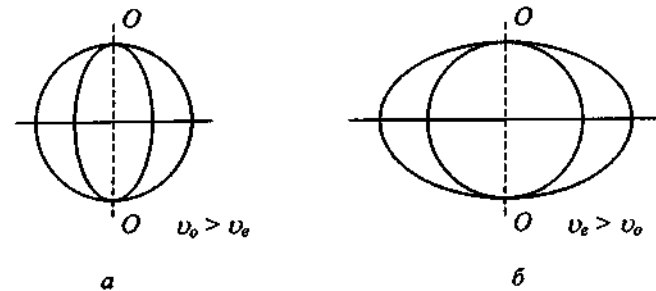


Рис. 7.24. Поширення в кристалі звичайної та незвичайної хвиль

Поляризовані промені виходять з кристала під дуже малими кутами. Треба підкреслити, що при виході з кристала обидва промені відрізняються лише площинами поляризації, саме тому назва “звичайний” та “незвичайний” має сенс лише всередині кристала. Для просторового розведення променів використовують різні засоби. Найбільш поширеним є використання *призми Ніколя* (рис. 7.25). З кристала ісландського шпату вирізають дві призми, а потім склеюють їх канадським бальзамом, показник

заломлення $n_{к.б.}$ якого має значення, проміжне між значеннями показників заломлення ісландського шпату для звичайного n_o та незвичайного n_e променів:

$$n_e < n_{к.б.} < n_o \quad (n_e = 1,486; n_{к.б.} = 1,556; n_o = 1,658).$$

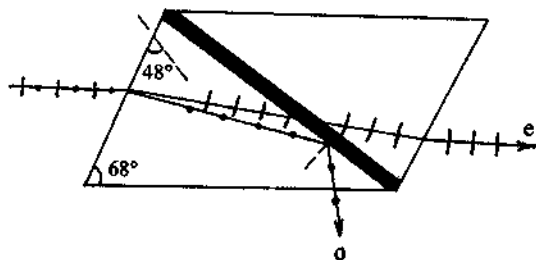


Рис. 7.25. Отримання поляризованого світла за допомогою призми Ніколя

Кути в призмі підібрані таким чином, щоб звичайний промінь на поверхні канадського бальзаму зазнав повне внутрішнє відбиття і відхилився вбік. Незвичайний промінь проходить прошарок канадського бальзаму і виходить з кристала (для нього не виконується умова повного внутрішнього відбиття, тому що $n_{к.б.} > n_e$).

7.4.3. Поляризація світла при проходженні крізь поглинаючі анізотропні речовини

У деяких кристалах, таких як турмалін, герпатит, один з променів при подвійному променезаломленні поглинається сильніше за інший. Так, наприклад, в турмаліні звичайний промінь поглинається практично повністю на шляху довжиною 1 мм, а в герпатиті – на шляху 0,1 мм. Кристали герпатиту наносять на целулоїдну плівку, орієнтуючи їх певним чином. Такий поляризатор називається *поляроїдом*. Слід відзначити, що і турмалін, і герпатит характеризуються селективним поглинанням не лише у відношенні до променів з різними площинами поляризації, але й з різними довжинами хвиль. Саме тому поляризоване світло, що виходить з кристала, виявляється забарвленим, причому в різних напрямках забарвлення різне. Це явище називається *діхроїзмом*.

Таким чином, поляризатори пропускають промені з певною площиною поляризації, яку назовемо площиною поляризатора, і затримують промені з коливанням E , які відбуваються перпендикулярно до площини поляризатора.

Поляризатор можна використовувати для аналізу поляризованого світла, в цьому випадку його називають *аналізатором*. Якщо поляризоване світло з амплітудою електричного вектора E падає на аналізатор, то він пропустить складову, що дорівнює проекції E на площину аналізатора PP (тобто E_{\parallel}), а складову E , яка перпендикулярна до площини аналізатора (тобто E_{\perp}), затримає повністю (рис. 7.26).

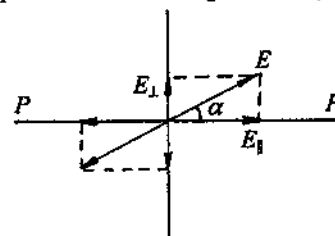


Рис. 7.26. Проходження поляризованого світла крізь аналізатор

З наведеного рисунка маємо: $E_{\parallel} = E \cos \alpha$, де α – кут між площиною поляризації падаючого світла та площиною аналізатора PP . Оскільки інтенсивність електромагнітної хвилі пропорційна E^2 , маємо:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha, \quad (7.13)$$

де I_0 – інтенсивність поляризованого світла, що падає на аналізатор; I – інтенсивність світла, що вийшло з аналізатора. Одержане рівняння (7.13) називається *законом Малюса*.

Основою приладів, які використовують для досліджень в поляризованому світлі, є система, що складається з поляризатора та аналізатора, між якими розміщують об'єкт, що мають досліджувати.

7.4.4. Обертання площини поляризації оптично активними речовинами

При проходженні плоскополяризованого світла крізь деякі речовини спостерігається обертання площини поляризації. Такі речовини називаються *оптично активними*. До них відносять

деякі кристали (наприклад, кварц), рідини (нікотин, скипідар), розчини біомолекул (білків, нуклеїнових кислот, полісахаридів).

Було встановлено, що кут обертання площини поляризації оптично активною речовиною становить:

$$\varphi = \varphi_0 L, \quad (7.14)$$

де L – відстань, яку світло проходить в оптично активній речовині; φ_0 – стала обертання. Для розчинів було встановлено такий закон:

$$\varphi = [\varphi_0] CL, \quad (7.15)$$

де C – концентрація оптично активної речовини; L – товщина шару розчину (довжина кювети); $[\varphi_0]$ – питоме обертання.

Питоме обертання $[\varphi_0]$ для даної оптично активної речовини залежить від температури, властивостей розчинника та довжини світлової хвилі. Залежність $[\varphi_0]$ від довжини хвилі визначається **законом Біо**:

$$[\varphi_0] \sim 1/\lambda^2.$$

Застосовуючи різні світлофільтри, можна дослідити залежність $[\varphi_0]$ від λ . Ця залежність називається **дисперсією оптичного обертання** (ДОО). Явище ДОО використовується для дослідження структури білків та нуклеїнових кислот, оскільки більшість біомолекул вміщують оптично активні центри. Прилади, які призначені для дослідження ДОО, називаються **спектрополяриметрами**. Молекули оптично активних речовин належать до класу оптичних ізомерів, такі молекули не мають дзеркальної симетрії.

Щоб розібратися в явищі оптичної активності, розглянемо асиметричну молекулу у вигляді спіралі (рис. 7.27). Нехай на молекулу падає промінь світла, поляризований вздовж осі OY . У цьому разі коливання вектора E викличе рух електронів вгору і вниз по спіралі, який можна вважати електричним струмом. Такий струм спричинює випромінювання електромагнітної хвилі, яка буде поляризована вздовж осі OY . Однак при русі електрона вздовж спіралі, з'являється складова вектора E вздовж осі OX (E_x), незважаючи на те, що падаюче випромінювання мало лише компоненту E_y . Таким чином, результуючий вектор E виявиться

поверненим на деякий кут φ щодо напрямку коливань E у падаючому на молекулу випромінюванні. При поширенні променя крізь речовину напрямком коливань вектора E буде поступово повертатися дедалі більше та більше. Величина повороту площини поляризації розчином оптично активної речовини виявиться тим більшою, чим більша кількість оптично активних молекул зустрінеться на шляху цього променя, тобто чим більша концентрація розчину і товщина його шару.

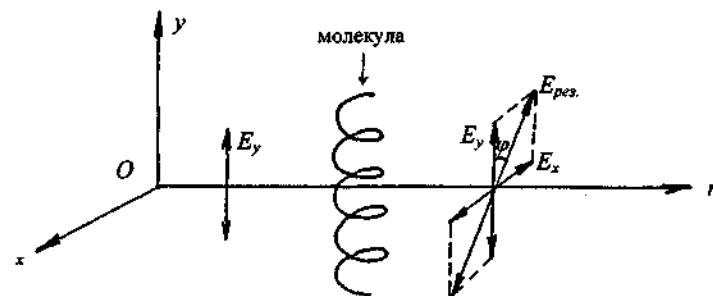


Рис. 7.27. Повертання площини поляризації молекулою оптичного ізомеру

7.5. ВЗАЄМОДІЯ СВІТЛА З РЕЧОВИНОЮ

Світлова хвиля, проходячи крізь речовину, викликає вимушені коливання електронів та іонів. Внаслідок цього спостерігається низка процесів, найбільш важливими з котрих є дисперсія, поглинання і розсіяння світла.

7.5.1. Дисперсія світла

Дисперсією світла називають залежність швидкості поширення світлових хвиль від частоти коливань (або від довжини хвилі). Внаслідок залежності $v = v(\lambda)$ показник заломлення речовини n також залежить від λ (або ν). Дисперсія світла в речовині визначається виглядом функції $n = f(\lambda)$. Залежність показника заломлення від довжини хвилі в оптичній області має складний характер. Розглянемо ділянки спектра, для яких речовина прозора (тобто ті довжини хвиль, які слабо

поглинаються речовиною). На цих ділянках залежність показника заломлення n від λ задовільно описується формулою Коші

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}, \quad (7.16)$$

де a та b – величини, що є сталими для даної речовини (рис. 7.28).

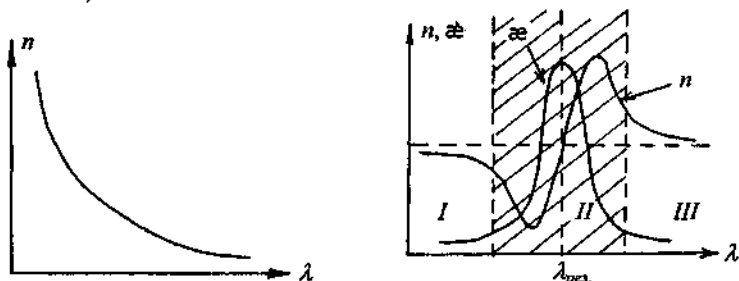


Рис. 7.28. Залежність показника заломлення від довжини хвилі на “прозорих” ділянках спектра (нормальна дисперсія)

На різних ділянках спектра дисперсія характеризується зміною показника заломлення, що припадає на одиницю спектрального інтервалу:

$$D = \frac{dn}{d\lambda}.$$

Величина D називається *дисперсією речовини*. Згідно з формулою Коші для прозорих ділянок спектра дисперсія речовини

$$D = \frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2b}{\lambda^3} < 0,$$

тобто із збільшенням довжини хвилі показник заломлення зменшується. Дисперсія, при якій показник заломлення зменшується із збільшенням довжини хвилі, називається *нормальною*.

На ділянках спектра, де відбувається сильне поглинання світла речовиною, показник заломлення поводиться інакше: спочатку він різко зменшується, потім швидко зростає, а досягнувши максимуму, знову різко зменшується (рис. 7.29).

Область II – область *аномальної дисперсії*. У цій області

$$D = \frac{dn}{d\lambda} > 0.$$

У значному проміжку довжин хвиль у кожній речовині спостерігають кілька областей аномальної дисперсії.

Формула Коші (7.16) є частинним випадком більш загального співвідношення, яке справедливе також і в області аномальної дисперсії:

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_{i=1}^k \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}, \quad (7.17)$$

де N – кількість атомів в одиниці об'єму речовини; f_i – так звана “сила осцилятора”; ω – частота світла. Осцилятором називається система, що подібна до пружинного маятника, який має масу m , заряд e і власну частоту ω_{0i} . Прийнято вважати, що в ультрафіолетовій частині спектрів поглинання роль осциляторів виконують електрони, тоді як в інфрачервоній – іони.

З формули (7.17) випливає, що при прямуванні частоти світла ω до власних частот коливань осциляторів ω_{0i} показник заломлення необмежено зростає ($n \rightarrow \pm \infty$). Насправді з урахуванням сил опору (тертя), що діють на осцилятори, це зростання стає обмеженим. Внаслідок зростання n при $\omega \rightarrow \omega_{0i}$ по вимірних частотах областей аномальної дисперсії можна визначити частоти власних коливань електронів та іонів в молекулах речовини. Крім того, при виконанні умови резонансу повинна спостерігатися інтенсивна передача енергії від хвилі, що поширюється, до атомів та молекул речовини, тобто повинно спостерігатися інтенсивне поглинання речовиною енергії випромінювання, що проходить крізь речовину.

7.5.2. Поглинання світла

Нехай на вході в поглинаючий шар товщиною L інтенсивність світлової хвилі дорівнює I_0 . Знайдемо інтенсивність світла I , що вийшло з цього шару речовини (рис. 7.30, а). Для нескінченно тонкого шару dx можна покласти, що відносно зменшення інтенсивності світла пропорційне до товщини dx цього шару, тобто

$$-\frac{dI}{I} = \alpha dx,$$

де α – коефіцієнт пропорційності, що називається *коефіцієнтом поглинання*.

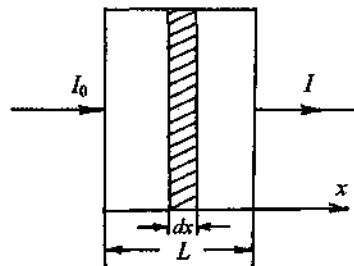


Рис. 7.30, а. Поглинання світла при проходженні крізь речовину

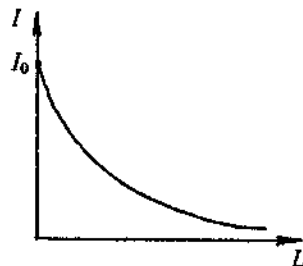


Рис. 7.30, б. Експоненціальне зменшення інтенсивності світла за рахунок поглинання

Проінтегруємо одержану рівність, що дає

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = - \int_0^L \alpha dx.$$

В результаті інтегрування маємо

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\alpha L$$

або

$$I = I_0 e^{-\alpha L}. \quad (7.18)$$

Одержана рівність називається *законом Бугера*. Вона описує експоненціальне зменшення інтенсивності світла при проходженні шару речовини товщиною L (рис. 7.30, б). Закон (7.18) був встановлений французьким фізиком П. Бугером у 1729 р.

Коефіцієнт поглинання α залежить від довжини хвилі випромінювання та природи поглинаючої речовини. Виміри показали, що в області аномальної дисперсії залежність $\alpha = f(\lambda)$ має різкий максимум (рис. 7.29). Якщо атоми та молекули практично не взаємодіють між собою (наприклад, в газах чи парах при невеликих тисках), то коефіцієнт поглинання відмінний від нуля лише на дуже вузьких спектральних дільницях. Ці максимуми відповідають резонансним частотам коливань електронів всередині атомів (рис. 7.31).

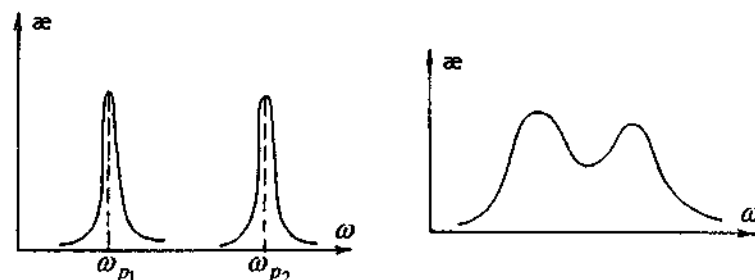


Рис. 7.31. Спектр поглинання світла твердих тіл, рідин та газів при високих тисках

Рис. 7.32. Спектр поглинання газами та парами при невеликих тисках

Розширення смуг поглинання є наслідком взаємодії атомів між собою. Так, наприклад, спектри поглинання твердих тіл, рідин та газів при високих тисках становлять досить широкі смуги (рис. 7.32).

Якщо поглинаючою речовиною виступає розчин, то коефіцієнт поглинання, як це було встановлено Бером, пропорційний до концентрації розчиненої речовини: $\alpha = \alpha_1 C$, де α_1 – коефіцієнт поглинання в розчині одичної концентрації. В цьому випадку закон поглинання світла набуває вигляду

$$I = I_0 e^{-\alpha_1 CL}. \quad (7.19)$$

Формула (7.19) називається *законом Бугера–Ламберта–Бера*. Іноді в цьому законі переходять від основи $e \approx 2,718$ до основи 10.

Тоді, оскільки $e = 10^{0,43}$, маємо

$$I = I_0 10^{-0,43 \alpha_1 CL} = I_0 10^{-\alpha'_1 CL}, \text{ де } \alpha'_1 = 0,43 \alpha_1.$$

Величину $\tau = I / I_0$ називають *коефіцієнтом пропускання*, а величину $D = -\lg \tau = \lg I_0 / I$ – *оптичною густиною* розчину. Таким чином,

$$D = \lg \frac{I_0}{I} = \alpha'_1 CL.$$

Спектри поглинання розчинів реєструються в координатах $D = f(\lambda)$ (рис. 7.33). Пристрій, що призначений для реєстрації спектрів поглинання, називається *спектрофотометром*. За допомогою спектрофотометра можна здійснювати якісний та кількісний аналіз суміші за її спектром поглинання, вивчати структуру та склад біологічних об'єктів, не порушуючи цілісності тканини.

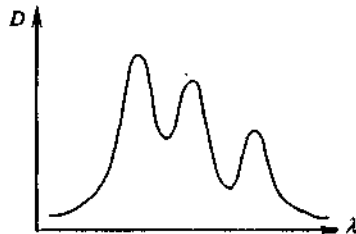


Рис. 7.33. Спектр поглинання світла розчином

Закон Бугера–Ламберта–Бера лежить в основі методу *концентраційної колориметрії* – фотометричного методу визначення концентрації речовини в забарвленому розчині.

Якщо два розчини певної речовини поглинають світло однаково, то відношення їх концентрацій обернено пропорційне відношенню довжин оптичних кювет. Дійсно, якщо $D_1 = D_2$, то

$$\alpha_1 C_1 L_1 = \alpha_1 C_2 L_2, \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{L_2}{L_1}.$$

На рис. 7.34 подано схему візуального плунжерного колориметра. Світло від джерела S , проходячи крізь конденсорну лінзу, падає на два стакани, один з яких наповнений стандартним розчином C_{cm} , а інший – розчином C_x , що досліджується. Висоти шарів розчинів регулюються за допомогою скляних стовпчиків – плунжерів. Проходячи крізь рідини та плунжери, світло попадає на призму, а потім в поле зору спостерігача. Способом занурення плунжерів у розчини домагаються однакової яскравості обох половин поля зору. У цьому випадку концентрація розчину, який досліджується, визначається із співвідношення:

$$C_x = \frac{C_{cm} \cdot L_{cm}}{L_x},$$

де L_{cm} та L_x визначаються по шкалах біля плунжерів.

7.5.3. Розсіюння світла

Коли світлова хвиля проходить крізь речовину, електрони всередині атомів та молекул здійснюють вимушені коливання з частотою падаючого випромінювання. У цьому випадку вони самі стають вторинними випромінювачами. Розрахунки свідчать про те, що в однорідних середовищах (оптичному склі, чистих, прозорих рідинах та газах) вторинні хвилі внаслідок інтерференції гасять одна одну по всіх напрямках, крім напрямку поширення світла, що проходить крізь речовину. Для повного гасіння необхідна умова однорідності середовища, тому що необхідна не лише когерентність, а й рівність інтенсивностей вторинних хвиль. При наявності неоднорідностей інтенсивність вторинних хвиль в різних місцях та напрямках буде мати різні

значення, а тому повного гасіння не відбудеться і спостерігатиметься явище *розсіяння світла*.

Розрізняють два види неоднорідностей:

1. Неоднорідності, що зумовлені присутністю мілких сторонніх частинок (туман, дим, емульсія, суспензія). Такі середовища, які складаються з мілких сторонніх частинок, завислих в однорідному середовищі, називаються *мутними*. Розсіяння світла в мутному середовищі називається *ефектом Тіндалля*.

2. Неоднорідності середовища, що спонукають до флуктуацій діелектричної проникності чи показника заломлення речовини, називаються *оптичними*. Розсіяння світла на флуктуаціях показника заломлення, що викликаються флуктуаціями густини, температури, концентрації тощо, називається *молекулярним* (нагадаємо, що флуктуація – це відхилення певної величини від її середнього значення).

Релей встановив, що під час розсіяння світла у мутному середовищі на частинках, менших за розміром, ніж $0,2\lambda$, а також при молекулярному розсіянні *інтенсивність розсіяного світла обернено пропорційна четвертій степені довжини хвилі (закон Релея)*:

$$I_{\text{розс}} = \frac{\text{const}}{\lambda^4}.$$

Якщо розміри неоднорідностей значно переважають довжину хвилі випромінювання, то

$$I_{\text{розс}} = \frac{\text{const}}{\lambda^2}.$$

Внаслідок розсіяння світла в усі інші напрямки інтенсивність світла в напрямку поширення зменшується скоріше, ніж у разі одного лише поглинання (рис. 7.35). Послаблення інтенсивності в цьому випадку описується такими формулами:

$$I = I_0 e^{-\mu L}, \quad I = I_0 10^{-\mu' L}, \quad (7.20)$$

де $\mu = \kappa + \alpha$ – коефіцієнт послаблення ($\mu' = 0,43\mu$); κ – коефіцієнт розсіяння; α – коефіцієнт поглинання, що віднесені до одиниці довжини шляху в речовині.

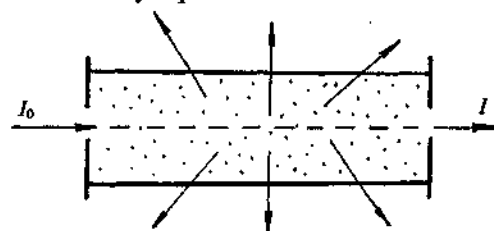


Рис. 7.35. Послаблення світла при проходженні крізь речовину внаслідок розсіяння.

Інтенсивність розсіяного світла в різних напрямках (в наближенні Релея) можна визначити за формулою

$$I_{\alpha} = I_{\pi/2}(1 + \cos^2 \alpha). \quad (7.21)$$

Слід відзначити, що світло, розсіяне під кутом $\alpha = \pi/2$ до напрямку випромінювання, що проходить крізь речовину, виявляється поляризованим, а за інтенсивністю вдвічі меншим розсіяного під кутами $\alpha = 0$ і $\alpha = \pi$. Методи виміру параметрів (інтенсивності, ступеню поляризації) розсіяного світла з метою одержання інформації щодо концентрації, розмірів частинок і макромолекул в розчинах та характеру міжмолекулярної взаємодії називаються *нефелометрією*, а самі пристрої – *нефелометрами*.

7.6. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ ТЕРМОГРАФІЇ, ЗАКОНИ ТЕПЛООВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

Теплове (температурне) випромінювання – це електромагнітне випромінювання тіл, що виникає за рахунок їх внутрішньої енергії (енергії теплового руху атомів та молекул). Теплове випромінювання властиве всім тілам, температура яких вища за абсолютний нуль.

Теплове випромінювання тіла людини переважає фізичні поля, що випромінюються ним і можуть бути зареєстровані. Потужність теплового випромінювання з кожного квадратного

сантиметра поверхні тіла становить приблизно 10^{-2} Вт , а загальна потужність випромінювання тіла людини $\sim 100 \text{ Вт}$.

Теплове випромінювання тіла людини має неперервний спектр, максимум якого залежить від температури тіла. Із збільшенням температури загальна енергія теплового випромінювання зростає, а максимум зсувається в бік менших довжин хвиль. Ці фактори можуть бути використані в медицині, зокрема в діагностиці. У здорової людини розподіл температури по різних точках поверхні тіла досить характеристичний. Але запальні процеси, пухлини здатні значно змінювати місцеву температуру. Таким чином, реєстрація випромінювання різних ділянок поверхні тіла і визначення їх температури може служити діагностичним методом. Такий метод називається *термографією*. Теоретичну основу цього методу становлять закони теплового випромінювання. Введемо основні характеристики теплового випромінювання.

Потік випромінювання Φ – середня потужність випромінювання за проміжок часу, який значно перевищує період електромагнітних коливань. Потік Φ вимірюється у ватах (Вт).

Потік випромінювання з одиниці площі поверхні тіла називають *енергетичною світністю тіла R_e* :

$$R_e = \frac{\Phi}{S}, \quad [R_e] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Енергетична світність тіла, що віднесена до одиниці спектрального інтервалу, називається *спектральною густиною енергетичної світності r_λ* :

$$r_\lambda = \frac{dR_e}{d\lambda}; \quad [r_\lambda] = \frac{[R_e]}{[\lambda]} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}.$$

Величина спектральної густини енергетичної світності залежить від довжини хвилі. Залежність $r_\lambda = f(\lambda)$ називається *спектром випромінювання* тіла. Зрозуміло, що енергетична світність по всьому спектру визначається через такий інтеграл:

$$R_e = \int_0^{\infty} r_\lambda d\lambda, \quad (7.22)$$

саме тому R_e називають ще й *інтегральною енергетичною світністю*.

Введемо характеристики поглинаючої здатності тіла.

Коефіцієнтом поглинання α називають величину, що дорівнює відношенню потоку випромінювання, що поглинається тілом ($\Phi_{\text{погл}}$), до потоку, що падає на тіло ($\Phi_{\text{пад}}$):

$$\alpha = \frac{\Phi_{\text{погл}}}{\Phi_{\text{пад}}}.$$

Якщо величина α віднесена до одиничного спектрального інтервалу, то говорять про *монохроматичний коефіцієнт поглинання*

$$\alpha_\lambda = \frac{\Phi_{\text{погл}}(\lambda)}{\Phi_{\text{пад}}(\lambda)}.$$

Тіло, для якого монохроматичний коефіцієнт поглинання дорівнює одиниці у всьому спектральному інтервалі і при будь-якій температурі, називається *абсолютно чорним*, тобто

$$\alpha_\lambda^{\text{абс.ч.т}} = 1.$$

Моделлю абсолютно чорного тіла може бути порожнина з дуже малим отвором (рис. 7.36). Промінь будь-якої довжини хвилі, що попав всередину такої порожнини, може вийти з неї тільки після багатократних відбивань. При кожному відбиванні від стінок порожнини частина енергії променя поглинається і лише мізерна частка енергії променів, що попали в отвір, зможе вийти назад; тому коефіцієнт поглинання отвору виявиться близьким до одиниці.

У теорії теплового випромінювання вводять також поняття *сірого тіла*. Це тіло, коефіцієнт поглинання якого менший за одиницю і не залежить від довжини хвилі. Тіло людини можна вважати сірим в інфрачервоній частині спектра, оскільки його коефіцієнт поглинання у цьому спектральному діапазоні $\alpha_\lambda \approx 0,9$.

На рис. 7.37 відображена залежність

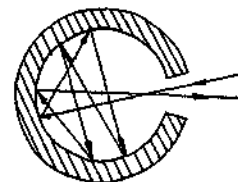


Рис. 7.36. Модель абсолютно чорного тіла

монохроматичного коефіцієнта поглинання довільного тіла від довжини хвилі при даній температурі. При зміні температури характер кривої $\alpha_\lambda = f(\lambda)$ може суттєво мінятися: довжини хвиль, що поглинаються при одній температурі, можуть пропускатися при іншій температурі, і навпаки.

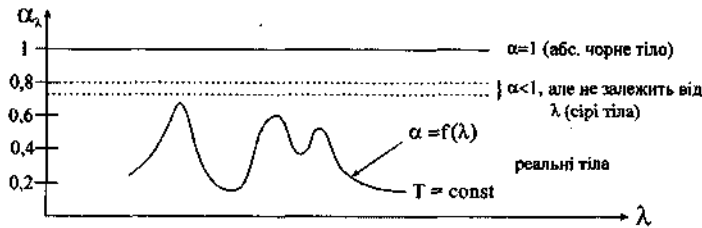


Рис. 7.37. Залежність монохроматичного коефіцієнта поглинання від довжини хвилі

Теплове випромінювання підпорядковується таким основним законам: закону Кірхгофа, який виконується для будь-якого тіла, та трьом законам, які виконуються лише для абсолютно чорного тіла – закону випромінювання Планка, закону Стефана–Больцмана і закону зміщення Віна.

7.6.1. Закон Кірхгофа

Закон Кірхгофа встановлює кількісний зв'язок між випромінюючою та поглинаючою здатностями тіл. Цей закон, який був отриманий Кірхгофом у 1859 році, стверджує, що *відношення спектральної густини енергетичної світності до монохроматичного коефіцієнта поглинання однакоє для всіх тіл при даній температурі і дорівнює спектральній густині енергетичної світності абсолютно чорного тіла при тій самій температурі:*

$$\left(\frac{r_\lambda(T)}{\alpha_\lambda(T)} \right)_1 = \left(\frac{r_\lambda(T)}{\alpha_\lambda(T)} \right)_2 = \dots = \frac{\varepsilon_\lambda(T)}{1} = \varepsilon_\lambda(T), \quad (7.23)$$

де ε_λ – спектральна густина енергетичної світності абсолютно чорного тіла.

Іншими словами, відношення випромінюючої здатності тіл до їх поглинаючої здатності не залежить від природи

випромінюючого тіла і дорівнює випромінюючій здатності абсолютно чорного тіла при даній температурі.

Із закону Кірхгофа маємо:

1. Спектральна густина енергетичної світності $r_\lambda(T) = \alpha_\lambda(T) \cdot \varepsilon_\lambda(T)$. Оскільки $\alpha_\lambda(T) < 1$ для реальних тіл, то завжди $r_\lambda(T) < \varepsilon_\lambda(T)$, тобто випромінююча здатність реального тіла завжди нижча, ніж у абсолютно чорного тіла.

На рис. 7.38 наведено експериментальні криві розподілу енергії в спектрах теплового випромінювання абсолютно чорного тіла 1, “сірого” тіла 2 і довільного тіла 3. Крива спектрального розподілу енергії для “сірого” тіла може бути отримана із кривої розподілу енергії для абсолютно чорного тіла шляхом множення ординат останньої на постійний множник, менший за одиницю і рівний коефіцієнту поглинання сірого тіла. Випромінювання деяких тіл є селективним. Крива випромінювання 3 таких тіл може мати кілька максимумів і мінімумів, але вся вона завжди розташована нижче кривої випромінювання абсолютно чорного тіла, як цього і потребує закон Кірхгофа.

2. Якщо $\alpha_\lambda(T) = 0$, то і $r_\lambda(T) = 0$, тобто якщо тіло не поглинає випромінювання, то воно його і не випромінює.

Таким чином, абсолютно чорне тіло є найбільш інтенсивним джерелом теплового випромінювання.

7.6.2. Закон випромінювання Планка

На рис. 7.39 наведені емпіричні криві розподілу енергії в спектрі теплового випромінювання абсолютно чорного тіла при різних температурах, з яких видно, що максимум спектральної густини енергетичної світності при зростанні температури зсувається в бік коротких хвиль. Довгий час не вдавалося теоретично отримати залежність $\varepsilon_\lambda = f(\lambda, T)$, яка б відповідала експерименту, тобто класична фізика виявилася нездатною пояснити закон розподілу енергії в спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла.

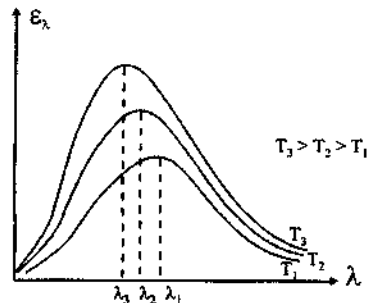
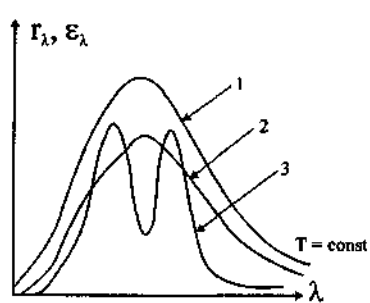


Рис. 7.38. Криві розподілу енергії в спектрах теплового випромінювання різних тіл

Рис. 7.39. Спектри теплового випромінювання абсолютно чорного тіла при різних температурах

Для визначення виду функції $\varepsilon_\lambda(T)$ потрібні були зовсім нові ідеї щодо механізму випромінювання світла. У 1900 році М. Планк висунув гіпотезу, згідно з якою поглинання і випромінювання енергії атомами і молекулами відбувається окремими порціями – квантами (у той час, як класична фізика розглядала поглинання і випромінювання як неперервні процеси). На підставі цього припущення, яке поклало початок розвитку квантової механіки (див. розділ 9), Планком була отримана така формула для спектральної густини енергетичної світності абсолютно чорного тіла ε_λ :

$$\varepsilon_\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1}, \quad (7.24)$$

де h – стала Планка; c – швидкість світла у вакуумі; k – стала Больцмана.

Якщо розподіл енергії в спектрі абсолютно чорного тіла подавати в шкалі частот, то замість ε_λ треба ввести енергетичну світність, віднесено до одиничного інтервалу частот

$$\varepsilon_\nu = \frac{dR_e}{d\nu}.$$

Оскільки $\nu = c/\lambda$, то $|d\nu| = (c/\lambda^2)d\lambda$, звідки отримаємо такий зв'язок між ε_λ та ε_ν :

$$\varepsilon_\nu = \frac{dR_e}{d\nu} = \frac{\lambda^2}{c} \frac{dR_e}{d\lambda} = \frac{\lambda^2}{c} \varepsilon_\lambda.$$

Враховуючи цей зв'язок, формулу Планка (7.24) можна подати у вигляді

$$\varepsilon_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (7.25)$$

Криві $\varepsilon_\lambda = f(\lambda, T)$, розраховані за формулою (7.24), повністю відповідають експериментальним кривим (див. рис. 7.39).

7.6.3. Закон Стефана–Больцмана

Враховуючи формулу Планка (7.25) для спектральної густини енергетичної світності абсолютно чорного тіла, отримаємо формулу для інтегральної енергетичної світності. Згідно з (7.22) маємо

$$R_e = \int_0^\infty \varepsilon_\nu d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Застосувавши заміну змінної $\frac{h\nu}{kT} = x$, отримаємо

$$R_e = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^3 d\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Можна показати, що інтеграл $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$. В результаті

маємо

$$R_e = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} T^4 = \sigma T^4, \quad (7.26)$$

де $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$ – стала Стефана–Больцмана.

Таким чином, згідно з формулою (7.26), *інтегральна енергетична світність абсолютно чорного тіла пропорційна четвертій степені його абсолютної температури*. Це і є закон **Стефана–Больцмана**. Закон був встановлений спочатку на підставі експериментальних даних австрійським фізиком Стефаном у 1879 р., а пізніше був отриманий теоретично також австрійським фізиком Больцманом у 1884 р. Закон свідчить про надзвичайно швидке зростання потужності теплового випромінювання із збільшенням температури тіла. Закон Стефана–Больцмана можна застосовувати до теплового випромінювання тіла людини, вважаючи його “сірим”. У цьому випадку замість сталої Стефана–Больцмана використовують наведений коефіцієнт випромінювання δ :

$$R_e = \delta T^4,$$

де $\delta = \alpha\sigma$, тобто наведений коефіцієнт випромінювання дорівнює добутку сталої Стефана–Больцмана на коефіцієнт поглинання α , який є менший за одиницю для сірих тіл.

7.6.4. Закон зміщення Віна

Закон Віна встановлює зв'язок між температурою T тіла і тією довжиною хвилі λ_{\max} (або частотою ν_{\max}), на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності у спектрі теплового випромінювання абсолютно чорного тіла.

Довжину хвилі λ_{\max} можна визначити, досліджуючи функцію $\epsilon_\lambda = f(\lambda)$ на екстремум, тобто з умов

$$\frac{d\epsilon_\lambda}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d\epsilon_\nu}{d\nu} = 0.$$

З розв'язку цих рівнянь можна отримати **закон Віна**:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}; \quad \nu_{\max} = \frac{c}{b}T, \quad (7.27)$$

де коефіцієнт $b = 0,29 \cdot 10^{-2}$ м·К називається сталою Віна.

Таким чином, *довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності абсолютно чорного тіла, обернено пропорційна до його абсолютної*

температури або частота, що відповідає максимальній випромінюючій здатності абсолютно чорного тіла, прямо пропорційна до його абсолютної температури.

Із закону Віна випливає, що із зростанням температури довжина хвилі, на яку припадає максимальна випромінююча здатність, зсувається в бік менших довжин хвиль (більших частот). Саме тому цей закон і називається “законом зміщення”.

Оцінимо значення λ_{\max} у спектрі теплового випромінювання тіла людини. Для температури поверхні шкіри $t = 32^\circ\text{C}$ ($T = 273 + 32 = 305$ К) маємо

$$\lambda_{\max} = \frac{0,29 \cdot 10^{-2}}{305} \approx 10 \text{ мкм}.$$

Отримана довжина хвилі припадає на інфрачервоний діапазон, тобто не сприймається людським оком. Слід підкреслити, що на цю довжину хвилі припадає “вікно прозорості” в атмосфері, тобто ця довжина хвилі майже не поглинається атмосферою. У протилежному випадку, згідно із законом Кірхгофа, людина “засмажилася” б у власному тепловому випромінюванні.

Закон Стефана–Больцмана та закон Віна становлять основу **термографії** – діагностичного методу, який використовує теплове випромінювання тіла людини для визначення локальної температури. Значною перевагою термографії над багатьма іншими методами (наприклад, методами рентгенодіагностики) є те, що при термографічних дослідженнях використовується власне теплове випромінювання тіла людини, а не зовнішнє випромінювання, яке досить часто супроводжується значним дозовим навантаженням. Визначення температури поверхні тіла в методі термографії може здійснюватися двома способами. Перший – полягає у застосуванні рідиннокристалічних індикаторів, оптичні властивості яких дуже чутливі до найменших змін температури. Розмішуючи ці індикатори на тілі хворого, можна візуально визначити місцеві відхилення значень температури. Другий – полягає у візуалізації температурного поля поверхні тіла за допомогою пристроїв, що називаються **тепловізорами**. Основний принцип цього методу полягає у

зв'язку величини сигналу, що реєструється приладом, з випромінюючою здатністю поверхні тіла, яка, в свою чергу, залежить від температури у відповідності до закону Стефана-Больцмана.

Експерименти щодо реєстрації теплового випромінювання тіла людини, проведені в Інституті радіоелектроніки РАН (Москва), дали несподівані результати. Виявилось, що:

1) температура тіла змінюється стрибками з частотою, що співпадає з частотою серцевих скорочень; амплітуда цих коливань досягає приблизно $0,5^{\circ}\text{C}$ щодо середньої локальної температури;

2) після локального нагрівання в процесі охолодження температура "проскакує" середнє значення, спускаючись приблизно на $4-5^{\circ}\text{C}$, а потім, коливаючись, наближається до середнього значення (рис. 7.40);

3) у спряжених точках тіла також спостерігається ефект зворотного зв'язку ("проскакування" середнього значення). Наприклад, при локальному нагріванні лівої кисті, ефект подальшого охолодження спостерігається у такій самій точці правої кисті.

7.6.5. Випромінювання Сонця

Розподіл енергії у спектрі теплового випромінювання Сонця наведено на рис. 7.41. Крива 1 відповідає спектру сонячного випромінювання на межі з атмосферою, а крива 2 – на поверхні Землі. Крива 1 близька до спектра абсолютно чорного тіла, її максимум припадає на довжину хвилі $\lambda_{m1} = 470 \text{ нм}$, що, згідно із законом Віна, відповідає температурі поверхні Сонця 6100 К .

На 1 м^2 межі земної атмосфери падає потік випромінювання від Сонця $\sim 1350 \text{ Вт}$. Ця величина називається *сонячною сталою*. Біля поверхні Землі потік радіації значно слабкіший і не перевищує 1120 Вт/м^2 у районі екватора.

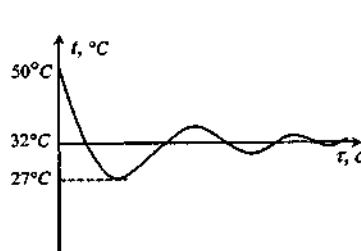


Рис. 7.40. Зміна температури тіла людини з часом при локальному нагріванні

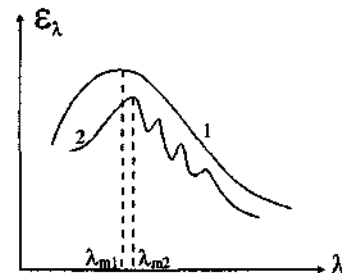


Рис. 7.41. Теплове випромінювання людини з часом при локальному нагріванні

Крива 2 вміщує низку провалів, які відповідають лініям поглинання сонячної радіації у земній атмосфері. Максимум кривої 2 припадає на $\lambda_{m2} = 555 \text{ нм}$, що відповідає жовто-зеленій частині спектра.

7.6.6. Інфрачервоне випромінювання

Електромагнітне випромінювання у діапазоні довжин хвиль від $\lambda = 0,76 \text{ мкм}$ до $\lambda = 2000 \text{ мкм}$ називають *інфрачервоним* (ІЧ). Цей діапазон умовно поділяють на три області: близьку ($\lambda = 0,76-2,5 \text{ мкм}$), середню ($\lambda = 2,5-50 \text{ мкм}$) і далеку ($\lambda = 50-2000 \text{ мкм}$).

Згідно із законом зміщення Віна, границям ІЧ випромінювання відповідають температури в інтервалі $1,5+3800 \text{ К}$. Це означає, що практично всі рідкі і тверді тіла є джерелами ІЧ випромінювання.

Лікувальна дія ІЧ випромінювання пов'язана з тепловим ефектом. Найкращий результат отримують при використанні близької області ІЧ випромінювання. ІЧ випромінювання проникає в тіло на глибину $\sim 2 \text{ см}$, тому найкраще прогріваються поверхневі шари. При цьому покращуються терморегуляція, кровопостачання та інші життєво важливі процеси.

7.6.7. Ультрафіолетове випромінювання

Електромагнітне випромінювання у діапазоні довжин хвиль від $\lambda = 400 \text{ нм}$ до $\lambda = 10 \text{ нм}$ називають *ультрафіолетовим* (УФ).

Весь діапазон УФ випромінювання умовно поділяють на чотири області: *A* ($\lambda = 400\text{--}315\text{ нм}$), *B* ($\lambda = 315\text{--}280\text{ нм}$), *C* ($\lambda = 280\text{--}200\text{ нм}$) і вакуумну ($\lambda = 200\text{--}10\text{ нм}$). Остання назва пояснюється тим, що УФ випромінювання з $\lambda < 200\text{ нм}$ сильно поглинається в повітрі і тому його зручно досліджувати у вакуумі.

Джерелом УФ випромінювання є тіла, що нагріті до досить високої температури. Для одержання найдовшої довжини хвилі УФ діапазону $\lambda = 400\text{ нм}$ необхідно мати тіло при температурі $T = 7250\text{ К}$. Тобто в звичайних умовах оточуючі нас тіла не можуть бути потужними джерелами УФ випромінювання. Найбільш потужним джерелом УФ випромінювання є Сонце, для якого 9% випромінювання на межі земної атмосфери припадає на ультрафіолетовий діапазон.

Медичне застосування УФ випромінювання пов'язане з його специфічною біологічною дією, що спричинює фотохімічні реакції. Область *A* важлива для утворення пігменту, що надає шкірі забарвлення. Область *B* має антирахітичну дію, але у великих дозах – канцерогенну. Область *C* застосовують для бактерицидної дії.

7.7. БІОФІЗИЧНІ ОСНОВИ ЗОРОВОЇ РЕЦЕПЦІЇ

Око, як відомо, становить складну оптичну систему, яка до того ж є джерелом інформації і про деякі незорові захворювання.

Розглянемо будову ока (рис. 7.42). Очне яблуко має майже сферичну форму діаметром $d = 24\text{--}25\text{ мм}$. Зовнішня білкова оболонка – склера 1 – у передній частині перетворюється в прозору, опуклу роговицю 2. Роговиця є частиною ока, що має найбільшу заломлюючу силу (показник заломлення $n = 1,38$). До склери прилягає судинна оболонка 3, яка на передній частині пігментована і утворює практично непрозору райдужну оболонку 4. Пігментні клітини визначають колір райдужної оболонки, тобто “колір ока”. Райдужна оболонка має отвір – зіницю, що відіграє роль апертурної діафрагми. Діаметр зіниці за допомогою м'язових волокон змінюється від $d = 2\text{--}3\text{ мм}$ до $d = 6\text{--}8\text{ мм}$. До зіниці прилягає кришталік 5 – прозоре тіло, подібне до двоопуклої лінзи. Показник заломлення змінний і становить $n = 1,38$ на периферії і $n = 1,40\text{--}1,42$ в центрі. Між роговицею та

кришталіком розташована передня камера 6, заповнена водянистою вологою. Внутрішню частину ока заповнює прозора студениста маса – скловидне тіло 7, що має такий самий показник заломлення, як і водяниста волога, а саме: $n = 1,366$. До судинної оболонки в задній частині, що має назву окового дна, прилягає сітківка, або ретина 8, яка відіграє роль світлосприймаючого екрану. Заломлюючі середовища ока – роговиця, волога передньої камери, кришталік, скловидне тіло – утворюють разом центровану оптичну систему (ЦОС) з головною віссю (ОО), що проходить через центри роговиці, зіниці та кришталіка. Око має також зорову вісь ($O'O'$), яка проходить через центри кришталіка та жовтого п'ятна – найчутливішої частини сітківки.

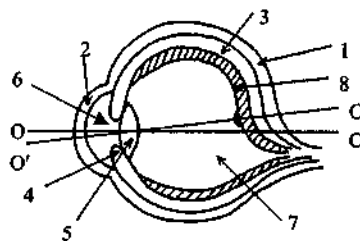


Рис. 7.42. Будова ока

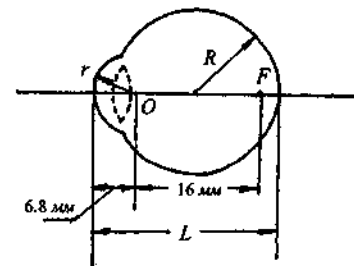


Рис. 7.43. Приведене око в моделі Вербицького

Для ЦОС ока оптична сила становить $D = \sum D_i$, де D_i – оптичні сили елементів цієї системи. Оптичні сили елементів ока, чутливих до світла, становлять $D_{\text{роговиці}} = 43\text{ дптр}$, $D_{\text{кришталіка}} = 18\text{--}20\text{ дптр}$, $D_{\text{передн. камери}} + D_{\text{склов. тіла}} = 3\text{--}5\text{ дптр}$. Таким чином, $D_{\text{ока}} = \sum D_i = 63\text{--}65\text{ дптр}$.

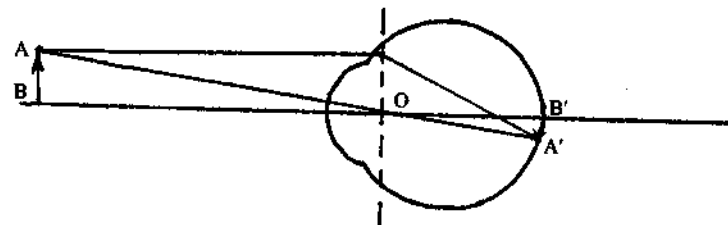


Рис. 7.44. Побудова зображення в приведеній оптичній системі

Для побудови зображення на сітківці ока використовують так зване *приведене око*. Розглянемо приведенне око у моделі Вербицького (рис. 7.43). Радіус сфери $R = 10,2$ мм. Радіус передньої заломлюючої поверхні $r = 6,8$ мм. Довжина лінзи вздовж осі $L = 23,4$ мм. Головний фокус F знаходиться на відстані 16 мм від оптичного центра. Показник заломлення лінзи $n = 1,4$, а оптична сила $D = 64$ дптр. Побудова зображення у приведенному оці здійснюється за тими ж правилами, як і для однієї лінзи: предмет знаходиться за подвійним фокусом, зображення – на задній поверхні приведенного ока – дійсне, зменшене (рис. 7.44). Віддалені предмети, що знаходяться на різній відстані від ока, повинні давати на сітківці однаково різкі зображення. Тому око є системою, здатною до самонастроювання.

Відповідно до формули лінзи $\frac{1}{d} + \frac{n}{f} = \frac{n-1}{R}$ кожному

значенню d повинно відповідати певне значення f . Але $f = \text{const}$, тому зменшення d повинно компенсуватися зміною радіуса кривизни R кристаліка або фокусної відстані $F = nR / (n - 1)$, тобто із зменшенням d збільшується кривизна кристаліка або, що теж саме, зменшується радіус кривизни R . Таким чином, око здатне до акомодатії. *Акомодатія* – це здатність ока утворювати на сітківці однаково різкі зображення по-різному віддалених предметів. Акомодатія здійснюється за допомогою зміни оптичної сили D ока за рахунок зміни кривизни заломлюючих поверхонь кристаліка: радіус передньої поверхні може змінюватись від 10 до 5,5 мм, а задньої – від 6 до 5,5 мм. Відстань, на якій око розглядає предмет без напруги акомодатії, називають відстанню найкращого зору. Типово ця відстань складає 25 см.

Розглянемо недоліки оптичної системи ока. Властиві лінзам аберації для ока не є характерними, тому що: 1) сферична аберація усувається тим, що око пропускає лише центральний пучок світла; 2) хроматична аберація усувається тим, що око найбільш чутливе до вузької жовто-зеленої частини спектра; 3) астигматизм похилих променів усувається тим, що око автоматично встановлюється у напрямку предмета, що

спостерігається, і до нього потрапляють лише центральні промені.

Оптичній системі ока притаманні такі недоліки:

1) *Короткозорість (міопія)* – подовжена форма очного яблука або занадто велика заломлююча здатність середовища ока при нормальній формі, що призводять до формування зображення перед сітківкою (рис. 7.45, а). Усувається міопія використанням розсіювальних лінз, тобто лінз з оптичною силою $D < 0$ (рис. 7.45, б).

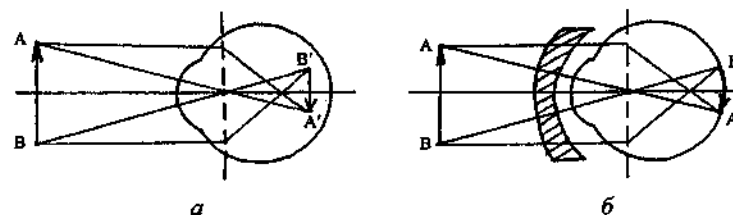


Рис. 7.45. Формування зображення в оці при міопії а та її усунення за допомогою розсіювальних лінз б

2) *Далекозорість (гіперметропія)* – недостатня заломлююча здатність ока, внаслідок якої зображення формується позаду сітківки (рис. 7.46, а). Частково око усуває цей недолік за допомогою акомодатії, але внаслідок границі акомодатії застосовують збиральні лінзи, які посилюють заломлюючу здатність ока, тобто лінзи з оптичною силою $D > 0$ (рис. 7.46, б).

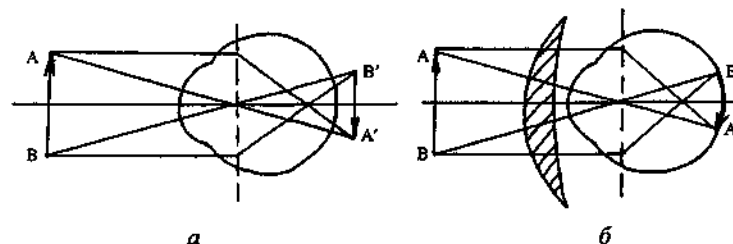


Рис. 7.46. Формування зображення при гіперметропії а та її усунення за допомогою збиральних лінз б.

3) *Астигматизм*, пов'язаний з порушенням правильної сферичної форми поверхні роговиці. Усувається циліндричними лінзами або лінзами спеціальної форми.

Оптичне зображення формується на сітківці. Відчуття світла з'являється при дії на світлочутливий елемент сітківки ока електромагнітного випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = (760 - 400 \text{ нм})$. Сітківка має товщину $\sim 0,5 \text{ мм}$ і складається з кількох шарів, що вміщують волокна зорового нерва (I), опорні утвори (II) і світлочутливі клітини (III), периферичні кінці яких мають різну форму (рис. 7.47). Подовжені кінці називають паличками, а конусоподібні – колбочками. На сітківці ока розташовано близько 130 млн паличок та 7 млн колбочок. Колбочки і палички розподілені нерівномірно: колбочки, головним чином, розташовані в центральній частині сітківки, тоді як палички – лише на краях сітківки.

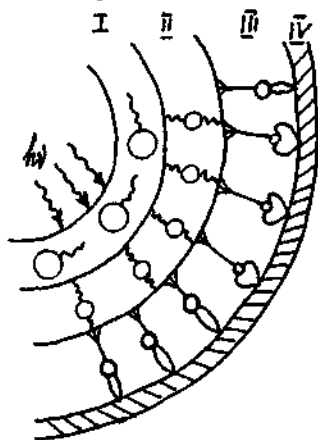


Рис. 7.47. Будова сітківки ока

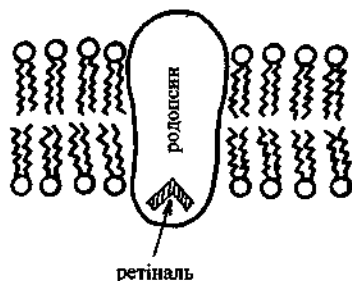


Рис. 7.48. Родопсин, вбудований в ліпідний бішар мембран зорових дисків

Як палички, так і колбочки орієнтуються в напрямку світла своїми внутрішніми сегментами, які не вміщують зорових пігментів. Світлочутливі рецептори (палички і колбочки) межують з епітеліальним шаром (IV), який зменшує частку світла, що розсіюється і відбивається від задньої стінки ока.

Розглянемо будову і функції паличок. Зоровий пігмент паличок – родопсин – вбудований в ліпідний шар мембран так званих зорових дисків, що знаходяться в зовнішньому сегменті

паличок (рис. 7.48). Родопсин – складний білок, що складається з білка опсину і хромофорної групи ретіналю ($C_{19}H_{27}CHO$ – альдегіду вітаміну А).

Ретиналь має кілька конформерів (цис- та транс-конформери зображені на рис. 7.49). 11-цис-ретиналь точно вміщується в центр зв'язку молекули опсину.

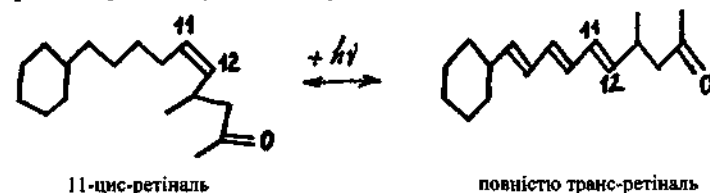


Рис. 7.49. Фотоізомеризація ретіналю

Під дією падаючого випромінювання відбувається фотоізомеризація ретіналю. Внаслідок фотохімічного утворення трансформи стерична відповідність між опсином і ретіналем порушується, що супроводжується низкою конформаційних перебудов молекули опсину, які і призводять до виникнення нервового імпульсу (рис. 7.50).

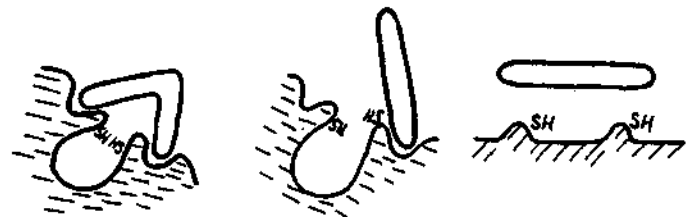


Рис. 7.50. Механізм виникнення нервового імпульсу внаслідок фотоізомеризації ретіналю та конформаційної перебудови опсину

Після освітлення палички коротким спалахом світла спостерігається ранній рецепторний потенціал (РРП), що триває близько 1 мс. РРП зумовлений переміщенням фіксованих на поверхні родопсину зарядів щодо подвійного шару ліпідних молекул. Величина РРП не перевищує $5 \cdot 10^{-3} \text{ В}$. Через 1 мс спостерігається пізній рецепторний потенціал (ПРП), що зумовлений зміною проникності цитоплазматичних мембран зовнішніх сегментів паличок. При відсутності збудження

мембрана має значну натрієву провідність. Під час збудження відбувається визволення із зорових дисків іонів калію і зачинення натрієвих каналів. Внаслідок цього значення мембранного потенціалу зсувається до значення калієвого рівноважного потенціалу. На відміну від інших, розглянутий рецепторний потенціал має не деполяризаційний, а гіперполяризаційний характер; мембранний потенціал рецепторної клітини під дією світла може змінюватись від -25 мВ до -40 мВ.

Палички мають високу світлочутливість, але не забезпечують розпізнавання кольорів. Саме тому їх називають апаратом ахроматичного (сутінкового) зору.

Колбочки мають нижчу світлочутливість, тобто сприймають світло при відносно великій освітленості сітківки, але при цьому забезпечують здатність розрізнення більш мілких деталей предмета і створюють відчуття кольору.

Чутливість ока до монохроматичного випромінювання різних довжин хвиль суттєво відрізняється. Для адаптованого до денного світла ока графік спектральної чутливості має вигляд кривої А з максимумом $\lambda_{\text{max}} = 550$ нм в жовто-зеленій ділянці спектра (рис. 7.51). При сутінковому зорі випромінювання різних довжин хвиль викликає однакове відчуття блакитно-сірого кольору. Максимум кривої спектральної чутливості (рис. 7.51, крива В) зсувається в бік менших довжин хвиль ($\lambda_{\text{max}} \approx 510$ нм). Доведено, що крива В співпадає з кривою поглинання родопсину. Що ж до кривої А, то її максимум на довжині хвилі $\lambda_{\text{max}} \approx 550$ нм співпадає з максимумом спектра поглинання пігменту в найбільш поширеному типі колбочок.

Пігмент вміщує той самий 11-цис-ретіналь, що й родопсин. Що ж до білкової частини пігменту, то вона відрізняється і називається йодопсином. Поглинання світла йодопсинами призводить до появи РРП в колбочках.

Відповідно до теорії кольорового зору існує три типи колбочок, кожна з яких вміщує лише один тип йодопсину. Максимуми поглинання трьох типів йодопсинів відповідають 445, 535 та 370 нм (рис. 7.52).

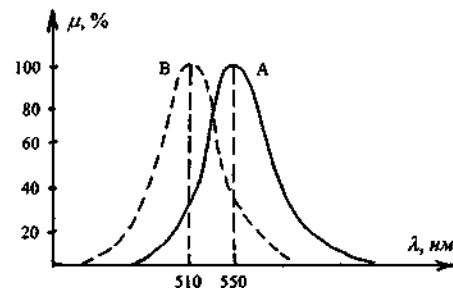


Рис. 7.51. Криві спектральної чутливості ока до денного А та сутінкового В світла

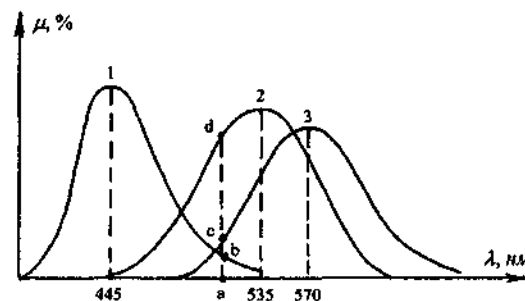


Рис. 7.52. Криві спектральної чутливості трьох типів йодопсинів: 1 – синьо-фіолетового; 2 – зеленого; 3 – червоного

Рецептори всіх трьох типів збуджуються під дією світла будь-якої довжини хвилі, але у різних співвідношеннях, пропорційних ординатам відповідних кривих. Наприклад, під дією випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 500$ нм “червоні” рецептори збуджуються пропорційно ординаті ac , “зелені” – ad , а “синьо-фіолетові” – ab . Імпульси від цих рецепторів передаються до головного мозку, де і утворюють єдине кольорове відчуття.

Якщо теорія сутінкового зору вважається нині досить обґрунтованою, про що свідчить присудження за її створення Нобелівської премії американському біофізику Дж. Уолду, то теорія кольорового зору перебуває в процесі постійного розвитку і вдосконалення. Так, одна з гіпотез про сприйняття кольорів базується на ідеї, що навіть окрема колбочка чи паличка може аналізувати весь спектральний склад видимого світла. Певні

підстави для такої гіпотези є, а саме: зовнішні сегменти колбочок і паличок складаються з великої кількості (до 1500–1700) дисків, які утворюють циліндричну стопу. Виходячи з теорії поширення світла в такій дисперсній системі, можна довести, що світло різної довжини хвилі послаблюється неоднаково при проходженні крізь стопу дисків кожної колбочки і палички. Підставою для цього є формула: $\mu_{\text{посл}} \approx 1/\lambda$, де $\mu_{\text{посл}}$ – коефіцієнт послаблення світлового потоку на одиницю довжини шляху променю, а λ – довжина світлової хвилі. Звідси випливає, що синє світло поглинається в дисках сильніше, ніж червоне. Таким чином, при проходженні світла крізь стопу дисків із світлового потоку відбирається спочатку більш короткохвильова частина спектра, світловий потік поступово “червоніє”, тобто в наступних дисках поглинається більш довгохвильова частина спектра. Це й дає змогу провести спектральний аналіз світлового променя, не використовуючи уяву про три типи йодопсинів.

7.8. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

7.8.1. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА

“Вивчення мікроскопа та вимірювання мікрооб’єктів”

Мета роботи: Вивчення мікроскопа та способів роботи з ним. Вимірювання геометричних розмірів мікроскопічних об’єктів.

Прилади та матеріали: мікроскоп біологічний, освітлювач, об’єкт-мікрометр, дифракційна решітка, мікрооб’єкт.

Контрольні питання для підготовки до лабораторної роботи

1. Формула лінзи. Збільшення лінзи. Аберації лінз – сферична, хроматична, астигматизм.
2. Центрована оптична система (ЦОС).
3. Оптична система та будова біологічного мікроскопа. Формула збільшення мікроскопа.
4. Межа розрізнення, роздільна здатність, корисне збільшення мікроскопа.
5. Деякі спеціальні засоби мікроскопії: імерсійний мікроскоп, метод темного поля, метод фазового контрасту, мікрофотографія.

Додаткова література

1. Ливенцев Н.М. Курс фізики. – М.: Высшая школа, 1978. – Ч. 1.
2. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996.

Короткі теоретичні відомості

Мікроскоп (від грецького *micros* – маленький та *skopio* – дивлюсь) – оптичний пристрій для одержання значно збільшених зображень об’єктів або деталей їх структури. Різні типи мікроскопів застосовують для визначення та дослідження бактерій, органічних клітин, мілких кристалів та інших об’єктів, розміри яких менші за мінімальну роздільну здатність ока (мінімальна роздільна здатність ока $Z_{\text{min}} \approx 0,1$ мм). За допомогою мікроскопа визначають форму, розміри та інші характеристики мікрооб’єктів. Мікроскоп дає змогу розрізнити структури, відстань між елементами котрих мають порядок 0,2 мкм.

У біологічному мікроскопі, загальний вигляд якого наведено на рис. 7.53, розрізняють три основні частини: механічну, освітлювальну та оптичну. До механічної частини належить штатив, що складається з основи та тубусодержака. Об’єкт, що розглядається, розміщують на предметному столику 1. Предметний столик має отвір для променів, що освітлюють об’єкт. Тубус 2 мікроскопа розташований над отвором предметного столика. Нормальна довжина тубуса – 160 мм, в ньому монтується основна частина мікроскопа. У нижній частині тубуса розташований револьвер 3, обертаючи який можна вводити в оптичну систему різні об’єктиви. У верхній частині тубуса розташований окуляр. Звичайні об’єктиви мікроскопів мають збільшення від 6,3 до 100, а окуляри – від 7 до

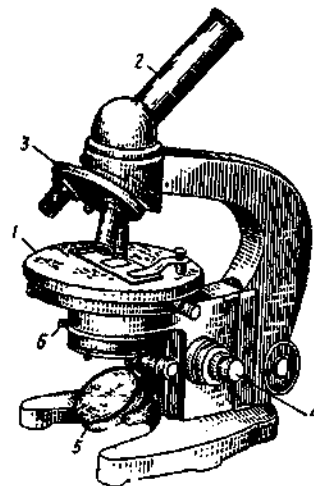


Рис. 7.53. Зовнішній вигляд мікроскопа

15. Таким чином, загальне збільшення мікроскопа лежить в межах від 44 до 1500. Макрометричний та мікрометричний гвинти (кремал'єри) 4 призначені для переміщення тубуса мікроскопа, за їх допомогою здійснюється наведення на фокус.

Оптична частина, що розташована, як правило, в тубусі мікроскопа, становить центровану оптичну систему, яка складається з двох лінз – об'єктива та окуляра. Хід променів в мікроскопі див. на рис. 7.18.

Освітлювальна частина мікроскопа складається з дзеркала 5 та конденсора 6, який призначається для концентрування світлових променів. Об'єкт можна освітлювати за допомогою дзеркала та конденсора як штучним, так і природним джерелами світла.

Порядок виконання лабораторної роботи

Завдання 1. Підготувати мікроскоп до роботи.

Якщо використовувати природне освітлення, мікроскоп необхідно розташувати таким чином, щоб дзеркало 5 було обернене до вікна і відбивало світло від яскравої ділянки неба. Спостерігаючи в окуляр, домогтися рівномірного освітлення поля зору за допомогою конденсора та дзеркала. При використанні штучного освітлення на дзеркало спрямовують світло від лампи.

Завдання 2. Визначити ціну поділки S окулярної шкали.

Для цього на предметному столику розташовують об'єкт-мікрометр, ціна поділки якого дорівнює $0,01$ мм. Підсвічуючи об'єкт-мікрометр зверху (відбитим світлом), обертанням кремал'єр 4 грубої та тонкої наводки на різкість домогтися чіткого зображення поверхні об'єкт-мікрометра в полі зору мікроскопа (біла шкала), розташувати її вздовж шкали окуляра (темна шкала) таким чином, щоб риски обох шкал були паралельними.

Далі необхідно знайти такі дві риски шкали окуляра, які співпадають з двома будь-якими рисками шкали об'єкт-мікрометра. Довжина відрізка між співпадаючими рисками об'єкт-мікрометра дорівнює $0,01 \cdot n$ (мм), де n – число поділок об'єкт-мікрометра між співпадаючими рисками. Ціну поділки S шкали окуляра можна визначити, якщо поділити довжину відрізка шкали об'єкт-мікрометра на число поділок m шкали

окуляра, в котрі укладається цей відрізок в полі зору мікроскопа, тобто $S = 0,01 \cdot n/m$ (мм) (рис. 7.54).

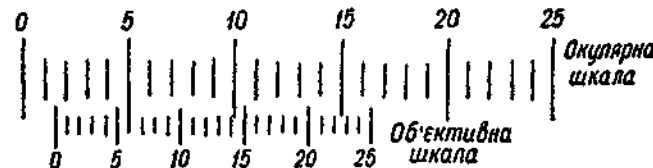


Рис. 7.54. Розташування шкал об'єкт-мікрометра та окуляра

Наприклад, на рис. 7.54 з лівого боку співпали 6-а поділка об'єктивної (нижньої) шкали та 5-а поділка окулярної (верхньої) шкали, тоді як з правого боку співпадають 16-а поділка об'єктивної шкали та 11-а поділка окулярної шкали. Таким чином, в $m = 6$ поділках окулярної шкали вмістилося $n = 10$ поділок об'єктивної шкали. Тоді ціна однієї поділки окулярної шкали при даному збільшенні мікроскопа є такою:

$$S = 0,01 \cdot 10 : 6 = 0,017 \text{ (мм)}.$$

Після визначення ціни поділки окулярної шкали можна приступити до вимірювання лінійних розмірів будь-якого предмета.

Завдання 3. Виміряти геометричні розміри мікрооб'єктів.

Якщо предмет розташований на предметному столику і його можна спостерігати в світлі, що проходить крізь нього, необхідно налаштувати мікроскоп для роботи. Для цього світло від освітлювача потрібно направити на освітлювальне дзеркало 5 мікроскопа (див рис. 7.53) і обертанням дзеркала домогтися рівномірного освітлення поля зору мікроскопа. Далі на предметному столику мікроскопа розмістити предметне скло з вимірювальним об'єктом, домогтися його чіткого зображення і приступити до вимірювання лінійних розмірів об'єкта.

Вимірювання товщини волосини. Повернути зображення поперек шкали окуляра і відлічити кількість поділок шкали окуляра, що укладаються в зображення об'єкта. Помноживши кількість поділок на ціну поділки, одержати величину діаметра волосини.

Визначення сталої дифракційної решітки. Одержавши чітке зображення фрагмента дифракційної решітки (у вигляді темних та світлих смуг, що чередуються), домогтися співпадання будь-якої смуги дифракційної решітки з будь-якою рисою шкали

окуляра, а потім знайти наступну смугу, що співпадає з рискою шкали і порахувати кількість поділок між рисками на шкалі та решітці. Знаючи ціну поділки шкали окуляра, визначити постійну дифракційної решітки (задача, що є оберненою до задачі завдання 2).

Завдання 4. Враховуючи маркірування на оправі об'єктива, визначити межу розрізнення мікроскопа та корисне збільшення.

Завдання для самостійної роботи та самоконтролю

1. Скільки кардинальних точок та площин має ЦОС? Як змінюється їх кількість для тонкої лінзи?
2. Яке значення має максимальне корисне збільшення в звичайному оптичному мікроскопі?
3. Чому корисне збільшення мікроскопа не може стати нескінченно великим?
4. Як зміниться межа розрізнення мікроскопа, якщо збільшити оптичну силу об'єктива?
5. Які деталі препарату розрізняє мікроскоп, якщо освітлювати його зеленими променями ($\lambda = 500 \text{ нм}$)? Розрахунки провести для: а) "сухого" мікроскопа; б) мікроскопа з масляною імерсією ($n = 1,515$). Значення синусу апертурного кута прийняти рівним 0,94.
6. Мікроскоп дає 600-кратне збільшення, якщо використовувати окуляр з фокусною відстанню 16,7 мм. Яке збільшення даватиме цей мікроскоп, якщо окуляр буде мати оптичну силу 20 діоптрій?

7.8.2. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА "Визначення концентрації розчинів рефрактометричним методом"

Мета роботи: Вивчити принцип дії рефрактометра. Визначити показник заломлення рідини рефрактометричним методом. Дослідити залежність показника заломлення розчину від його концентрації та навчитися визначати концентрації розчинів.

Прилади та матеріали: рефрактометр, набір розчинів відомої концентрації, розчини невідомої концентрації, розчин цукру, термометр.

Контрольні питання для підготовки до лабораторної роботи

1. Закони відбивання та заломлення світла. Показники заломлення світла – абсолютний та відносний.
2. Дисперсія показника заломлення (дисперсія світла).

3. Повне внутрішнє відбиття. Граничний кут для повного внутрішнього відбиття.
4. Рефрактометрія. Будова та принцип дії рефрактометра. Застосування рефрактометрії для аналітичних цілей.
5. Волоконна оптика та її застосування в медичній практиці.

Додаткова література

1. Ливенцев Н.М. Курс фізики. – М.: Высшая школа, 1978. – Ч. 1.
2. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996.

Короткі теоретичні відомості

Рефрактометр – пристрій, який призначений для визначення показника заломлення рідини. У медицині рефрактометр застосовується для визначення концентрації речовини в розчині (наприклад, вмісту білка в сироватці крові).

В основу конструкції приладу покладено метод визначення показника заломлення досліджуваного розчину за значенням граничного кута заломлення, або кута повного внутрішнього відбиття.

Оптична схема рефрактометра наведена на рис. 7.55. Досліджуваний розчин розміщується між гранями двох призм: освітлювальної 1 та вимірювальної 2. На освітлювальну призму від джерела світла через конденсор спрямовують паралельний пучок променів світла. Грань АВ освітлювальної призми зроблена матовою, вона

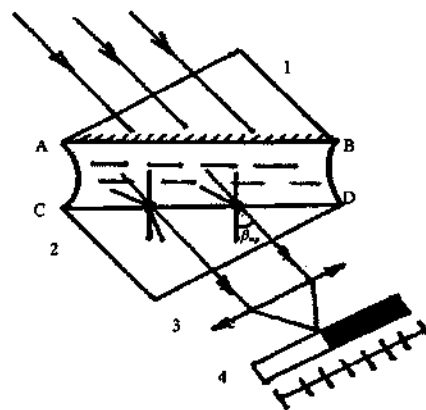


Рис. 7.55. Оптична схема рефрактометра

розсіює світлові промені, які, проходячи крізь шар досліджуваної рідини, потрапляють на грань CD вимірювальної призми 2 під кутами від 0 до 90° . Показник заломлення призми 2 більший від показника заломлення досліджуваної рідини, тому промені, які падають на будь-які точки грані CD вимірювальної призми,

заломлюючись, не виходять за граничний кут заломлення β_{zp} ($\beta_{zp} < 90^\circ$), величина якого залежить від даних двох середовищ: досліджуваної рідини та призми 2. Нагадаємо, що граничний кут заломлення β_{zp} – це кут заломлення, який відповідає куту падіння світла, що прямує до 90° .

Величину граничного кута можна визначити, використавши закон заломлення світла для двох даних середовищ:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = \text{const},$$

де α – кут падіння; β – кут заломлення; v_1 – швидкість поширення світла в першому середовищі, абсолютний показник заломлення якого n_1 ; v_2 – швидкість поширення світла в другому середовищі, абсолютний показник заломлення якого n_2 . Для цього випадку

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin \beta_{zp}} = \frac{n_{ск}}{n_{д.р.}}, \text{ звідки } \sin \beta_{zp} = \frac{n_{д.р.}}{n_{ск}},$$

де $n_{ск}$ – абсолютний показник заломлення скла призми 2; $n_{д.р.}$ – абсолютний показник заломлення досліджуваної рідини.

Оскільки показник заломлення вимірювальної призми залишається незмінним, то β_{zp} буде визначатися лише показником заломлення досліджуваної рідини. В середині кута, який доповнює β_{zp} до 90° , світлових променів не буде. Світлові промені, що виходять з призми 2, потрапляють на лінзу 3, яка збирає всі паралельні один до одного промені в одній точці. На екрані 4, який міститься в фокальній площині лінзи 3, буде спостерігатися границя розділу світла та тіні (границя світлотіні), створена променями, які йдуть під граничним кутом β_{zp} . Таким чином, положення границі світлотіні визначається величиною граничного кута заломлення, тобто залежить від показника заломлення досліджуваної рідини. На екрані нанесено шкалу, яка проградуєвана в поділках показника заломлення. Крім того, в рефрактометрах цільового призначення існує шкала концентрацій речовини відповідної речовини (наприклад, цукру). Тоді у полі

зору спостерігача маємо дві шкали, границю світлотіні, а також візирну лінію у вигляді трьох штрихів.

Порядок виконання роботи

Завдання 1. Ознайомитись з будовою приладу, загальний вигляд якого подано на рис. 7.56.

Прилад має корпус 1, колонку 2, основу 3. До корпусу прикріплені камери: нижня 4 з вимірювальною призмою та верхня 5 з освітлювальною призмою. До нижньої камери прикріплено рухомий освітлювач 6, світло від якого можна спрямовувати у віконце камери. На передній кришці корпусу приладу розміщено шкалу 7 та рукоятку 8 з окуляром 9. На вісі рукоятки знаходиться шкала 10 з гвинтом 11. Гвинт фіксує рухому шкалу 10, яка призначена для усунення спектра на границі світлотіні. До джерела живлення прилад підключається за допомогою штепсельної вилки 12.

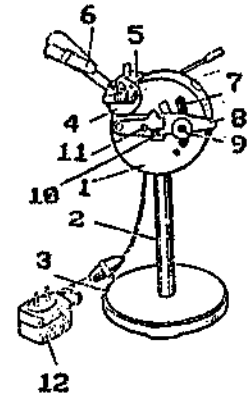


Рис. 7.56. Зовнішній вигляд рефрактометра

Завдання 2. Перевірити правильність установки нуля приладу.

Для цього необхідно відкинути обойму з освітлювальною призмою і нанести 2–3 краплини дистильованої води на поверхню вимірювальної призми та опустити обойму на місце. Потім включити в електричну мережу прилад, направити світло від освітлювача 6 у вікно в обоймі освітлювальної призми. Далі, обертаючи оправу окуляра 9, досягти різкого зображення шкали приладу. Повертаючи рукоятку з окуляром 8, знайти границю розділу світла та тіні й сполучити візир окуляра – три пунктирних лінії – з границею розділу світла та тіні. Якщо ця границя має кольорове забарвлення, повертаючи ручку 10, усунути його. Знайти значення показника заломлення дистильованої води за шкалою (показник заломлення дистильованої води 1,333, концентрація – 0%).

Завдання 3. Одержати залежність показника заломлення досліджуваної речовини від її концентрації.

Для цього треба виміряти показники заломлення розчинів відомих концентрацій (порядок вимірювання дивись у завданні 2). Виміряти показник заломлення розчину невідомої концентрації. Результати подати у вигляді таблиці.

Таблиця. Залежність показника заломлення розчину від концентрації

$C, \%$	0	10	20	30	40	X
n	1,333					

За даними таблиці побудувати графік залежності $n = f(C)$. За графіком визначити C_X – невідому концентрацію досліджуваного розчину. Рекомендуємо за початок відліку по вісі концентрацій взяти 0%, а по вісі показника заломлення – 1,33. Щодо масштабних одиниць – по вісі концентрацій – 5%, а по вісі показника заломлення – 0,005.

Завдання 4. Визначити показник заломлення та концентрацію розчину цукру ($n_{\text{цукр}}$ та $C_{\text{цукр}}$).

Ці величини визначаються безпосередньо за шкалами приладу, бо рефрактометр РПІ-3 призначений саме для аналізу на сахарозу.

Завдання для самостійної роботи та самоконтролю

1. Як залежить показник заломлення розчину від концентрації в даному досліді?
2. З якою метою освітлювач в рефрактометрі доповнюється фільтром?
3. Визначити показник заломлення 20% розчину речовини у воді, якщо показник заломлення 30% розчину дорівнює 1,547 ($n_{\text{води}} = 1,333$).

7.8.3. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА “Визначення концентрації розчину поляриметричним методом”

Мета роботи: вивчення поляриметричного методу, вивчення принципу дії та устрою поляриметра типу СУ-3, визначення питомої сталої обертання, визначення концентрації розчину оптично активної речовини.

Прилади та матеріали: поляриметр напівтіньовий СУ-3, поляриметричні кювети, розчин цукру відомої концентрації, розчин цукру невідомої концентрації.

Контрольні питання для підготовки до лабораторної роботи

1. Електромагнітні хвилі. Хвильова природа світла. Світло природне та поляризоване.
2. Поляризація світла при подвійному променезаломленні променів. Призма Ніколя, поляроїди. Закон Малюса.
3. Оптична активність речовин, обертання площини поляризації.
4. Дисперсія оптичної активності. Поляриметрия, спектрополяриметрия. Дослідження біологічних структур в поляризованому світлі.

Додаткова література

1. Ливенцев Н.М. Курс фізики. – М.: Высшая школа, 1978. – Ч. 1.
2. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996.

Короткі теоретичні відомості

Поляриметричними називаються методи, що засновані на вимірюванні кута обертання площини поляризації світлової хвилі при її проходженні крізь оптично активні речовини. Обертання площини поляризації світлової хвилі при її взаємодії з речовиною пов'язане з наявністю певної асиметрії в будові молекули оптично активної речовини або з певними особливостями в будові кристалічної решітки (наприклад, решітки кварцу).

Величина кута обертання площини поляризації φ залежить від природи речовини (тобто будови її молекул), від кількості молекул, з якими взаємодіє хвиля на своєму шляху, а також від довжини хвилі у вакуумі. Кількісно цю залежність можна виразити такими формулами:

для оптично активної речовини

$$\varphi = \varphi_0 L;$$

для розчину оптично активної речовини

$$\varphi = [\varphi_0] CL,$$

де φ – кут обертання площини поляризації (в градусах чи радіанах); φ_0 – стала обертання; $[\varphi_0]$ – питома обертання; L – довжина

шляху хвилі в оптично активній речовині; C – концентрація оптично активної речовини.

Величина $[\varphi_0]$ залежить від природи речовини, температури, а також від частоти електромагнітних коливань (довжини світлової хвилі). Залежність $[\varphi_0]$ від довжини хвилі λ називається дисперсією оптичного обертання (обертальною дисперсією) і визначається законом Біо: $[\varphi_0] \sim 1/\lambda^2$. Розмірність φ_0 та $[\varphi_0]$ залежить від вибору одиниць вимірювання φ , C та L .

У природі існують право- і лівообертаючі оптично активні речовини.

Поляриметричні методи використовують не тільки для визначення концентрації, а й для вивчення структури біологічних об'єктів. Для проведення поляриметричних досліджень використовують прилади, що називаються поляриметрами (сахариметрами). Прикладом такого приладу може бути сахариметр СУ-3. Це поляриметр цільового призначення – для визначення концентрації сахарози в розчинах. Оптична схема СУ-3 наведена на рис. 7.57.

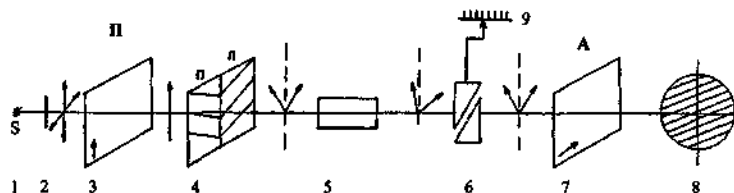


Рис. 7.57. Оптична схема поляриметра

Потік звичайного світла від лампи 1 крізь світлофільтр 2 падає на поляризатор 3, який перетворює його в потік поляризованого світла. Плоскополяризоване світло падає на бікварц 4, який складається з двох пластинок кварцу: лівообертаючого l та правообертаючого d . Вони розділяють світловий потік на дві половини. Площини поляризації обох половин світлового потоку утворюють однакові кути з головною площиною аналізатора 7. Згідно з законом Малюса, аналізатор однаково пропускає однакові частки потоку до зорової труби, при цьому спостерігається рівномірно освітлене поле зору, яке розділене тонкою лінією.

Якщо між бікварцем 4 та аналізатором 7 розташувати кювету 5 з речовиною, що обертає площину коливань, то рівність кутів між площинами поляризації двох половин світлового потоку та площиною аналізатора порушується. У цьому випадку аналізатор по-різному пропускає ліву та праву частини потоку. Внаслідок цього поле зору різко поділяється на дві по-різному освітлені половини. Щоб вирівняти освітленість поля зору, необхідно повернути площини поляризації обох половин світлового потоку назад на той самий кут φ , на який повернула площини поляризації оптично активна речовина. Це можна здійснити за допомогою компенсатора 6, що складається з нерухомого кварцового клину та рухомого, з яким пов'язане зміщення стрілки щодо шкали 9. Зміщенням одного клину відносно іншого можна підібрати товщину кварцової пластинки, яка потрібна для компенсації кута обертання площин поляризації і виміряти цей кут по шкалі 9.

Порядок виконання лабораторної роботи

Завдання 1. Підготувати прилад до роботи.

Конструкція приладу схематично показана на рис. 7.58. Увімкнути прилад в електричну мережу, тумблером 2 увімкнути освітлювач прибору 3. Обертальну обойму 4 встановити так, щоб на шляху світлового потоку опинився наскрізний отвір.

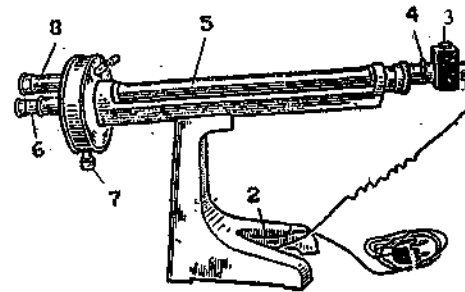


Рис. 7.58. Зовнішній вигляд поляриметра

діляє поле зору. Якщо поле зору виявиться неоднорідним, обертанням кремал'єри 7 домогтися повної однорідності поля зору. Одержавши однорідне освітлення поля зору окуляра 6, обертанням оправы здійснити наведення на різкість окуляра 8 відлікової шкали. Якщо налагодження приладу проведено

належним чином, нульові поділки ноніуса та відлікової шкали співпадають рис. 7.59, а.

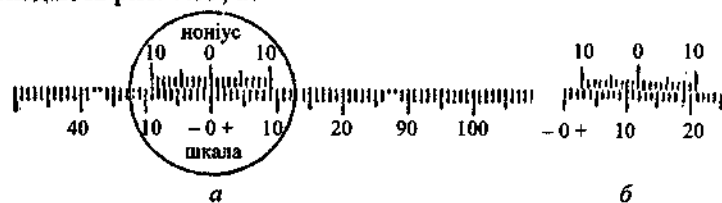


Рис. 7.59. Можливі відносні положення ноніусу та відлікової шкали: а – початкове положення; б – вимір

У протилежному випадку треба перевірити знову однорідність поля зору окуляра б і якщо однорідність не досягнута, то спостерігається систематична похибка відліку. Її можна усунути ретельнішою установкою нуля (це здійснює лаборант). Якщо нуль все ж таки не встановлено, необхідно цю похибку враховувати під час проведення розрахунків.

У приладі застосована міжнародна цукрова шкала, 100 поділок якої (100 °S) відповідають куту обертання площини поляризації, що дорівнює 34,62°. В діапазоні шкали від – 40 °S до +100 °S ноніус дає змогу відрховувати показання з точністю до 0,1 поділки.

Завдання 2. Визначити питома обертання для цукру.

Розташувати в камері поляриметра 5 (див. рис. 7.58) кювету з розчином цукру відомої концентрації (концентрація розчину, довжина кювети, а також похибки їх вимірювання наведені в таблиці). Виміряти величину кута обертання площини поляризації кількістю поділок n шкали. Кут обертання φ визначимо, помноживши кількість поділок n на ціну поділки шкали, що дорівнює 0,35°. Для вимірювання n необхідно домогтися однорідності поля зору обертанням кремал'єри 7, а потім крізь окуляр 8 провести відлік по шкалі з точністю до 0,1 поділки шкали.

Спосіб відліку показань ноніуса пояснено на рис. 7.59, б. Кількість цілих поділок визначають за основною шкалою до нуля шкали ноніуса (11 поділок). Число десятих поділок визначають за шкалою ноніуса: воно дорівнює номеру поділки ноніуса, який найкращим способом співпадає з будь-якою поділкою основної

шкали. В наведеному на рис. 7.59, б прикладі співпадає восьма поділка, тобто $n = 11,8$, що відповідає куту $\varphi = 11,8 \cdot 0,35^\circ = 4,13^\circ$.

Вимірювання провести п'ять разів, одержані дані занести до таблиці. За даними вимірювань розрахувати середні значення результатів відліку n , питома обертання, а також похибки її визначення. Питома обертання розраховують за формулою:

$$[\varphi_0] = \frac{0,35^\circ \cdot \bar{n}}{C \cdot L_1},$$

де \bar{n} – середнє значення відліку по шкалі; L_1 – довжина кювети; $0,35^\circ$ – ціна поділки шкали; C – концентрація розчину.

Відносну похибку розраховують за формулою

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta[\varphi_0]}{[\varphi_0]} = \frac{\Delta\bar{n}}{\bar{n}} + \frac{\Delta\bar{C}}{\bar{C}} + \frac{\Delta\bar{L}_1}{\bar{L}_1},$$

де $\Delta\bar{n}$, $\Delta\bar{L}_1$, $\Delta\bar{C}$, $\Delta[\varphi_0]$ – середні абсолютні похибки цих величин.

Абсолютна похибка шуканої величини розраховується за формулою

$$\Delta[\varphi_0] = \bar{\varepsilon} \cdot [\varphi_0].$$

Остаточний результат для питомого обертання має такий вигляд:

$$[\varphi_0] = [\bar{\varphi}_0] \pm \Delta[\bar{\varphi}_0].$$

Завдання 3. Визначити концентрацію розчину цукру.

Виміряти кут обертання площини поляризації для кювети з розчином невідомої концентрації. Вимірювання провести також п'ять разів, одержані результати занести до таблиці.

Розрахувати концентрацію C_x розчину, застосувавши одержане при виконанні завдання 2 значення питомого обертання $[\varphi_0]$:

$$C_x = \frac{\varphi}{[\varphi_0] \cdot L} = \frac{0,35^\circ \cdot \bar{n}}{[\varphi_0] \cdot L_2}.$$

Похибку визначення концентрації розрахувати за формулою

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta \bar{C}_x}{\bar{C}_x} = \frac{\Delta \bar{n}}{\bar{n}} + \frac{\Delta[\varphi_0]}{[\varphi_0]} + \frac{\Delta L_2}{L_2}$$

Абсолютна похибка визначення концентрації набуває вигляду

$$\Delta \bar{C} = \bar{\varepsilon} \bar{C}_x$$

Остаточний результат для концентрації розчину цукру має такий вигляд:

$$C_x = \bar{C} \pm \Delta \bar{C}_x$$

Таблиця. Результати вимірів і розрахунків

Для розчину відомої концентрації $C = (6,5 \pm 0,2) \text{ г} / 100 \text{ см}^3$ $L_1 = (1,000 \pm 0,005) \text{ дм}$						Для розчину невідомої концентрації C_x $L_2 = (2,000 \pm 0,005) \text{ дм}$				
N	n	Δn	L_1 (дм)	ΔL_1 (дм)	$[\varphi_0]$	n	Δn	L_2	ΔL_2	C_x
1			1,000	0,005				2,000	0,005	
2			“	“				“	“	
3			“	“				“	“	
4			“	“				“	“	
5			“	“				“	“	
Серед. знач.			1,000	0,005				2,000	0,005	

Завдання для самостійної роботи та самоконтролю

1. Дайте визначення оптичної вісі кристалу.
2. Як залежить показник заломлення звичайного (n_o) та незвичайного (n_e) променів від напрямку в кристалі?
3. Чи змінюється ступінь поляризації відбитого та заломленого променів при зміні кута падіння світла на поверхню діелектрика?
4. Як змінюється кут повороту площини поляризації при збільшенні довжини хвилі світла, що проходить крізь оптично активну речовину?
5. Аналізатор зменшує в 1,3 раза інтенсивність світла, яке пройшло через поляризатор. Нехтуючи втратами інтенсивності світла, визначити кут α між площинами поляризатора та аналізатора.
6. Питоме обертання цукру становить $66,5 \text{ град} \cdot \text{см}^2/\text{г}$. Яку довжину має кювета, якщо кут повороту площини поляризації розчином з концентрацією $0,08 \text{ г}/\text{см}^3$ становить $53,2^\circ$?

7. Кут між головними площинами двох поляризаторів складає 30° . У скільки разів зменшиться інтенсивність природного світла при його проходженні: 1) крізь одну призму Ніколя; 2) крізь дві призми Ніколя? Вважати, що на поглинання світла в кожній призмі Ніколя втрачається 10% падаючого світлового потоку.

РОЗДІЛ 8. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

“Координата та імпульс подібні до фігурок чоловіка та жінки у старовинному барометрі. Якщо з'являється одна фігурка, друга зникає.”

Вернер Гейзенберг

– Поглянь на дорогу! Кого ти там бачиш?

– Нікого, – сказала Аліса.

– Мені б такий зір! – зауважив Король із заздирстю. – Побачити Нікого! Та ще й на такій відстані!
Л'юїс Керолл “Аліса в Задзеркаллі”

Квантова механіка, що зародилася на рубежі XIX і XX століть, була з самого початку і нині, через сто років, залишається основною теорією атомних явищ. Сутність процесів, що відбуваються у мікросвіті, знаходиться за межами безпосереднього людського сприйняття. Тому спроби інтуїтивно описати квантовомеханічні об'єкти за допомогою класичних образів, що базуються на певному повсякденному досвіді, призводять до досить бруталних уявлень, які, частіше за все, не мають ніякого відношення до реальності.

Відомий приклад, що ілюструє це твердження, пов'язаний з історією відкриття спіну електрона. При спробі пояснити експериментальні спостереження дублету в спектрі натрію, що виглядав як дві близько розташовані жовті спектральні лінії, учні Бора – Уленбек і Гаудсміт – припустили, що цей дублет пов'язаний з власним обертальним рухом електронної хмари. Проте таке наочне уявлення про електрон як тіло, що обертається, тобто як своєрідна дзига (спін), виявилось помилковим. Бор, якому його учні розповіли про своє відкриття, через кілька днів дуже засмутив їх, обчисливши лінійну швидкість обертання такої електронної хмари на її периферії. Ця швидкість виявилася більшою за швидкість світла, що є, звичайно, “фізичним нонсенсом”. Однак введення поняття спіну як деякої внутрішньої

характеристики електрона, подібної до його заряду чи маси, стало дуже корисним для подальшого розвитку квантової механіки.

Звичайно, що завдання створення у студентів-медиків поглиблених уявлень про квантово-механічні закономірності світу мікрочастинок не є реальною через брак часу, який відводиться на курс медичної і біологічної фізики і, як наслідок, на вивчення й цього важливого розділу. Залишається лише сподіватися, що з часом цій найбільш глибокій науці про навколишній фізичний світ живої та неживої природи (як втім і всім іншим фундаментальним наукам) буде приділено більше уваги у вищій медичній школі. Це необхідно хоча б для того, щоб кваліфікований лікар мав уявлення, наприклад, про ЯМР-томограф, за допомогою якого вже зараз встановлюється більшість прецизійних медичних діагнозів.

У цьому розділі містяться короткі теоретичні відомості про елементарні основи квантової механіки, подані методичні розробки лабораторних та семінарських занять з розділу “Квантова механіка”, наведений перелік контрольних питань та завдань для самостійної роботи, а також список рекомендованої літератури, що присвячена основним ідеям і досягненням квантової механіки. *Per aspera ad astra!*

8.1. ОСНОВНІ УЯВЛЕННЯ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

Квантова механіка – наука, що описує рух мікрочастинок, тобто елементарних частинок, ядер атомів, молекул і систем, що з них складаються. Закони квантової механіки становлять основу для вивчення будови речовини, дають змогу з'ясувати будову атомів, природу хімічних зв'язків, пояснити періодичну систему Д. І. Менделєєва.

8.1.1. Місце квантової механіки в системі наук про рух тіл

Взагалі існує чотири механіки:

1. *Класична механіка Ньютона–Галілея* (XVII ст.) справедлива для випадків, коли швидкість тіла v значно менша за швидкість поширення світла c ($v \ll c$), а маса тіла значно більша за масу електрона m_{el} ($m_T \gg m_{el}$);

2. *Механіка теорії відносності* (10–20 рр. XX ст.), описує рух тіла з швидкістю $v \approx c$ та масою $m_T \gg m_{el}$;

3. *Квантова механіка* без врахування ефектів теорії відносності, описує рух тіл з масою $m_T \approx m_{el}$ та швидкістю $v \ll c$ (нерелятивістська квантова механіка);

4. *Релятивістська квантова механіка*, справедлива для випадків, коли $m_T \approx m_{el}$ та $v \approx c$.

На початку XX ст. стало очевидним, що класична фізика незможна описати властивості систем, що складаються з мікрочастинок. Так, планетарна модель Резерфорда виявилась неспроможною пояснити лінійчастий характер атомних спектрів та сам факт стійкості атомів. З погляду класичної електродинаміки виняткова стійкість атомів суперечить ядерній моделі їх будови. Вихід був запропонований Бором: суперечності усувались шляхом введення припущень, що не задовольняли як закони класичної механіки, так і закони класичної електродинаміки. Йдеться про добре відомі постулати Бора, суть яких полягає в таких положеннях:

1. Із нескінченної множини електронних орбіт здійснюються лише дискретні “стаціонарні” орбіти, для яких момент кількості руху кратній до $\hbar = h/2\pi$, де $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка, тобто

$$mvr = n\hbar.$$

Рух електронів по стаціонарних орбітах не супроводжується випромінюванням.

2. Випромінювання або поглинання атомами електромагнітних хвиль відбувається при переході електронів з однієї стаціонарної орбіти до іншої. Частота хвиль, що випромінюється атомами при таких переходах, визначається різницею енергій стаціонарних станів до і після випромінювання згідно з таким рівнянням:

$$h\nu = E_{n_k} - E_{n_i},$$

де n_k та n_i – номери стаціонарних орбіт, між якими відбуваються переходи електронів.

Таким чином, зберігаючи планетарну модель Резерфорда, Н. Бор вніс до неї ідеї квантової теорії Планка. Так була створена нова теорія – теорія Бора, яка стала наступним кроком в розвитку теорії будови атома. Теорія Бора не лише дала наочну картину руху електрона в атомі водню, а й змогу розрахувати можливі значення його енергії:

$$E_n = \frac{-me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2n^2\hbar^2} = -\frac{Rh}{n^2}, \quad (8.1)$$

де $R = me^4/8\epsilon_0^2\hbar^3 = 3,3 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$ – стала Рідберга, а $n = 1, 2, 3, \dots$ – номер орбіти.

Згідно з теорією Бора, частоти, які випромінюють атоми водню, можуть бути визначені за формулою:

$$\nu = (E_{n_k} - E_{n_i})/h = R(1/n_i^2 - 1/n_k^2), \text{ де } n_k > n_i. \quad (8.2)$$

Ця формула є узагальненням формули Бальмера, одержаної ним експериментально:

$$\nu = R(1/2^2 - 1/n_k^2), \text{ де } n_k = 3, 4, 5, \dots$$

Однак успіх теорії Бора не можна було поширити на більш складні атоми. Слабкою стороною цієї теорії, що зумовила її подальші невдачі, була її внутрішня логічна суперечність – вона не була ні послідовною класичною, ні послідовною квантовою теорією. Потрібна була нова квантова теорія, яка описувала б поведінку і властивості мікрочастинок. Основою для створення такої теорії стали праці де Бройля, Гейзенберга і Шредінгера.

8.1.2. Гіпотеза де Бройля

Першим кроком на шляху створення нової квантової теорії була висловлена в 1924 р. Л. де Бройлем гіпотеза про те, що корпускулярно-хвильовий дуалізм є особливістю не тільки оптичних явищ, але він притаманний всім матеріальним частинкам або предметам, які рухаються. Дуалізм оптичних явищ означає, що:

світло $\left\{ \begin{array}{l} \text{це електромагнітні хвилі;} \\ \text{це потік фотонів, що характеризуються} \\ \text{енергією } E_\phi, \text{ масою } m_\phi \text{ та імпульсом } p_\phi. \end{array} \right.$

Значення цих характеристик фотонів визначаються частотою ν (довжиною хвилі λ), а саме:

$$E_\phi = h\nu, m_\phi = h\nu/c^2, p_\phi = m_\phi c = h\nu/c = h/\lambda,$$

звідки

$$\lambda = h/p_\phi = h/m_\phi c. \quad (8.3)$$

Згідно з гіпотезою де Бройля, не лише фотон, а й будь-яка матеріальна частинка або тіло, що рухаються, мають як корпускулярні, так і хвильові властивості і можуть бути охарактеризовані довжиною хвилі λ , пов'язаною зі швидкістю руху v формулою, аналогічною до (8.3), яка має місце для фотонів, а саме:

$$\lambda = h/mv. \quad (8.4)$$

Зробимо оцінку довжини хвилі, якою може бути охарактеризований спринтер масою 100 кг, який біжить зі швидкістю 10 м/с:

$$\lambda = 6,6 \cdot 10^{-34} / 100 \cdot 10 = 6,6 \cdot 10^{-37} \text{ м.}$$

Таким чином, довжина хвилі, що характеризує макрооб'єкт, який рухається, настільки мала, що навіть не може спостерігатися в експерименті.

Розрахуємо довжину хвилі електрона, яка характеризує цю мікрочастинку при її русі. Нехай електрон пройшов прискорюючу різницю потенціалів $\Delta\phi = 10 \text{ кВ}$. У результаті він набув кінетичну енергію

$$mv^2/2 = e\Delta\phi,$$

звідки

$$v = \sqrt{2e\Delta\phi/m} = 5,8 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$$

Довжина хвилі де Бройля, що характеризує даний електрон, становить

$$\lambda = h/mv = 6,6 \cdot 10^{-34} / 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5,8 \cdot 10^7 \approx 0,12 \cdot 10^{-10} \text{ м,}$$

тобто вона має порядок лінійних розмірів атома. Відповідно, хвильові властивості мікрочастинок (електронів, протонів, нейтронів тощо) під час руху можуть бути визначені експериментально.

У 1927 році гіпотеза де Бройля одержала блискуче експериментальне підтвердження. К. Девісон і Л. Джермер спостерігали дифракцію електронів при їх відбитті від монокристала Ni (рис. 8.1).

Атоми і проміжки між ними відігравали роль дифракційної решітки. Довжина хвилі електронів, що її було встановлено згідно з дифракційною картиною, становила $\lambda = 1,65 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, а розрахована за формулою де Бройля

$$\lambda = h/mv = h/\sqrt{2em\Delta\phi} = 1,67 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Збіг результатів свідчив про правильність формули де Бройля. В тому ж 1927 році радянський фізик П.С. Гартаковський та англійський фізик Д. Томсон незалежно один від одного спостерігали дифракцію електронів при проходженні ними тонкої алюмінієвої фольги (рис. 8.2).

Дифракційна картина нічим не відрізнялась за виглядом від дифракційної картини, одержаної за допомогою рентгенівського випромінювання, і характеризувалася довжиною хвилі, яка в точності дорівнювала довжині хвилі де Бройля для дифрагуючих електронів.

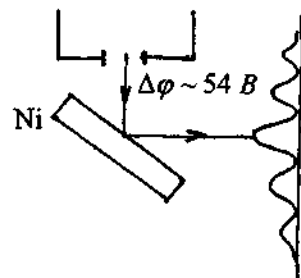


Рис. 8.1. Дифракція електронів при відбитті від монокристала

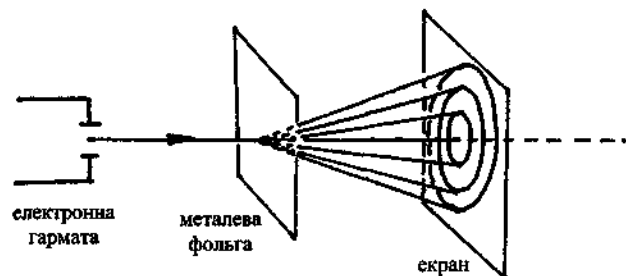


Рис. 8.2. Дифракція електронів при проходженні тонкої алюмінієвої фольги

Нині дифракція електронів та інших мікрочастинок використовується для дослідження структури речовини аналогічно методу рентгеноструктурного аналізу.

Відкриття хвильових властивостей електронів сприяло створенню надзвичайно важливого для наукових досліджень приладу – *електронного мікроскопа*. На рис. 8.3 наведено порівняльну схему світлового а та електронного б мікроскопів. На відміну від оптичних мікроскопів, формування зображення в електронному мікроскопі здійснюється за допомогою електростатичних або магнітних лінз.

Як відомо (див. розділ 6), межа розрізнення мікроскопа визначається довжиною хвилі випромінювання, яке в ньому використовується:

$$Z_{\min} = \lambda / 2n \sin \theta. \quad (8.5)$$

Використання електронних пучків дає змогу покращити межу розрізнення в сотні разів. Так, при прискорюючій різниці потенціалів $\Delta\varphi = 100 \text{ кВ}$ і кутовій апертурі $\theta = 10^{-2} \text{ рад}$ межа розрізнення

$$Z_{\min} = \lambda / 2n \sin \theta = h / 2m v n \sin \theta = h / (2n \sqrt{2me\Delta\varphi} \sin \theta) \approx 10^{-10} \text{ м.}$$

Межа розрізнення кращих вітчизняних електронних мікроскопів складає $3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

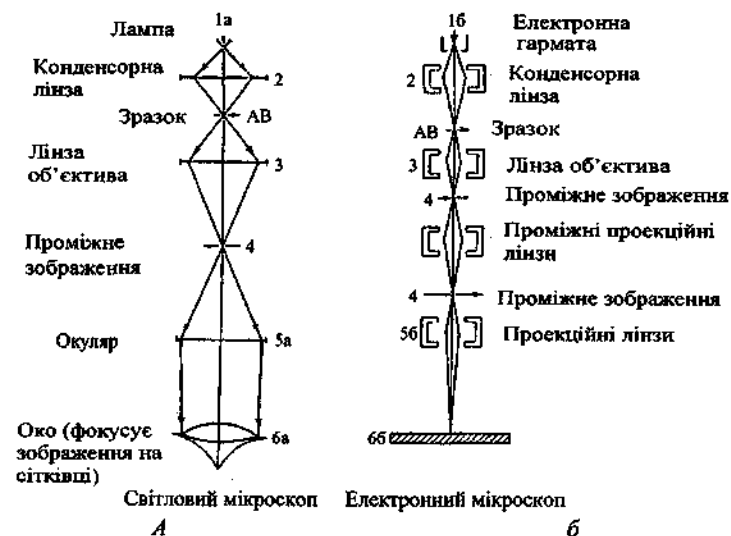


Рис. 8.3. Порівняльна схема світлового (а) та електронного (б) мікроскопів: 1а – освітлювач, 1б – електронна гармата, 2 – конденсорні лінзи, АВ – зразки, 3 – об'єктиви, 4 – проміжні зображення, 5а – окуляр, 5б – проєкційна лінза, 6а – око, 6б – фотоплівка

8.1.3. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга

Хвильові властивості мікрочастинок свідчать про обмеженість застосування до них деяких понять, якими характеризуються тіла в класичній механіці. Так, в класичній механіці ми можемо одночасно вказати положення тіла в просторі та його імпульс, що дає змогу визначити просторове положення тіла у наступний момент часу, визначаючи тим самим траєкторію його руху. Для мікрочастинки це стає неможливим. Завжди існують невизначеності у значеннях її координати та імпульсу, пов'язані певним співвідношенням, яке було встановлено в 1927 р. німецьким фізиком В. Гейзенбергом:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar. \quad (8.6)$$

З цього співвідношення випливає, що чим точніше ми спробуємо визначити координату частинки, тим з меншою точністю зможемо охарактеризувати її імпульс:

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta x \rightarrow 0} \rightarrow \infty.$$

Приклад: згідно з класичним уявленням електрон в атомі рухається по коловій орбіті зі швидкістю $v = 10^6$ м/с. Цю швидкість легко визначити за умови $F_{\text{кулон}} = F_{\text{доцентр}}$, тобто $(1/4\pi\epsilon_0) ze^2/R^2 = mv^2/R$.

Належність електрона до атома потребує, щоб невизначеність у значенні його координати відповідала атомним розмірам, тобто $\Delta x \sim 10^{-10}$ м, тоді із співвідношення $m\Delta v \geq \hbar/\Delta x$ маємо

$$\Delta v \geq \hbar/m\Delta x = 1,05 \cdot 10^{-34}/9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-10} \approx 10^6 \text{ м/с.}$$

Звідси випливає, що невизначеність у значенні швидкості електрона дорівнює самій швидкості. Таким чином, неможливо зберегти уявлення про орбіту, вздовж якої рухається електрон з певною швидкістю, тобто класичні уявлення у даному випадку ми невзмозі застосувати.

Аналогічно пов'язані між собою невизначеності енергії частинки і часу її життя в даному енергетичному стані:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar, \quad (8.7)$$

а також невизначеності моменту імпульсу та кутової координати.

Наведені співвідношення (8.6) і (8.7) називаються *співвідношеннями невизначеностей Гейзенберга*. Вони становлять одне з основних положень квантової механіки. Відмова від детермінованого поняття траєкторії руху, притаманного класичній механіці Ньютона–Галілея, і перехід до ймовірного опису положення мікрочастинок у просторі є однією з істотних і принципових особливостей квантової механіки – науки про мікросвіт.

Цікаво зазначити, що принцип невизначеностей зустрічається і в класичній фізиці, що має своє відображення у такому прикладі. Справді, із формули (8.7) випливає такий зв'язок між невизначеностями частоти $\Delta \nu$ і часу вимірювання Δt : $\Delta \nu \Delta t \geq 1/2\pi$, який повністю відтверджується медичною практикою. За малий проміжок часу (скажімо, $\Delta t \approx 0,1$ с) неможливо точно виміряти частоту серцевих скорочень, тобто невизначеність частоти $\Delta \nu$ є дуже великою.

8.1.4. Основне рівняння квантової механіки – рівняння Шредінгера

Рівняння, що описує рух мікрочастинок, має відтворювати її хвильові властивості, тобто повинне бути подібним до хвильового рівняння, що описує поширення оптичних або акустичних хвиль (див. рівняння (2.58)):

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (8.8)$$

Ми можемо міркувати таким чином: якщо мікрочастинка, яка рухається, має хвильові властивості і може бути охарактеризована довжиною хвилі, то її стан можна описати за допомогою деякої функції Ψ , яка задовольнятиме хвильове рівняння (8.8), тобто

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (8.9)$$

Функція, що задовольняє хвильове рівняння, може бути подана у такому вигляді:

$$\Psi = \psi(x) \sin \omega t.$$

Знайдемо відповідні частинні похідні, а саме:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi(x) \cdot \sin \omega t, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \sin \omega t \cdot \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2}$$

і підставимо їх у рівняння (8.9), що в результаті дає

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} \psi(x).$$

Враховуючи зв'язок між частотою і періодом $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, а також зв'язок між довжиною хвилі, швидкістю і періодом $\lambda = vT$ і формулу (8.4) для довжини хвилі де Бройля, відношення ω^2/v^2 можна подати таким чином:

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{(2\pi\nu)^2}{v^2} = \frac{4\pi^2 m(mv)^2 \cdot 2}{h^2 \cdot 2} = \frac{2m}{h^2} \cdot E_{\text{кин}},$$

Тоді рівняння (8.9) набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E_{\text{кін}} \psi(x) = 0, \quad (8.10)$$

де $E_{\text{кін}}$ – кінетична енергія частинки. Рівняння (8.10) описує одновимірний рух частинки. У випадку, коли частинка рухається в тривимірному просторі, рівняння (8.10) матиме вигляд:

$$\underbrace{\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}}_{\Delta \psi} + \frac{2m}{\hbar^2} E_{\text{кін}} \psi = 0 \quad (8.11)$$

або

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} E_{\text{кін}} \psi = 0, \quad (8.12)$$

де Δ – так званий оператор Лапласа, який діє на хвильову функцію і дорівнює сумі всіх трьох просторових похідних від ψ . Рівняння (8.12) описує рух вільної частинки.

Якщо частинка рухається в силовому полі, то її повна енергія дорівнює сумі кінетичної та потенціальної енергій: $E = E_{\text{кін}} + E_{\text{пот}}$ звідки $E_{\text{кін}} = E - E_{\text{пот}}$. У цьому випадку рівняння (8.12) запишеться таким чином:

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - E_{\text{пот}}) \psi = 0. \quad (8.13)$$

Рівняння (8.13) – *стаціонарне рівняння Шредінгера*, запропоноване ним у 1926 році. Це рівняння описує поведінку електрона в атомі (тобто електрона, що рухається в полі ядра). Хвильова функція $\psi(x, y, z)$, яка є розв'язком рівняння Шредінгера, не залежить від часу і характеризує стаціонарні стани системи.

Співвідношення між ψ -функцією та частинкою, яку вона описує, аналогічне співвідношенню між світловою хвилею та фотоном. Квадрат амплітуди світлової хвилі A^2 визначає ймовірність попадання фотона у відповідну точку простору. Як показав М. Борн, квадрат амплітуди хвильової функції $|\psi|^2$

характеризує ймовірність знаходження частинки в даній точці простору, а $|\psi|^2 dV$ – ймовірність знаходження частинки в елементі об'єму dV . Таким чином, фізичний зміст має не сама хвильова функція, а її квадрат. Слід відзначити, що, на відміну від оптичних хвиль, ψ -функція характеризує не електромагнітну хвилю, а хвилю ймовірності.

8.1.5. Рівняння Шредінгера для атома водню

Потенціальна енергія системи електрон-ядро в атомі водню має вигляд кулонівської потенціальної енергії

$$E_{\text{пот}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

З врахуванням цього виразу запишемо рівняння Шредінгера для найпростішої атомної системи – атома водню:

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right) \psi = 0. \quad (8.14)$$

Фізичний зміст $|\psi|^2$ накладає на ψ -функцію вимоги скінченності, однозначності та неперервності. Рівняння Шредінгера для атома водню має розв'язок, що задовольняє вищеперерахованим вимогам: при $E > 0$ ψ -функція описує стан електрона, що є вільним і вже не належить даному атому, а при $E < 0$ ψ -функція описує стан електрона всередині атома. В останньому випадку повна енергія системи

$$E = -\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2n^2 \hbar^2}.$$

Хвильова функція, що є розв'язком рівняння Шредінгера, містить в собі три цілочисельні параметри, які називаються *квантовими числами*.

Головне квантове число n , що характеризує енергію електрона і розміри його орбітали (розміри електронної хмари), може мати такі значення:

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$K, L, M, N, \dots,$$

де K, L, M, N – позначення відповідних енергетичних рівнів.

Орбітальне квантове число l , характеризує величину моменту кількості руху, тобто характеризує форму орбіталі:

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)},$$

де l може набувати значення:

$$l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

s, p, d – позначення орбіталей

Відповідні форми орбіталей наведені на рис. 8.4.

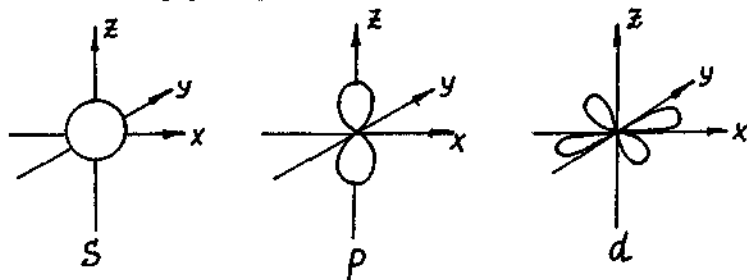


Рис. 8.4. Різні форми електронних орбіталей

При наявності зовнішнього магнітного поля можливі лише певні орієнтації вектора моменту кількості руху L (рис. 8.5) до напрямку зовнішнього поля, а саме лише ті, для яких проекція L на напрям поля $L_z = m_l \hbar$,

$$\text{де } m_l = \underbrace{-l, -l+1, \dots, -1, 0, +1, \dots, l-1, +l}_{(2l+1) \text{ значення}}$$

Магнітне квантове число m_l визначає просторову орієнтацію орбіталей. Виявляється, що перераховані вище квантові числа n, l, m_l не повністю характеризують стан електрона. Існує ще одне квантове число, необхідність введення якого не впливає з рівняння Шредінгера. Згідно з уявленнями квантової механіки, електрон має власний момент кількості руху – **спін**, величина якого така:

$$L_s = \hbar \sqrt{S(S+1)},$$

де S – спінове квантове число, для електрона $S = 1/2$.

При наявності зовнішнього магнітного поля B проекція L_{sz} на його напрямок може набувати значення:

$$L_{sz} = m_s \hbar,$$

де $m_s = +1/2, -1/2$. Таким чином, **магнітне спінове число** m_s визначає проекцію L_{sz} на напрямок магнітного поля.

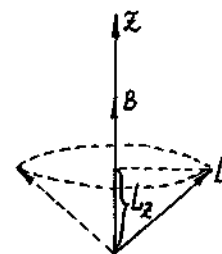


Рис. 8.5. Орієнтація вектора моменту кількості руху відносно напрямку зовнішнього поля

8.1.6. Багатоелектронні атоми

Одержати точний розв'язок рівняння Шредінгера для багатоелектронної системи неможливо. Складність задачі полягає в тому, що електрон рухається не тільки в силовому полі ядра, а й в полі інших електронів. І все ж розподіл електронів по орбіталах багатоелектронного атома може бути достатньо добре описаний в припущенні, що ці орбіталі подібні до орбіталей атома водню. При цьому розподіл електронів атома по орбіталах підпорядкований фундаментальному **принципу Паулі**. Цей принцип полягає в тому, що в атомі не може бути двох чи більше електронів з чотирма однаковими квантовими числами n, l, m_l і m_s . Згідно з ще одним важливим принципом – принципом найменшої енергії – електрон, що під'єднується до атома, посідає в ньому вільний рівень з найменшою енергією. Обидві вказані фундаментальні умови складають принцип будови електронних конфігурацій атомів і молекул, тобто розподіл електронів по їх орбіталах.

Треба підкреслити, що на відміну від атома з одним електроном (атома водню) енергія електрона в багатоелектронному атомі залежить від двох квантових чисел – n та l . Тому при даному значенні n енергія електронів змінюється при зміні квантового числа l . Сукупність електронів з даним значенням n в багатоелектронному атомі називають шаром і позначають певним символом, відповідно до значення n :

n – 1, 2, 3, 4, ...
 шар (рівень) K, L, M, N .

Всередині шара електрони розподіляються на підрівні, відповідно до значення квантового числа l .

Щоб побудувати електронну конфігурацію багатоелектронного атома необхідно визначити, яка кількість електронів може знаходитись в одному шарі, на підрівні, на атомній орбіталі.

В одному шарі (n):

$$l = \underbrace{0, 1, \dots, (n-1)}_{n - \text{підрівнів}}.$$

Одному підрівню (l) відповідає $(2l + 1)$ орбіталь

$$(m_l = \underbrace{-l, \dots, 0, \dots, +l}_{(2l+1)}).$$

На одній орбіталі (n, l, m_l) – 2 електрона ($m_s = +1/2, -1/2$).

Таким чином, на одному підрівні може знаходитись $(2l + 1) \cdot 2$ електронів, а в одному шарі кількість електронів становить:

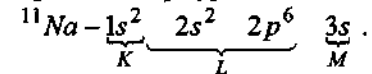
$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l + 1) = 2n^2.$$

У наведеній нижче табл. 8.1 вказано максимальну кількість електронів, що може знаходитись на різних підрівнях та шарах атомів.

Таблиця 8.1. Кількість електронів на різних підрівнях та шарах атомів

Шар	Кількість електронів	Підрівень	Кількість електронів
K	2	s	2
L	8	p	6
M	18	d	10

Як приклад, електронна конфігурація атома Na виглядає так:



8.2. ВИПРОМІНЮВАННЯ ТА ПОГЛИНАННЯ ЕНЕРГІЇ АТОМАМИ ТА МОЛЕКУЛАМИ

8.2.1. Атомні спектри

Якщо атом не зазнає зовнішніх впливів (зіткнень з іншими атомами, опромінення тощо), то він знаходиться у стані з мінімальною енергією – в основному енергетичному стані. Зміна енергетичного стану атомів при зовнішніх впливах зумовлена зміною їх електронних конфігурацій, тобто переходами електронів між різними енергетичними рівнями. Довжини хвиль або частоти, що їх випромінюють або поглинають атоми при таких переходах, характеризують спектри випромінювання та поглинання відповідно.

Спектри випромінювання та поглинання вільних або слабо взаємодіючих атомів, зумовлені переходами між енергетичними рівнями зовнішніх (валентних) електронів, називаються *оптичними атомними спектрами*. Закономірності, притаманні атомним спектрам, розглянемо на прикладі спектра випромінювання атомів водню.

У результаті розв'язку рівняння Шредінгера були одержані можливі значення енергії атома водню

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)} \cdot \frac{me^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{Rh}{n^2},$$

де R – стала Рідберга; n – головне квантове число.

Діаграму енергетичних рівнів атома водню, розраховану за одержаною формулою, подано на рис. 8.6.

Надання атому енергії, як наслідок зовнішнього впливу, спричинює його до збудженого стану, що відповідає переходу електрона з основного на більш високий енергетичний рівень (на більш високоенергетичну орбіталь).

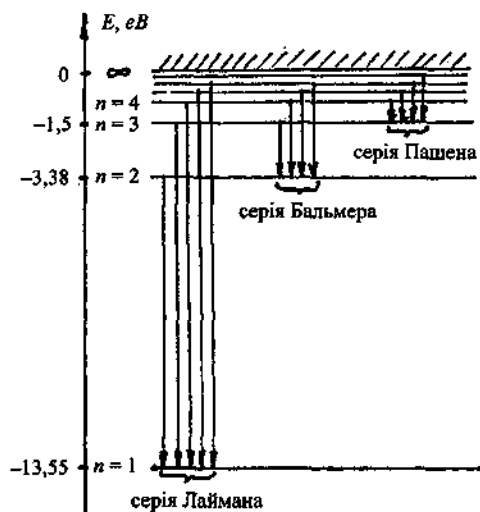


Рис. 8.6. Діаграма енергетичних рівнів атома водню

Через проміжок часу $\sim 10^{-8}$ с (час життя атома в збудженому стані) атом повертається в основний енергетичний стан, випромінюючи такі частоти:

$$\nu = (E_{n_k} - E_{n_i})/h = R \cdot (1/n_i^2 - 1/n_k^2), \quad (8.15)$$

де n_i та n_k – головні квантові числа енергетичних рівнів, між якими відбувається перехід, причому $n_k > n_i$.

Одержана формула не тільки пояснює встановлений експериментально лінійчастий характер атомних спектрів, а й дає змогу розрахувати набір частот, які відповідають спектральним лініям, що спостерігаються.

Спектр випромінювання атома водню складається з окремих груп ліній, які називаються *спектральними серіями*. Кожній серії відповідає набір частот, що випромінюється атомами при переході електрона на певний енергетичний рівень з усіх вищерозташованих рівнів (рис. 8.6).

При переході електрона на основний енергетичний рівень ($n_i = 1$) з усіх інших рівнів ($n_k = 2, 3, 4, \dots$) випромінюється *серія Лаймана*, що лежить в ультрафіолетовій області. Частоти, які

відповідають спектральним лініям цієї серії, легко одержати із узагальненої формули (8.15) за умови $n_i = 1, n_k = 2, 3, 4, \dots$:

$$\nu_L = R (1/1^2 - 1/n_k^2).$$

При переході електрона на енергетичний рівень з головним квантовим числом $n_i = 2$ з більш високо розташованих рівнів випромінюється *серія Бальмера*, що лежить у видимій та ближній ультрафіолетовій областях:

$$\nu_B = R (1/2^2 - 1/n_k^2), \quad n_k = 3, 4, 5, \dots$$

При переході збудженого електрона на рівень, що характеризується головним квантовим числом $n_i = 3$, з усіх вище розташованих рівнів випромінюється *серія Пашена*, яка лежить в інфрачервоній області:

$$\nu_P = R (1/3^2 - 1/n_k^2), \quad n_k = 4, 5, 6, \dots$$

Слід відзначити, що в кожній серії відстань між лініями зменшується при переході до більш коротких хвиль. При цьому кожна серія має короткохвильову границю, за межі якої вона не виходить. Ця границя називається "граничною лінією" серії, її частота визначається по узагальненій формулі (8.15) при умові $n_k = \infty$.

Атомні оптичні спектри багатоелектронних атомів складніші за спектри атома водню, але їм теж притаманні розглянуті вище закономірності.

8.2.2. Молекулярні спектри

На відміну від енергії атомів, енергія молекули визначається не тільки енергетичним станом електронної оболонки, а й коливальною енергією ядер атомів, що входять до складу молекули, а також енергією обертання ядер навколо загального центра мас. Взагалі, ці три види енергії взаємопов'язані, але в достатньому наближенні можна знехтувати їх взаємним впливом. Тоді повна енергія молекули може бути подана у вигляді суми електронної, коливальної та обертальної енергій:

$$E = E_{el} + E_{кол} + E_{об}.$$

Кожний з цих видів енергії підпорядковується квантовим законам, тобто може приймати лише певні значення. В результаті цього частота світла, що випромінюється або поглинається при зміні енергетичного стану молекули, визначається рівністю:

$$\nu = \Delta E/h = \Delta E_{el}/h + \Delta E_{кол}/h + \Delta E_{об}/h, \quad (8.16)$$

завдяки чому спектр молекули містить окремі, близько розташовані лінії, що складають смуги.

Теорія та експеримент показує, що найбільші значення набувають різниці електронних енергій, а найменші – різниці обертальних енергій, тобто

$$\Delta E_{el} > \Delta E_{кол} > \Delta E_{об};$$

$$\frac{\Delta E_{кол}}{\Delta E_{el}} \approx \sqrt{\frac{m_{el}}{M_{яд}}} \approx \frac{1}{45}; \quad \frac{\Delta E_{об}}{\Delta E_{el}} \approx \frac{m_{el}}{M_{яд}} \approx \frac{1}{1840}.$$

Розглянемо структуру енергетичних рівнів молекули (рис. 8.7).

Електронна оболонка молекули, як і атома, може знаходитись в різних енергетичних станах. Нехай рівні E_{el} та E'_{el} відповідають основній та збудженій електронним конфігураціям. Кожній з цих електронних конфігурацій відповідають свої коливання ядер, в результаті чого ми одержимо два набори коливальних рівнів для основної та збудженої електронних конфігурацій. Завдяки обертанню молекули кожний коливальний рівень розпадається на ряд обертальних підрівнів.

Молекулярні спектри займають широкий діапазон електромагнітного випромінювання.

Нехай збудження молекули незначне, так що

$$\Delta E_{el} = 0, \Delta E_{кол} = 0, \Delta E_{об} \neq 0.$$

У цьому випадку спостерігаємо переходи між обертальними підрівнями в межах одного коливального рівня (рис. 8.7, 1). Частоти, що випромінюються (поглинаються) при таких переходах, утворюють *обертальний спектр*, що складається з окремих ліній, розташованих в далекій інфрачервоної та мікрохвильовій областях ($\lambda \sim 0,1-1$ мм).

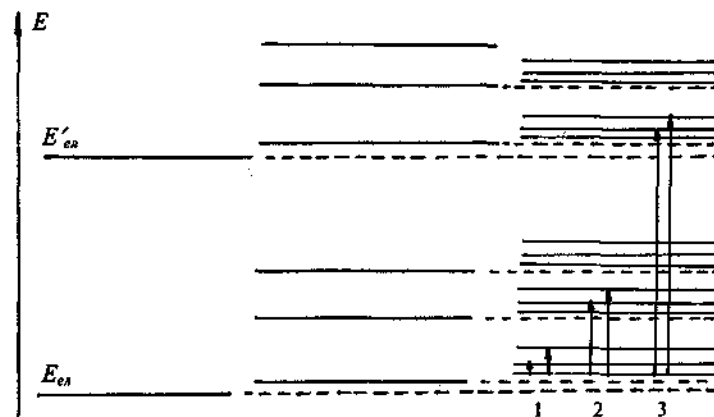


Рис. 8.7. Структура енергетичних рівнів молекули

Нехай збудження молекули спричинює зміну коливальної енергії ядер, тобто:

$$\Delta E_{el} = 0, \Delta E_{кол} \neq 0, E_{об} \neq 0.$$

У цьому випадку виникає *коливально-обертальний спектр*, який розташований в ближній інфрачервоної області. Він складається зі смуг, які розпадаються на окремі лінії, що зумовлені переходами між обертальними підрівнями у межах одного й того самого електронного рівня (рис. 8.7, 2).

При значному збудженні молекули

$$\Delta E_{el} \neq 0, \Delta E_{кол} \neq 0, \Delta E_{об} \neq 0.$$

Електронно-коливально-обертальний спектр, що спостерігається при цьому, лежить у видимій та ультрафіолетовій областях. Він складається зі смуг, утворених окремими лініями, що відповідають переходам між обертальними підрівнями різних електронних конфігурацій (рис. 8.7, 3).

Спектри поглинання (абсорбції) та випромінювання (емісії) даного сорту молекул строго індивідуальні та специфічні, що дає змогу використовувати їх для проведення якісного та кількісного аналізів. Особливо важливим джерелом інформації про будову органічних молекул та характер міжмолекулярних взаємодій є абсорбційні коливальні та електронні спектри. Завдяки

встановленій відповідності між частотами, що спостерігаються, та коливаннями різних груп атомів в молекулі стало можливим по коливальному спектру визначати присутність у молекулі окремих груп атомів та зв'язків, тобто визначати склад молекули. Для ідентифікації речовин, визначення їх концентрації, структурних параметрів макромолекул та їх оточення вимірюється ступінь поглинання світла. Поглинання світла проявляється в послабленні світлового потоку, що пройшов досліджуваній зразок (розчин або речовину). Воно буде тим більше, чим більша концентрація C досліджуваної речовини в розчині, товщина кювети L з розчином та здатність речовини до поглинання, що характеризується коефіцієнтом α_1 . Ці закономірності відображені в законі Бугера–Ламберта–Бера

$$I = I_0 10^{-\alpha_1 CL},$$

який можна подати у такому вигляді:

$$D = \lg(I_0/I) = \alpha_1 CL,$$

де D – оптична густина зразка; I_0 , I – інтенсивності падаючого світла та світла, що пройшло речовину, відповідно; α_1 – коефіцієнт поглинання.

Дослідження поглинання світла різними речовинами здійснюють за допомогою *спектрофотометрів*. Принципову схему спектрофотометра подано на рис. 8.8.

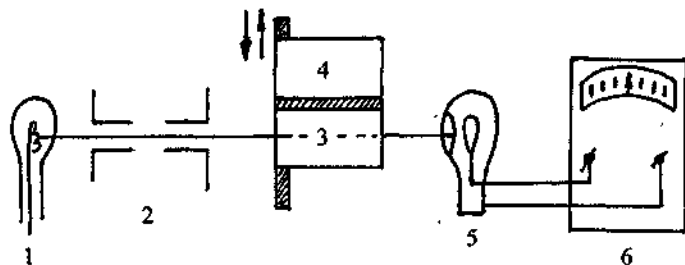


Рис. 8.8. Принципова схема спектрофотометра

Світло від джерела випромінювання 1 проходить через монохроматор 2 для виділення складової з певною довжиною хвилі. Розчин досліджуваної речовини та чистий розчинник знаходяться в двох кюветках 3 та 4, розміщених в спеціальних держа-

ках. Світло проходить через кювету і падає на фотоеlement 5, вихідний сигнал якого реєструється вимірювальним приладом 6.

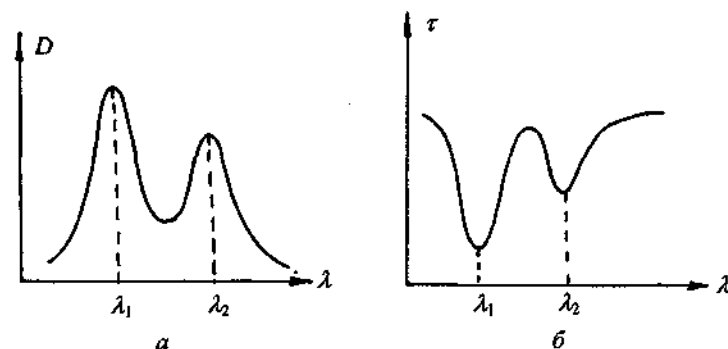


Рис. 8.9. Спектри поглинання у вигляді залежностей $D = f(\lambda)$ і $\tau = f(\lambda)$

Принцип роботи спектрофотометра полягає у вимірюванні інтенсивностей світла, що пройшло через розчинник, а також через розчин речовини у тому самому розчиннику. Різниця цих інтенсивностей дає змогу зробити висновок про ступінь поглинання світла розчиною речовиною. Для одержання спектра ця операція повторюється для багатьох довжин хвиль. Спектр подають у вигляді залежностей $D = f(\lambda)$ або $\tau = f(\lambda)$ (рис. 8.9 а, б), де $\tau = I/I_0$ – коефіцієнт пропускання.

8.3. ЛЮМІНЕСЦЕНЦІЯ

Згідно з законом Кірхгофа теплове випромінювання будь-якого тіла у будь-якій області спектра завжди менше за теплове випромінювання абсолютно чорного тіла у тій же області спектра і при тій самій температурі.

Наведені на рис. 8.10 експериментальні криві $r_\lambda = f(\lambda)$ розподілу енергії у спектрах теплового випромінювання сірого тіла 2 та довільного тіла 3, теплове випромінювання якого являється селективним, розташовані нижче кривої $\epsilon_\lambda = f(\lambda)$ розподілу енергії у спектрі теплового випромінювання абсолютно чорного тіла 1.

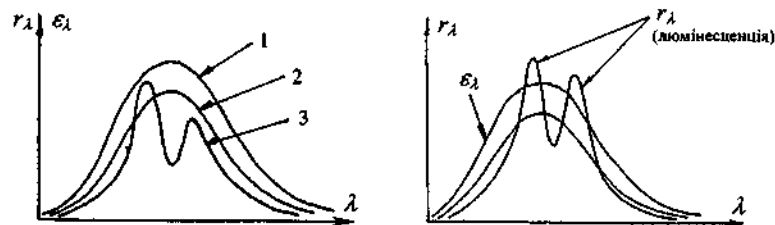


Рис. 8.10. Експериментальні криві розподілу енергії в спектрах теплового випромінювання абсолютно чорного 1, сірого 2 та довольного 3 тіл

Якщо при дослідженні спектральної густини енергетичної світності r_λ будь-якого тіла виявиться, що на окремих ділянках спектра вона перевищує спектральну густину енергетичної світності абсолютно чорного тіла ϵ_λ , то можна стверджувати, що на цих ділянках спектра тіло є джерелом випромінювання, надлишкового над тепловим (рис. 8.11).

Оптичне випромінювання тіла, яке є надлишковим над тепловим випромінюванням того самого тіла в даній спектральній області при тій же температурі і має тривалість свічення більшу за 10^{-10} с, називається *люмінесценцією*.

8.3.1. Види люмінесценції

Початковим актом люмінесценції є збудження атома або молекули. Залежно від способу збудження розрізняють такі види люмінесценції:

1. Електролюмінесценція (свічення газів при електричному розряді).
2. Катодолімінесценція (свічення, збуджене ударами електронів).
3. Хемолімінесценція (свічення, яке супроводжує екзотермічні хімічні реакції).
4. Радіолімінесценція (свічення під дією ядерного випромінювання).
5. Біолімінесценція (свічення біооб'єктів).

Рис. 8.11. Криві розподілу енергії в спектрах люмінесцентного випромінювання і теплового випромінювання абсолютно чорного і сірого тіл при однакових температурах

6. Фотолімінесценція (свічення під дією оптичного випромінювання видимої або ультрафіолетової областей).

Незалежно від способу збудження люмінесцентне випромінювання має ряд особливостей, а саме:

- а) люмінесцентне випромінювання триває деякий час після усунення причин, що його викликає (це дає змогу відрізнити люмінесценцію від розсіяного або відбитого випромінювань);
- б) кожна речовина має певний, характерний саме для нього, спектр люмінесценції.

8.3.2. Фотолімінесценція, закон Стокса

Фотолімінесценцію рідких та твердих тіл можна спостерігати при освітленні їх світлом у видимому або ультрафіолетовому діапазонах. Реєстрацію люмінесцентного випромінювання здійснюють за допомогою спектрофлуориметра, принципову схему якого подано на рис. 8.12. Люмінесцентне випромінювання спостерігається у напрямку, перпендикулярному до напрямку поширення збуджуючого випромінювання. Монохроматори 2 і 3 призначені для виділення певних спектральних ділянок збуджуючого та люмінесцентного випромінювань відповідно.

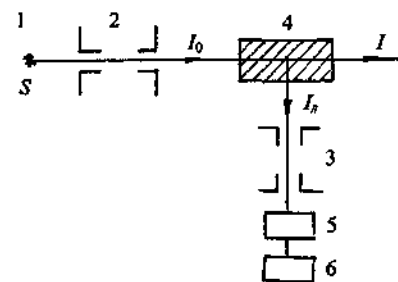


Рис. 8.12. Принципова схема спектрофлуориметра: 1 – джерело випромінювання; 2, 3 – монохроматори; 4 – кювета із зразком; 5 – детектор; 6 – реєструючий пристрій

У біології та медицині реєстрація люмінесцентного випромінювання використовується для якісного та кількісного аналізів, для вивчення будови та функцій біологічних систем. Головні параметри люмінесценції такі:

1. Спектр люмінесценції.
2. Квантовий вихід.
3. Поляризація люмінесценції.
4. Час життя молекули у збудженому стані.

Квантовим виходом φ називається відношення числа квантів N_n , що висвічуються в одиницю часу, до числа квантів N_m , що поглинаються в одиницю часу. Квантовий вихід можна подати у вигляді:

$$\varphi = N_n / N_m = I_n / (I_0 - I), \quad (8.17)$$

де I_0 – інтенсивність збуджуючого світла;

I – інтенсивність світла, що пройшло крізь речовину;

I_n – інтенсивність люмінесцентного випромінювання.

Враховуючи закон Бугера–Ламберта–Бера ($I = I_0 10^{-\varepsilon_1 CL}$), з рівності (8.17) отримаємо:

$$I_n = \varphi (I_0 - I) = \varphi I_0 (1 - 10^{-\varepsilon_1 CL}), \quad (8.18)$$

де ε_1 – коефіцієнт поглинання світла.

Таким чином, інтенсивність люмінесценції залежить від інтенсивності збуджуючого світла I_0 , здатності речовини поглинати світло (ε_1), концентрації речовини C та квантового виходу люмінесценції φ .

Цінну інформацію про молекулярну структуру біологічних об'єктів можна одержати під час освітлення їх поляризованим світлом. Якщо за час життя у збудженому стані молекула не змінить свою орієнтацію, то квант фотолюмінесценції виявиться поляризованим так само, як і поглинутий квант. У протилежному випадку відбудеться деполаризація світла. Переорієнтація відбувається тим швидше, чим менша мікров'язкість речовини. Визначаючи поляризацію фотолюмінесценції, можна досліджувати мікров'язкість структур клітин (зокрема, мікров'язкість мембранних структур).

Спектри фотолюмінесценції рідких та твердих тіл становлять більш-менш широкі суцільні смуги. Дослідження спектрів фотолюмінесценції виявило, що вони відрізняються від спектрів збуджуючого випромінювання. У більшості випадків виконується *закон Стокса*, згідно з яким *спектр люмінесценції зсунутий у бік довгих хвиль щодо спектра збуджуючого випромінювання* (рис. 8.13).



Рис. 8.13. Ілюстрація до закону Стокса

Однак у спектрі фотолюмінесценції досить часто присутні довжини хвиль, коротші за ті, що складають спектр збуджуючого випромінювання. Відхилення від закону Стокса особливо зручно спостерігати під час збудження фотолюмінесценції монохроматичним світлом (вузькою спектральною смугою) (рис. 8.14).



Рис. 8.14. Відхилення від закону Стокса

8.3.3. Механізми люмінесценції

Для пояснення закономірностей, що спостерігаються, розглянемо можливі механізми виникнення фотолюмінесценції.

1. Атом, що поглинає квант збуджуючого випромінювання, переходить з основного на вищий енергетичний рівень. Через проміжок часу $t \approx 10^{-8}$ с атом повертається єдиним випромінювальним актом в основний енергетичний стан, при цьому $(h\nu)_{\text{люм.}} = (h\nu)_{\text{зб.}}$. Такий механізм люмінесценції називається

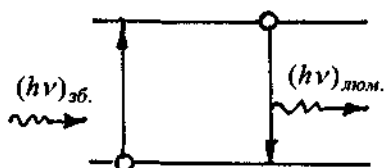


Рис. 8.15. Механізм резонансної флуоресценції

резонансною флуоресценцією. Найчастіше він реалізується в одноатомних парах та газах.

2. Повернення атома або молекули зі збудженого стану в основний може відбуватися:

а) в результаті чергування випромінювальних та безвипромінювальних переходів (рис. 8.16, а);

б) ступінчато, в результаті випромінювальних переходів між проміжними енергетичними рівнями (мал. 8.16, б). У таких випадках $(h\nu)_{\text{люм}} < (h\nu)_{\text{зб}}$ або $\lambda_{\text{люм}} > \lambda_{\text{зб}}$, що і відображено в законі Стокса.

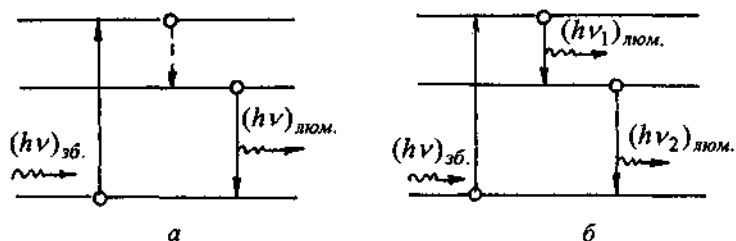


Рис. 8.16. Механізм люмінесценції відповідно до закону Стокса

3. Квант збуджуючого випромінювання поглинається атомами або молекулами, що знаходяться в збудженому стані. При переході їх в основний енергетичний стан випромінюється фотон з більшою енергією у порівнянні з поглинутим. Саме так виникає антистоксівське випромінювання.

4. Перехід атома або молекули із збудженого стану в основний може здійснюватися через проміжний, так званий

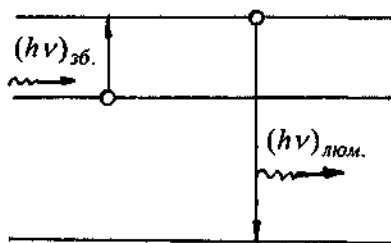


Рис. 8.17. Механізм антистоксівське випромінювання $(h\nu)_{\text{люм}} > (h\nu)_{\text{зб}}$ або $\lambda_{\text{люм}} < \lambda_{\text{зб}}$

метастабільний стан, перехід з якого в основний стан є малоімовірним в силу дії правил заборони. Як приклад, розглянемо систему електронних рівнів біомолекули (рис. 8.18), де S_0 – енергетичний рівень, що відповідає основній електронній конфігурації; S_1 , S_2 – рівні, що відповідають збудженим електронним конфігураціям. При поглинанні збуджуючого випромінювання може відбутися перехід одного з електронів із заповненої орбіталі на одну з незаповнених з більш високою енергією. В результаті молекула опиниться в електронно-збудженому стані S_1 або S_2 . Рівні S_0 , S_1 , S_2 називаються синглетними – перехід між ними відбувається без зміни орієнтації спіна електрона. (Біля кожного рівня в клітинах, що відповідають орбіталям, показано напрямок спіна збудженого електрона по відношенню до спіна незбудженого).

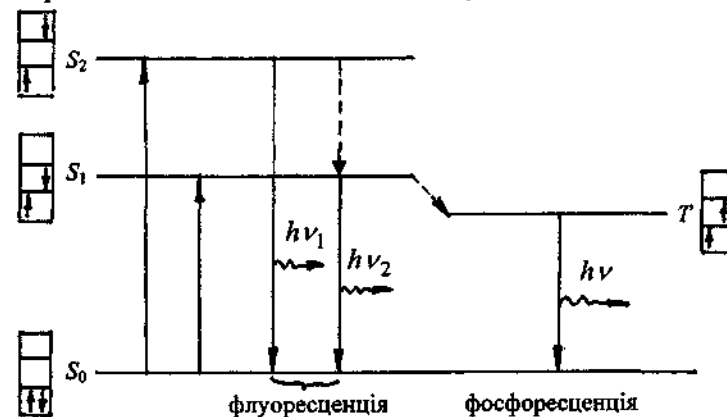


Рис. 8.18. Механізми виникнення флуоресцентного і фосфоресцентного випромінювань молекули

Час життя молекули у збуджених станах S_1 або S_2 становить $\sim 10^{-8}$ с. Перехід в основний енергетичний стан може здійснюватися одним з розглянутих вище способів: у результаті безвипромінювальних переходів або з випромінюванням квантів флуоресценції (короткочасного післясвічення). З певною ймовірністю можливе також обернення спіна збудженого електрона, тобто безвипромінювальний перехід молекули із збудженого синглетного у збуджений триплетний стан.

Перехід молекули із триплетного в основний стан $T \rightarrow S_0$ заборонений по спіну (у відповідності з принципом Паулі). Таким чином, триплетний рівень є метастабільним.

В силу малої ймовірності переходу $T \rightarrow S_0$ в триплетному стані молекула може знаходитись достатньо довго ($\sim 10^{-4} \div 10$ с). Перехід $T \rightarrow S_0$ може здійснитись як у результаті безвипромінювального, так і випромінювального переходів. Випромінювання, яке супроводжує перехід $T \rightarrow S_0$, називається **фосфоресценцією**. Фосфоресценція відрізняється від флуоресценції тривалістю післясвічення. Ймовірність випромінювального переходу атома або молекули з метастабільного енергетичного рівня на основний збільшується під час дії на них зовнішнього фотона, який має енергію, що дорівнює енергії фотона, який випромінюється самодовільно. Такий випромінювальний перехід під дією зовнішнього випромінювання називається **примусовим** або **індукованим**.

8.4. ІНДУКОВАНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ

На відміну від спонтанних (самодовільних) переходів, що здійснюються лише з більш високих енергетичних рівнів на більш низькі, примусові переходи (переходи під дією зовнішнього випромінювання) можуть з рівною ймовірністю відбуватися як в одному, так і в іншому напрямках (рис. 8.19). Цей результат був вперше отриманий теоретично А.Ейнштейном.

Примусове випромінювання має досить цінні властивості: напрямок його поширення з точністю співпадає з напрямком поширення зовнішнього випромінювання, яке спричинило випромінювальний перехід. Те саме стосується частоти, фази та поляризації індукованого та зовнішнього випромінювань. Таким чином, індуковане випромінювання тотожне зовнішньому в усіх відношеннях.

У 1940 році радянський фізик В. А. Фабрикант запропонував використати індуковане випромінювання для підсилення електромагнітних хвиль. Розглянемо суть ідеї В.А.Фабриканта детальніше.

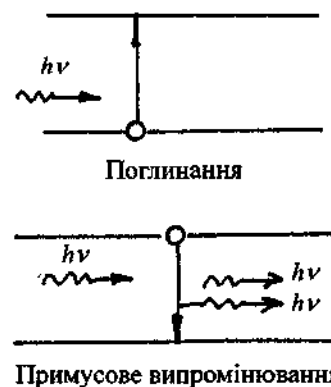


Рис. 8.19. Індуковані переходи

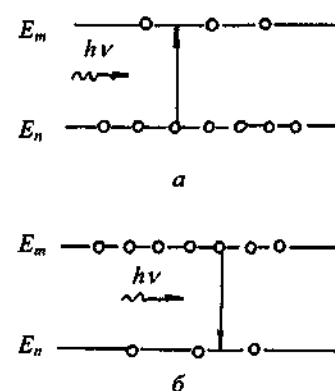


Рис. 8.20. Рівноважна (а) та інверсна (б) заселеність енергетичних рівнів

8.4.1. Рівноважна та інверсна заселеність

Як відомо, більшість досліджуваних нами систем знаходиться у стані теплової рівноваги, а це означає, що розподіл атомів чи молекул за енергетичними станами або заселеність енергетичних рівнів, підлягає закону, який називається **розподіл Больцмана**:

$$N_i = C e^{-E_i/kT}, \quad (8.19)$$

зміст якого досить простий: із збільшенням енергії заселеність рівня (кількість атомів чи молекул в даному стані) зменшується, тобто якщо $E_m > E_n$, то $N_m < N_n$ (див. рис. 8.20, а). Це є так звана **рівноважна заселеність енергетичних рівнів**.

Як вже зазначалось, фотон з енергією $h\nu = E_m - E_n$ з рівними ймовірностями буде індукувати переходи $E_n \rightarrow E_m$ та $E_m \rightarrow E_n$. Кількість переходів між рівнями E_m та E_n пропорційна заселеності вихідного рівня. Завдяки тому, що $N_n > N_m$, поглинання зовнішнього випромінювання буде переважати примусове випромінювання.

Таким чином, зовнішнє випромінювання при проходженні через речовину, що знаходиться у стані теплової рівноваги, послаблюється.

Підсилення зовнішнього випромінювання можна здійснити шляхом створення у речовині зворотної, по відношенню до рівноважної, заселеності енергетичних рівнів, тобто такої, що при $E_m > E_n$ маємо $N_m > N_n$. Подібна заселеність енергетичних рівнів називається *інверсною* (див. рис. 8.20, б). У речовині з інверсною заселеністю енергетичних рівнів примусове випромінювання буде перевищувати поглинання, внаслідок чого зовнішнє випромінювання при проходженні через речовину буде підсилюватись.

Ідея В. А. Фабриканта була практично здійснена в 1954 році радянськими фізиками Н. Г. Басовим та А. М. Прохоровим і незалежно американським фізиком Таунсом. Ними був вперше створений *мазер* – генератор радіохвиль в мікрохвильовому діапазоні. Слово “мазер” є аббревіатурою виразу “microwave amplification by stimulated emission of radiation”. У 1964 р. за створення мазера Н. Г. Басову, А.М. Прохорову та Таунсу було присуджено Нобелівську премію.

В 1960 р. Мейманом (США) був створений перший аналогічний прилад, який працює вже в оптичному діапазоні – *лазер* або, як його ще називають, *оптичний квантовий генератор*.

8.4.2. Будова та принцип дії лазера

Основою оптичного квантового генератора є речовина, що має метастабільні рівні. Робота лазера починається з використання зовнішнього джерела енергії для створення інверсної заселеності енергетичних рівнів. Цей процес називається “підкачкою”. Будова та принцип дії лазера розглянемо на прикладі рубінового лазера. Робочим тілом цього лазера є кристал штучного рубіна, що становить окис алюмінію Al_2O_3 , в якому атоми алюмінію у незначній кількості заміщені атомами хрому. При поглинанні світла, яке випромінюється імпульсною ксенонною лампою ($\lambda \sim 560$ нм), іони хрому переходять у збуджений стан (рис. 8.21).

Повернення іонів в основний стан здійснюється двома послідовними переходами:

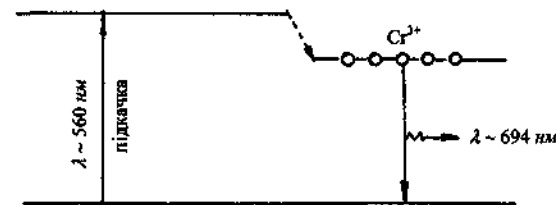


Рис. 8.21. Схема енергетичних рівнів рубінового лазера

1. Віддаючи частину енергії кристалічній решітці рубіна, збуджені іони хрому безвипромінювально переходять на проміжний рівень, який являється метастабільним. Завдяки малій ймовірності переходу з метастабільного стану в основний та при достатній потужності “підкачки” створюється інверсна заселеність основного та метастабільного рівнів.

2. Фотон, який випромінюється при спонтанному переході

іона хрому з метастабільного стану в основний, викликає зростаючий потік фотонів у результаті індукованих випромінювальних переходів збуджених іонів хрому між цими рівнями. Фотони з напрямком руху, паралельним вісі рубінового стержня, відбиваючись від торцевих дзеркал, залучають дедалі більшу кількість іонів хрому в

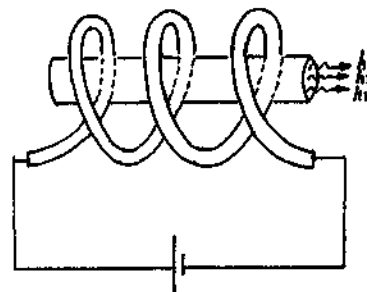


Рис. 8.22. Будова рубінового лазера

індуковане випромінювання (мал. 8.22). Створюється фотонна лавина. При достатньому підсиленні частина пучка виходить крізь напівпрозорий торець кристала. Таким чином, рубіновий лазер працює в імпульсному режимі.

Застосування лазерів у медицині базується на таких властивостях лазерного випромінювання: високій інтенсивності, високій монохроматичності, когерентності, вузості пучка, малій тривалості випромінювання у випадку імпульсних лазерів. Нагадаємо деякі важливі області застосування лазерів у медицині:

1. **Безкровна хірургія.** Розтинаючи тканину, лазерний промінь викликає коагуляцію білка, запобігаючи капілярній кровотечі.

2. **Офтальмологія.** Лазерний промінь використовують для приварювання відшарованої сітківки та для лікування глаукоми – захворювання, пов'язаного з підвищенням тиску всередині ока. “Протикаючи” лазерним променем мікроотвір в склері, створюють відтік рідини, в результаті чого тиск всередині ока зменшується.

3. **Мікрохірургія.** Використання лазерного променя дає можливість вибірково руйнувати кліткові органели.

4. **Гастроскопія.** З використанням гелій-неонового лазера та принципів волоконної оптики створено гастроскоп – прилад, який дає змогу формувати голографічне (об'ємне) відтворення внутрішньої порожнини шлунка.

8.5. ЕЛЕКТРОННИЙ ПАРАМАГНІТНИЙ РЕЗОНАНС, ЯДЕРНИЙ МАГНІТНИЙ РЕЗОНАНС ТА ЇХ МЕДИКО-БІОЛОГІЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ

Нині поряд з традиційними методами оптичної спектроскопії, у біології та медицині стали широко використовуватись методи магнітної спектроскопії, які дають змогу одержувати цінну інформацію про будову органічних молекул, природу міжмолекулярних взаємодій, характер молекулярних рухів. В основі цих методів лежить один і той самий принцип – поглинання енергії системою парамагнітних частинок при індукованих височастотним електромагнітним випромінюванням переходах між енергетичними рівнями, на які розщеплюються рівні енергії системи у зовнішньому магнітному полі.

8.5.1. Метод електронного парамагнітного резонансу

Явище *електронного парамагнітного резонансу (ЕПР)* було відкрито радянським фізиком Е. К. Завойським у 1944 році. З того часу цей метод швидко розвинувся і нині став незамінним при вивченні структури вільних органічних та неорганічних радикалів.

Розглянемо систему парамагнітних частинок, парамагнетизм яких зумовлений наявністю неспареного електрона (вільні радикали, іони змінної валентності). Парамагнетизм таких частинок має, як правило, спіновий характер, тобто зумовлений наявністю некомпенсованого спінового магнітного моменту електрона, який можна визначити за формулою:

$$P_{ms} = g \mu_B S, \quad (8.20)$$

де S – спінове квантове число (для електрона $S = 1/2$); g – так званий “*жи-фактор*” (це є безрозмірна величина, яка у разі чисто “спінового магнетизму”, тобто для вільного електрона, становить 2,0023); $\mu_B = e\hbar/2m$ – магнетон Бора.

При відсутності зовнішнього магнітного поля систему таких парамагнітних частинок можна охарактеризувати деякою середньою енергією E_0 . У зовнішньому магнітному полі енергія парамагнітної частинки змінюється і стає рівною

$$E = E_0 + \Delta E, \quad (8.21)$$

де ΔE – додаткова енергія, зумовлена взаємодією магнітного моменту частинки з зовнішнім магнітним полем. Ця енергія пропорційна індукції магнітного поля B і проекції магнітного моменту P_{ms}' на напрямок поля:

$$\Delta E = -P_{ms}' B. \quad (8.22)$$

Проекція спінового магнітного моменту на напрямок зовнішнього магнітного поля може набувати значень, що визначаються формулою

$$P_{ms}' = -g\mu_B m_s, \quad (8.23)$$

де m_s – магнітне спінове число електрона ($m_s = +1/2, -1/2$). Знак “-” у формулі (8.23) відтворює той факт, що спінові механічний та магнітний моменти спрямовані в протилежні боки.

Рівність (8.21) із врахуванням (8.22) і (8.23) набуває вигляду

$$E = E_0 + g\mu_B m_s B. \quad (8.24)$$

Таким чином, система ізоенергетичних частинок з енергією E_0 у зовнішньому магнітному полі розпадається на дві підсистеми з енергіями E_1 і E_2 відповідно до двох можливих орієнтацій їх

магнітних моментів відносно зовнішнього магнітного поля (рис. 8.23).

Між рівнями E_1 і E_2 можливі переходи, тобто парамагнітні частинки можуть змінювати орієнтацію свого магнітного моменту. Однак ймовірність спонтанних, самодовільних переходів частинок між рівнями E_1 і E_2 дуже незначна. Такі переходи можна викликати (індукувати) опроміненням системи високочастотним електромагнітним полем (НВЧ-випромінюванням) за умови, що квант НВЧ-випромінювання задовольняє умові $h\nu = E_2 - E_1$. Заселеність енергетичних рівнів E_1 та E_2 підлягає розподілу Больцмана, згідно з яким при $E_1 < E_2$ маємо $N_1 > N_2$, де N_1 та N_2 – заселеності рівнів E_1 та E_2 . У цьому випадку, як вже зазначалося в параграфі 8.4.1, кількість переходів з поглинанням енергії $E_1 \rightarrow E_2$ буде переважати кількість переходів з випромінюванням енергії $E_2 \rightarrow E_1$. В результаті за умови

$$h\nu = E_2 - E_1 = g \mu_B B \quad (8.25)$$

буде спостерігатись резонансне поглинання енергії високо-частотного електромагнітного поля (НВЧ-випромінювання).

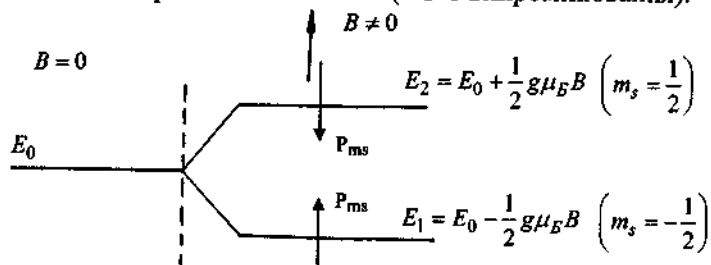


Рис. 8.23. Розщеплення енергетичного рівня парамагнітних частинок

Для спостереження сигналу поглинання використовуються спеціальні прилади – магнітні радіоспектретри.

Відповідно до (8.25), умову резонансу можна здійснити двома способами:

- а) при постійному магнітному полі ($B = \text{const}$) варіюється частота ν ;
- б) при незмінній частоті ($\nu = \text{const}$) варіюється індукція магнітного поля B .

У сучасних радіоспектретрах застосовується другий спосіб, оскільки технічно його простіше здійснити. На рис. 8.24 наведено принципову схему радіо-спектретра.

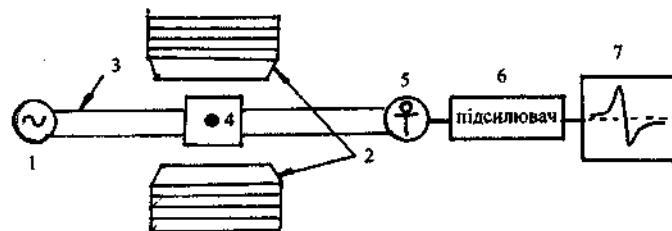


Рис. 8.24. Принципова схема радіоспектретра: 1 – джерело НВЧ-випромінювання; 2 – електромагніт; 3 – хвильоводи, по яких до зразка підводиться потужність НВЧ-випромінювання; 4 – резонатор (поглинаюча комерка, що концентрує НВЧ-випромінювання на об'єкті дослідження – аналог оптичної кювети); 5 – детектор – пристрій, за допомогою якого потужність НВЧ-випромінювання, яка відводиться від зразка, перетворюється в електричну напругу; 6 – підсилювач сигналу ЕПР; 7 – реєструючий пристрій

Лінії поглинання реєструються у вигляді кривої поглинання $I_{\text{погл}} = f(B)$ (рис. 8.25, а) або у вигляді першої похідної від кривої поглинання $dI_{\text{погл}}/dB = f(B)$ (рис. 8.25, б).

Для одержання інформації про досліджувану систему розглядаються такі параметри спектра ЕПР:

1. **Інтегральна інтенсивність сигналу.** Інтегральною інтенсивністю сигналу називають площу під кривою поглинання. Вона є мірою кількості неспарених електронів (кількості вільних радикалів або інших парамагнітних частинок), що знаходиться у досліджуваному зразку.

2. **Положення ліній поглинання в спектрі.** Положення лінії поглинання в спектрі ЕПР визначається згідно з (8.25) значенням g -фактора

$$g = h\nu / \mu_B B.$$

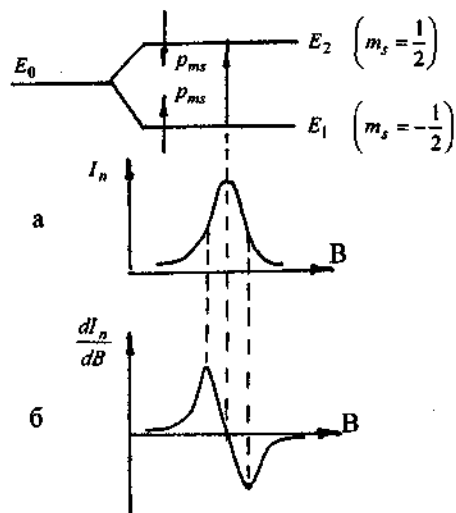


Рис. 8.25. Спектри електронного парамагнітного резонансу у вигляді кривої поглинання $I_n = f(B)$ та першої похідної від кривої поглинання $dI_n/dB = f'(B)$

Так, наприклад, при значеннях індукції $B = 0,3$ Тл та довжини хвилі НВЧ-випромінювання $\lambda = 0,03$ м значення g -фактора для вільного електрона дорівнює 2,0023. Для різних вільних радикалів значення g -фактора коливається в межах $g = 2,000 \div 2,060$. Таким чином, положення лінії поглинання в спектрі, що визначається значенням g -фактора парамагнітної частинки, дає змогу ідентифікувати парамагнітну частинку.

3. **Ширина лінії та її форма.** Ширина лінії та її форма дає змогу оцінити рухливість парамагнітної частинки в досліджуваному зразку, а також характер та ступінь її взаємодії з навколишнім середовищем.

4. **Надтонка структура (НТС) сигналу ЕПР.** Надтонкою структурою називається розщеплення сигналу ЕПР на кілька компонентів внаслідок взаємодії магнітного моменту неспареного електрона з магнітними моментами ядер, які містяться в парамагнітній частинці. Серед ядер, що входять до складу органічних молекул, ядерні магнітні моменти мають протони та ядро азоту.

Розглянемо сигнал ЕПР нітроксильного радикала $R_1R_2N-O^{\cdot}$, де R_1, R_2 – різні хімічні групи. В результаті взаємодії неспареного електрона з магнітними моментами ядер азоту, по-різному

орієнтованими в зовнішньому магнітному полі, сигнал ЕПР нітроксильного радикала розщеплюється на три компоненти (рис. 8.26).

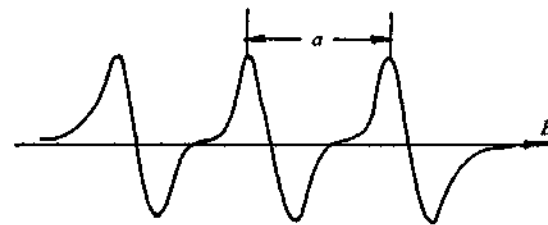


Рис. 8.26. Спектр ЕПР нітроксильного радикала

Відстань між компонентами НТС називається константою надтонкої взаємодії (НТВ). Константа НТВ пропорційна густині неспареного електрона на даному ядрі:

$$a = Q|\psi|^2.$$

Аналіз НТС, поряд із значенням g -фактора, дає змогу ідентифікувати вільний радикал, встановити розподіл електронної густини в молекулі і, відповідно, визначити її реакційні центри.

Використовуючи метод ЕПР, біологи та медики, які працюють в області теоретичної та клінічної медицини, можуть вирішувати такі основні завдання:

1. Виявити та ідентифікувати проміжні сполуки вільнорадикальної природи у різних метаболічних реакціях.
2. Виявити та ідентифікувати вільні радикали, що виникають у біологічних тканинах під дією проникаючої радіації.
3. Досліджувати обмінні процеси в ракових клітинах і у тканинах, що підлягали гіпоксії.
4. Дослідити структуру та функції біологічних мембран за допомогою методу спінових міток. Цей метод заслуговує на особливу увагу.

8.5.2. Метод спінових міток (спінових зондів)

Для вивчення структури і функцій біологічних мембран з успіхом застосовується **метод спінових міток**, або **спінових зондів**.

Пояснимо суть цього методу. Похідну стійкого вільного радикала, частіше нітросильного, пов'язують ковалентним зв'язком з будь-якою функціональною групою білка або ліпиду, а потім таку спін-мічену молекулу вбудовують в ліпідний бішар мембран, утворюючи так званий "спіновий зонд". Форма сигналу спінової мітки залежить від обертальної рухливості зонда або тієї його ділянки, до якої вона "пришита" (рис. 8.27).

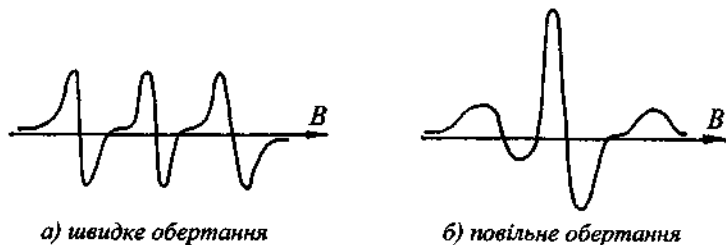


Рис. 8.27. Форми сигналу спінової мітки в залежності від рухливості зонда

Використання методу спінових зондів дало можливість встановити цілий ряд цікавих фактів.

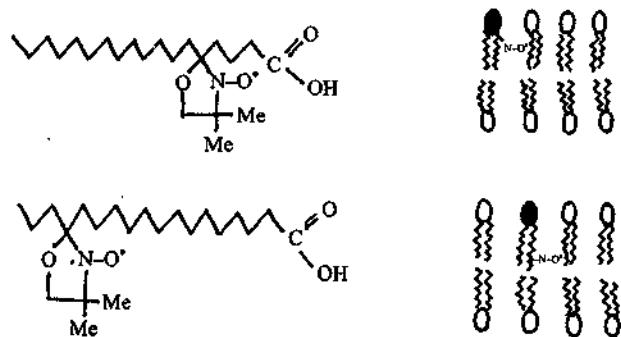


Рис. 8.28. Спінові зонди – спін-мічені аналоги стеаринових кислот

1. Використовуючи в ролі спінових зондів спін-мічені аналоги стеаринових кислот і вводячи їх в оболонки еритроцитів (рис. 8.28), довели, що відносно жорсткий порядок поширюється на глибину не більш ніж вісім вуглецевих атомів ланцюга від поверхні в глибину мембрани. У напрямку до центра ліпідного бішару рухливість жирнокислотних ланцюжків зростає. Оцінка обертальної рухливості дала можливість встановити, що

мікрів'язкість ліпідного бішару в мембрані еритроцита приблизно дорівнює в'язкості рослинної олії.

2. Аналогічним чином, шляхом введення в біологічні мембрани спін-мічених жирних кислот або синтезованих на їх основі фосfolіпідів було виявлено зміну структури мембрани при різних випадках патології, а також під дією ліків та інших біологічно активних сполук. Так, було показано, що анестетики збільшують плинність всередині ліпідного бішару мембрани, а холестерин і ДДТ зменшують її.

3. Методом ЕПР було вперше експериментально доведено існування фосfolіпідного перевертання. Був виявлений повільний фосfolіпідний перевертання ("flip-flop") в мембранних везикулах (ліпосомах, або фосfolіпідних бульбашках) (рис. 8.29). Саме таким перевертанням можна пояснити механізм пасивного транспорту деяких іонів через біологічні мембрани.



Рис. 8.29. Фосfolіпідний перевертання "flip-flop" в мембранах

8.5.3. Спін-імунологічний метод

Найпершим клінічним застосуванням методу спінових міток був *спін-імунологічний метод (СІМ)*, вперше описаний в літературі у 1972 р. Цей метод дає змогу встановити малі кількості біологічно активних речовин (наприклад, наркотичних речовин) у рідинах організму (сечі, слині, крові). Метод, заснований на витісненні міченої сполуки неміченою, якщо вона присутня в розчині, з її комплексу із специфічним антитілом та вимірюванням кількості витісненої мітки.

СІМ складається з трьох етапів:

- а) синтез спін-міченої моделі даної біологічно-активної сполуки;
- б) одержання специфічних антитіл проти даної речовини;

в) визначення за допомогою комплексу спін-міченої сполуки з антитілом вмісту шуканої біологічно активної речовини у біологічних рідинах.

Яким же чином здійснюється якісний і кількісний аналіз на біологічно активну речовину? При зв'язуванні спін-міченого морфіна з молекулою антитіла його обертання стає дедалі повільнішим, і спектр стає характерним для імобілізованого радикала (рис. 8.30, а).

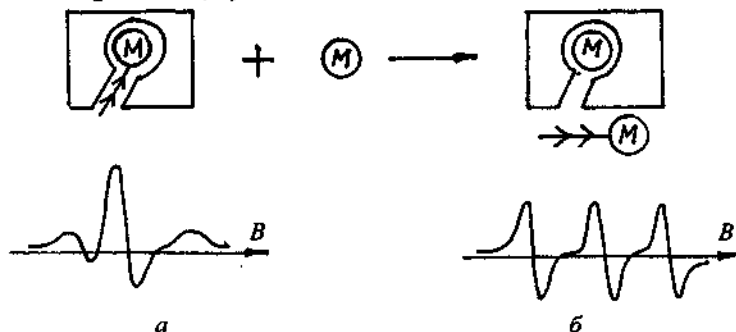


Рис. 8.30. Ілюстрація спін-імунологічного методу

Якщо тепер цей комплекс помістити в середовище, що вміщує морфін або споріднені йому сполуки, які мають більшу константу зв'язку з антитілами, то спін-мічений морфін буде підлягати обміну і витіснятись із комплексу з антитілом, при цьому спектр ЕПР буде змінюватись на характерний для незв'язаного радикала (мал. 8.30, б). Ця зміна піддається оцінці і дає змогу визначити концентрацію морфіноподібних сполук у розчині.

8.5.4. Метод ядерного магнітного резонансу

Розглянемо основні принципи, що лежать в основі методу *ядерного магнітного резонансу (ЯМР)*, який був відкритий у 1946 році Ф.Блохом і Е.Парселлом. Як відомо, ядра, що вміщують непарну кількість нуклонів (протонів і нейтронів), мають відмінні від нуля спінові і відповідно магнітні моменти. Такі ядра є парамагнітними частинками.

У зовнішньому магнітному полі система магнітних ядер розпадається на кілька підсистем, відповідно до двох можливих орієнтацій ядерних магнітних моментів відносно напрямку зовнішнього магнітного поля.

Розглянемо окремий випадок ЯМР – *протонний магнітний резонанс (ПМР)*. В цьому разі магнітний момент ядра можна записати так:

$$P_{m\alpha} = g_{\alpha} \mu_{\alpha} J,$$

де J – спінове квантове число ядра (для протона $J = 1/2$); μ_{α} – ядерний магнетон; g_{α} – “жи-фактор” для ядра.

У зовнішньому магнітному полі система протонів розпадається на дві підсистеми (рис. 8.31) відповідно до двох можливих орієнтацій магнітних моментів ядер щодо зовнішнього поля (можливі значення магнітного спінового числа $m_j = +1/2, -1/2$).

Умова резонансного поглинання енергії системою протонів має такий вигляд:

$$h\nu = g_{\alpha} \mu_{\alpha} B.$$

З наведеного вище можна було б зробити висновок, що при фіксованій частоті високочастотного поля всі протони, що входять до складу молекул, будуть давати сигнал поглинання при одному і тому самому значенні індукції магнітного поля B . Якби це й справді було так, то метод ЯМР не мав би для хіміків та медиків майже ніякої цінності. У реальній ситуації умова ядерного резонансного поглинання має такий вигляд:

$$h\nu = g_{\alpha} \mu_{\alpha} (B + B_{\text{лок}}), \quad (8.26)$$

де $B_{\text{лок}}$ – додаткове локальне магнітне поле, яке створюється у місці знаходження резонуючого ядра оточуючими ядрами та електронами. Таким чином, $B_{\text{лок}}$ визначається хімічною структурою молекули.

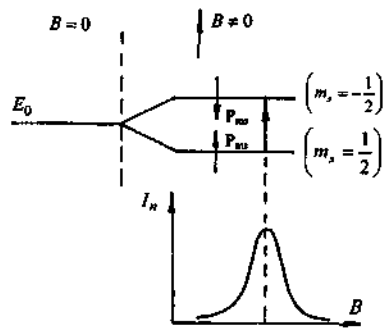


Рис. 8.31. Розщеплення енергетичного рівня протонів у зовнішньому магнітному полі

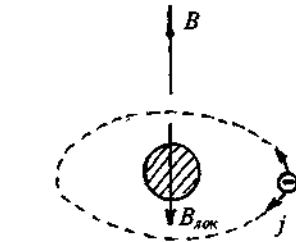


Рис. 8.32. Механізм виникнення локального магнітного поля в місці знаходження резонуючого ядра

Однією з основних причин виникнення таких полів є ефект діамagnetного екранування: зовнішнє магнітне поле індукє електронні струми в молекулі, які викликають появу магнітних полів, спрямованих за правилом Ленца протилежно зовнішньому магнітному полю (рис. 8.32), тобто

$$B_{\text{лок}} = -\sigma B,$$

де σ - стала екранування.

Таким чином, кожний протон знаходиться в деякому ефективному полі, яке характеризується індукцією:

$$B_{\text{эф}} = B - \sigma B = B(1 - \sigma). \quad (8.27)$$

Відмінності в електронному екрануванні протонів, що входять до складу молекули, можуть бути зумовлені різною електронною густиною. Так, наприклад, протони, приєднані до електронегативних груп і атомів (ОН, О, галогенам) або розміщені поблизу від них, екрануються слабкіше і дають сигнал ПМР при менших значеннях індукції B зовнішнього поля.

Спектри ПМР реєструють, як правило, при значеннях $B = 1,4 \text{ Тл}$ та $\nu = 60 \text{ МГц}$ ($\lambda = 5 \text{ м}$), що відповідає радіохвильовому діапазону.

Спектри ПМР рідин складаються з порівняно вузьких ліній, що відповідають різним групам структурно-еквівалентних протонів, тобто протонам, що знаходяться в різних $B_{\text{лок}}$. Якщо протони, що входять до складу молекули, еквівалентні, то спостерігається одна лінія поглинання (наприклад, для молекули H_2O). У спектрі ПМР етанолу спостерігаються три лінії, що відповідають трьом групам структурно-еквівалентних протонів – гідроксильному (ОН), метиленовим (CH_2) та метильним (CH_3) (рис. 8.33).

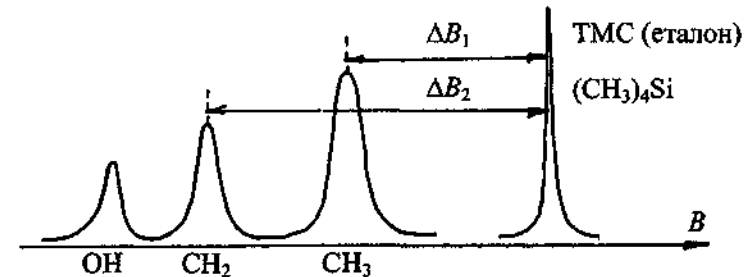


Рис. 8.33. Спектр ПМР етанолу

Для одержання інформації про досліджувані молекули використовують чотири параметри спектра ПМР:

1. *Інтегральна інтенсивність ліній*, що визначається площею під кривою поглинання і пропорційна кількості протонів, які знаходяться в даному хімічному оточенні.

2. *Положення ліній, або хімічний зсув*, яке визначається зміщенням лінії поглинання (ΔB) протонів щодо лінії поглинання протонів еталонної сполуки – тетраметилсилану (ТМС). Величина хімічного зсуву вимірюється в безрозмірних одиницях, що називаються мільйонними частками:

$$\delta = \frac{\Delta B}{B} \cdot 10^6 \text{ (м.ч.)}, \quad (8.28)$$

де B – значення індукції магнітного поля для сигналу еталона.

3. *Ширина смуги*, яка визначає, як і в методі ЕПР, характер молекулярного руху.

4. *Спін-спінове розщеплення*. При високій розрізняльній здатності приладу лінії поглинання в спектрі етанолу

розщеплюються на компоненти: CH_2 – на чотири, CH_3 – на три, OH – на три (рис. 8.34). Таке розщеплення називається спін-спіновим. Воно виникає внаслідок збурення системи ядерних спінів, для якої спостерігається лінія поглинання, іншою спіновою системою. Можна показати, що система з n еквівалентних протонів розщеплює лінію іншої системи протонів на $(n+1)$ компоненту.

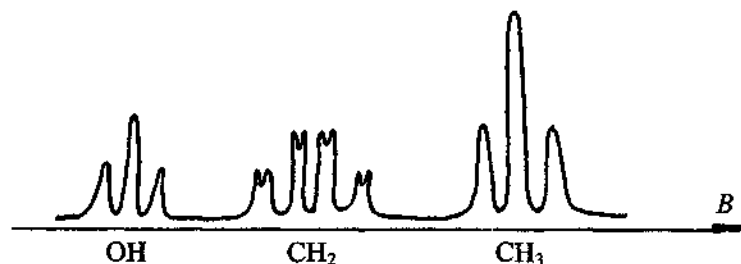


Рис. 8.34. Спін-спінове розщеплення в спектрі ПМР етанолу

Таким чином, дані про інтегральну інтенсивність, хімічний зсув та спін-спінове розщеплення дають змогу одержати інформацію про наявність в молекулі певних функціональних груп та їх кількість, а також про їх взаємне розташування. Тому спектри ЯМР є “відбитком пальців” молекули. Поряд з цим, метод ЯМР є нині одним з найбільш перспективних для вивчення міжмолекулярних взаємодій в біологічних системах, оскільки міжмолекулярні взаємодії як електростатичної природи, так і донорно-акцепторного характеру спричиняють перерозподіл електронних густин на взаємодіючих молекулах і, відповідно, зміни умов екранування, що викликають зміну хімічного зсуву.

Як і ЕПР, метод ЯМР успішно застосовується для дослідження біологічних мембран, оскільки аналіз ЯМР-спектрів мембран дає змогу не тільки визначити, скільки певних функціональних груп вміщує досліджуваний об’єкт, а й встановити по ширині смуг поглинання ступінь рухливості відповідних груп в мембранах.

В останні роки, поряд з рентгенівською томографією, набуває широкого застосування метод ЯМР-томографії, який забезпечує можливість вивчення різних частин макроскопічного об’єкта на підставі відмінностей сигналу ЯМР, зумовлених

градієнтами магнітного поля в різних напрямках. Важливою перевагою ЯМР-томографії є відсутність радіаційних пошкоджень та можливість одержати зображення органів всередині черепа або грудної клітки завдяки прозорості повітря і кісткової тканини для радіохвиль. До детальнішого розгляду сучасних методів комп’ютерної томографії ми ще повернемося в параграфі 9.6 наступного розділу.

8.6. ПРАКТИКУМ З КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

8.6.1. ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

“Основні уявлення квантової механіки”

Мета практичного заняття:

1. Дати уявлення про математичний апарат квантової механіки.
2. Сформувані у студентів знання основних положень квантової механіки.
3. Дати уявлення про фізичну основу спектральних методів дослідження біологічних систем.

Теоретичні питання, що розглядаються на практичному занятті

1. Криза основ класичної фізики та передумови створення квантової механіки.
2. Гіпотеза де Бройля. Хвильові властивості мікрочастинок, їх дослідне підтвердження.
3. Електронний мікроскоп: принципова схема, межа розрізнення.
4. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга – одне з основних положень квантової механіки.
5. Рівняння Шредінгера. Хвильова функція, її фізичний зміст.
6. Рівняння Шредінгера для атома водню. Квантові числа, їх фізичний зміст.
7. Багатоелектронні атоми. Принципи побудови електронних конфігурацій.
8. Оптичні атомні спектри. Спектри випромінювання атомів водню.
9. Молекулярні спектри. Спектральний аналіз. Метод спектроскопометрії.

Додаткова література для підготовки до практичного заняття

1. Ливенцев Н.М. Курс фізики. – М.: Высшая школа, 1978.
2. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996.

Завдання для самостійної роботи і самоконтролю

Після вивчення теоретичного матеріалу слід ознайомитись з еталонами розв'язку задач і перевірити свою підготовку до виконання самостійних завдань.

Типові задачі з еталонами розв'язків

1. Хвильові властивості частинок. Формула де Бройля.

Задача 1

Порівняти довжини хвиль де Бройля для електрона та кульки з масою $m = 1 \text{ г}$, якщо вони мають однакові швидкості, що дорівнюють $v = 100 \text{ м/с}$. Як визначити експериментально довжину хвилі де Бройля для кульки та електрона, що рухаються?

Еталон розв'язку

Згідно з гіпотезою де Бройля, будь-яким частинкам або предметам, що рухаються, притаманні хвильові властивості. Вони можуть бути охарактеризовані довжиною хвилі, яка пов'язана зі швидкістю руху формулою

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Розрахуємо довжину хвилі де Бойля для кульки

$$\lambda_k = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{1 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2} = 6,62 \cdot 10^{-33} \text{ м.}$$

Розрахуємо довжину хвилі де Бойля для електрона

$$\lambda_e = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^2} = 7,3 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Відповідь: $\lambda_k = 6,62 \cdot 10^{-33} \text{ м}$; $\lambda_e = 7,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}$.

Зауваження: для кульки, що рухається, довжина хвилі настільки мала, що не може бути виміряна ніякими експериментальними методами, тоді як для електрона вимірювання λ можна здійснити по дифракційній картині, що одержується на просторових структурах – кристалічних решітках.

2. Електронний мікроскоп, його межа розрізнення.

Задача 2

Знайти межу розрізнення електронного мікроскопа, якщо прискорююча напруга $\Delta\phi = 100 \text{ кВ}$, а кутова апертура $\theta = 10^{-2} \text{ рад}$.

Еталон розв'язку

Межа розрізнення мікроскопа визначається довжиною хвилі λ випромінювання, яке використовується, числовою апертурою $A = n \sin \theta$ і може бути розрахована за формулою:

$$Z = \frac{0,5\lambda}{n \sin \theta}$$

“Освітлення” об'єкта в електронному мікроскопі здійснюють електронним пучком. Довжина хвилі, що характеризує електронні пучка, визначається швидкістю їх руху

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Швидкість електронів може бути визначена з умови, що кінетична енергія електрона дорівнює роботі електричного поля по переміщенню заряду електрона, а саме:

$$\frac{mv^2}{2} = e\Delta\phi.$$

Враховуючи всі наведені вище формули та співвідношення $\sin \theta \approx \theta$ для малих кутів, для межі розрізнення електронного мікроскопа отримаємо

$$Z = \frac{0,5h}{\sqrt{2em\Delta\phi} n \sin \theta} = \frac{0,5 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^2} \cdot 10^{-2}} = 0,94 \cdot 10^{10} \text{ м.}$$

Відповідь: $Z = 0,094 \text{ нм}$.

3. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга.

Задача 3

Пучок електронів рухається вздовж електронно-променевої трубки зі швидкістю $v = 10^8$ см/с. Швидкість визначена з точністю до 0,01%. Чи має сенс поняття траєкторії руху електронів у трубці?

Еталон розв'язку

Співвідношення невизначеностей Гейзенберга дає змогу встановити точність у визначенні координати електрона

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{m\Delta v_x}$$

За умовою задачі $\Delta v_x = 10^{-4}v = 10^2$ м/с. Звідси маємо

$$\Delta x \geq \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^2} = 10^{-6} \text{ м} = 10^{-4} \text{ см}$$

Відповідь: Одержане значення $\Delta x = 10^{-4}$ см = 1 мкм свідчить про те, що координата електрона може бути визначена з достатньо високою мірою точності. Таким чином, поняття траєкторії руху електронів у трубці має сенс.

Задача 4

Тривалість збудженого стану атома водню відповідає значенню $\Delta t = 10^{-8}$ с. Чому дорівнює за цих умов невизначеність енергії збудженого енергетичного рівня?

Еталон розв'язку

Тривалість життя атома у збудженому стані Δt і невизначеність значення енергії даного стану пов'язані співвідношенням Гейзенберга:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar,$$

звідки

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{10^{-8}} = 1,05 \cdot 10^{-26} \text{ Дж}$$

Відповідь: $\Delta E = 1,05 \cdot 10^{-26}$ Дж.

4. Квантові числа, їх фізичний зміст.

Задача 5

Знайти значення енергії та орбітального моменту імпульса електрона в атомі водню, що відповідають станам: 1s, 2s, 3s.

Еталон розв'язку

Енергія електрона в атомі водню відповідно до розв'язку рівняння Шредінгера набуває значення

$$E = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{me^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{Rh}{n^2},$$

де n – головне квантове число, $R = 3,3 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ – стала Рідберга.

Таблиця 8.2. Значення енергії електрона для трьох станів

Стан	n	E
1s	1	$-Rh$
2s	2	$-Rh/4$
2p	2	$-Rh/4$

Відповідно до уявлень квантової механіки орбітальний момент імпульса електрона визначається значенням орбітального квантового числа l за формулою

$$L_{orb} = \hbar\sqrt{l(l+1)}.$$

Таблиця 8.3. Значення орбітального моменту імпульса для трьох станів

Стан	l	L_{orb}
1s	0	0
2s	0	0
2p	1	$\hbar\sqrt{2}$

Відповідь:

Для стану 1s: $E = -Rh = -3,3 \cdot 10^{15} \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} = -21,9 \cdot 10^{-19}$ Дж, $L_{орб} = 0$.

Для стану 2s: $E = -Rh/4 = -5,48 \cdot 10^{-19}$ Дж, $L_{орб} = 0$.

Для стану 2p: $E = -Rh/4 = -5,48 \cdot 10^{-19}$ Дж, $L_{орб} = \hbar\sqrt{2} = 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 1,4 = 1,47 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

5. Атомні спектри

Задача 6

Знайти границі серії Бальмера (в частотах та довжинах хвиль). Співставити ці дані з інтервалом частот та довжин хвиль світла у видимому діапазоні.

Еталон розв'язку

Серія Бальмера відповідає переходам електрона на енергетичний рівень з головним квантовим числом $n = 2$ з усіх вище розташованих рівнів. Частоти цієї серії можуть бути розраховані за такою формулою:

$$\nu = R(1/2^2 - 1/n_k^2),$$

де $n_k = 3, 4, 5, \dots$, а $R = 3,3 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$ – стала Рідберга. Границі серії Бальмера визначаються такими значеннями:

при $n_k = 3$ найменша частота становить

$$\nu_{сп1} = R(1/2^2 - 1/3^2) = 0,46 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1};$$

при $n_k = \infty$ гранична лінія має частоту

$$\nu_{сп2} = R(1/2^2 - 1/\infty^2) = 0,82 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}.$$

Відповідні довжини хвиль становить

$$\lambda_{сп1} = c/\nu_{сп1} = 3 \cdot 10^8 / 0,46 \cdot 10^{15} = 6,52 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 652 \text{ нм},$$

$$\lambda_{сп2} = c/\nu_{сп2} = 3 \cdot 10^8 / 0,82 \cdot 10^{15} = 3,66 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 366 \text{ нм}.$$

Відповідь: для серії Бальмера $0,46 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1} < \nu_B < 0,82 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$ та $366 \text{ нм} < \lambda_B < 652 \text{ нм}$, тоді як для видимого діапазону $400 \text{ нм} < \lambda < 760 \text{ нм}$.

Задача 7

Вважаючи, що в збудженому стані атом водню перебуває протягом часу $\Delta t = 10^{-8} \text{ с}$, визначити півширину лінії $\Delta\lambda$ в серії Бальмера, що відповідає переходу з третього рівня на другий.

Еталон розв'язку

Використовуючи співвідношення невизначеностей Гейзенберга, визначимо “розмитість” ΔE енергетичного рівня, що відповідає збудженому стану:

$$\Delta E \geq \hbar / \Delta t.$$

При переході атома зі збудженого рівня, що має енергію $E \pm \Delta E$, на нижчий рівень з енергією E_0 випромінюється фотон з енергією

$$h\nu = (E \pm \Delta E) - E_0 = (E - E_0) \pm \Delta E.$$

Таким чином, частота фотона, що випромінюється, має невизначеність, яка становить $\Delta\nu = \Delta E/h$, тобто лінії спектра мають скінчену ширину $\nu \pm \Delta\nu$ в частотному діапазоні або $\lambda \pm \Delta\lambda$ в діапазоні довжин хвиль.

Довжина хвилі пов'язана з частотою співвідношенням $\lambda = c/\nu$. Диференціюючи цю рівність і враховуючи результат попередньої задачі щодо частоти переходу з третього рівня на другий в серії Бальмера, одержимо шукану величину $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda \approx d\lambda = (c/\nu^2)\Delta\nu = (c/\nu^2) \cdot \Delta E/h = (c/\nu^2) \cdot \hbar/2\pi\hbar \Delta t = c/2\pi\nu^2 \Delta t = 3 \cdot 10^8 / 2 \cdot 3,14 \cdot (0,46 \cdot 10^{15})^2 \cdot 10^{-8} = 2,38 \cdot 10^{-5} \text{ нм}.$$

Відповідь: $\Delta\lambda = 2,38 \cdot 10^{-5} \text{ нм}$.

Завдання для перевірки кінцевого рівня знань

1. Записати рівняння Шредінгера для атома водню.
2. Визначити границі серії Лаймана і вказати, в якій області спектра лежить вказана серія?
3. Розрахувати орбітальний момент імпульсу електрона в стані 3p.
4. Знайти межу розрізнення електронного мікроскопа з кутовою апертурою $\theta = 10^{-2} \text{ рад}$.
5. Розрахувати енергію атома водню, якщо електрон знаходиться в стані 3s.

- Середня тривалість життя молекули в збудженому стані дорівнює 10^{-8} с. Система випромінює світло, яке має довжину хвилі $\lambda = 610$ нм. Чому дорівнює невизначеність довжині хвилі $\Delta\lambda$?
- Розрахувати довжину хвилі де Бройля для електрона, який пройшов прискорюючу напругу $\Delta\phi = 100$ В.
- Вказати максимальну кількість електронів у багатоелектронному атомі, що може знаходитись на різних підрівнях та шарах атома.
- Електрон пролітає щілину шириною $\Delta x = 1$ мкм. З якою похибкою може бути визначена складова імпульса вздовж вісі x під час прольоту щілини?
- Записати електронні конфігурації для атомів азота та вуглецю.
- Відобразити графічно (в декартових координатах) орбітали електрона, які характеризуються значеннями орбітального квантового числа $l = 0, 1, 2$.
- Знайти проєкції орбітального моменту електрона на напрямок зовнішнього магнітного поля, який характеризується орбітальним квантовим числом $l = 2$.
- Вказати можливі значення проєкції спіна електрона на напрямок зовнішнього магнітного поля.
- Середня тривалість життя молекули в збудженому стані дорівнює 10^{-8} с. Система випромінює світло з частотою $\nu = 0,46 \cdot 10^{15}$ с $^{-1}$. Вказати невизначеність частоти $\Delta\nu$.

8.6.2. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА

“Застосування фотоелемента для виміру освітленості та визначення його чутливості”

Мета роботи: Ознайомитись з принципом дії вентильного фотоелемента. Визначити інтегральну чутливість фотоелемента. Навчитися використовувати фотоелемент для виміру освітленості.

Прилади та обладнання: Лабораторна установка, що вміщує: селеновий фотоелемент, оптичну лаву, лампу розжарювання, мікроамперметр.

Питання для підготовки до лабораторної роботи

- Зовнішній фотоефект.
- Закони зовнішнього фотоефекту.
- Застосування зовнішнього фотоефекту.
- Фотоефект в напівпровідниках.
- Застосування внутрішнього фотоефекту.

Додаткова література

- Ливенцев Н.М. Курс фізики. – М.: Высшая школа, 1978. – Ч. 2.
- Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996.

Короткі теоретичні відомості

Вентильний фотоелемент (фотоелемент із запираючим шаром) становить основу *люксметра* – приладу для вимірювання освітленості. Розглянемо принцип його дії. Як відомо, у місці контакту напівпровідників p - та n -типів виникає область p - n переходу завтовшки $0,1$ мкм. Для цієї області характерними є мала концентрація носіїв заряду (вільних електронів і дірок) та наявність контактної різниці потенціалів (рис. 8.35). При освітленні p - n переходу та прилеглих до нього областей у напівпровідниках відбувається явище *внутрішнього фотоефекту*, тобто утворюються пари дірка-електрон. Якщо народження такої пари відбувається поряд з областю p - n переходу, то і електрон, і дірка можуть уникнути рекомбінації на шляху до p - n переходу. Під дією електричного поля p - n переходу заряди, що утворились, розділяються. Так, наприклад, дірка, що утворилася під дією світла в області напівпровідника n -типу і досягла області p - n переходу, буде втягнута електричним полем p - n переходу в область напівпровідника p -типу, в той час як електрон залишається в області напівпровідника n -типу. Таким чином, розділення зарядів, що утворилися, відбувається внаслідок односторонньої (“вентильної”) провідності p - n переходу для неосновних носіїв (дірок – для напівпровідників n -типу та електронів – для напівпровідників p -типу).

У результаті розділення зарядів між напівпровідниками p - та n -типів виникає електрорушійна сила. Її величина досягає $\sim 0,1$ – 15 В і визначається кількістю електронно-діркових пар, що утворилися в результаті внутрішнього фотоефекту. Кількість цих пар, в свою чергу, пропорційна кількості фотонів, що падають на фотоелемент, тобто освітленості фотоелемента.

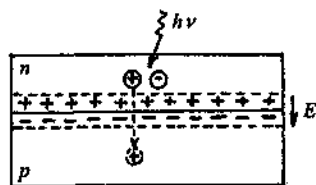


Рис. 8.35. Розділення зарядів, що утворилися під дією світла, у вентильному фотоелементі

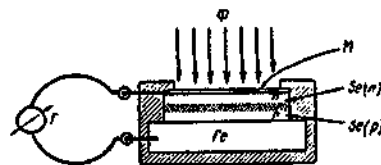


Рис. 8.36. Схема селенового фотоелемента із запираючим шаром

Вентильні фотоелементи виготовляють на основі селена, германія, кремнія, сірчастого срібла. У цій лабораторній роботі ми маємо справу з селеновим фотоелементом (рис. 8.36). На поліровану залізну пластинку, яка є одним з електродів фотоелемента, наносять шар селена з провідністю p -типу (основні носії – дірки). Зверху на шар селена напиляють тонкий, прозорий для світлових променів шар срібла, котрий виконує роль другого електрода. За рахунок дифузії атомів срібла в шар селена останній набуває провідності n -типу (основні носії – електрони). Між чистим селеном та селеном з домішками срібла виникає область p - n переходу. Світло легко проходить крізь прозору плівку і викликає явище внутрішнього фотоелемента в шарі селена (в основному, в шарі селена n -типу). В результаті розділення зарядів – електронів та дірок – електричним полем p - n переходу виникає електрорушійна сила, при цьому залізна пластинка має додатний заряд. Якщо плівку срібла з'єднати з залізною пластинкою провідником, підключивши в коло гальванометр, то останній покаже присутність електричного струму, що тече в зовнішньому колі від заліза Fe (+) до верхнього електрода М (-).

Таким чином, вентильний фотоелемент поводить себе при освітленні як генератор ЕРС, причому величина фотоструму i_ϕ виявляється пропорційною до величини світлового потоку Φ , який падає на активну поверхню фотоелемента: $i_\phi = k\Phi$. Коефіцієнт пропорційності k називається *інтегральною чутливістю*. Він чисельно дорівнює силі струму в колі фотоелемента, який виникає за умови освітлення активної поверхні світловим потоком в 1 люмен:

$$k = i_\phi / \Phi \text{ мкА/лм.}$$

Чутливість селенових фотоелементів досить значна і може досягти 500 мкА/лм.

Якщо активна поверхня S фотоелемента освітлюється потоком світла Φ , то

$$\Phi = ES,$$

де E – освітленість поверхні фотоелемента. Отже, маємо

$$i_\phi = k\Phi = kES.$$

Оскільки інтегральна чутливість фотоелемента k та його активна поверхня S – величини сталі, то величина фотоструму i_ϕ виявляється пропорційною до освітленості E . Освітленість фотоелемента у випадку точкового джерела світла (коли відстань між лампою та фотоелементом значно більша за розміри нитки розжарювання лампи) розраховується за формулою:

$$E = I / R^2,$$

де R – відстань між джерелом світла та поверхнею фотоелемента, а I – сила світла джерела (значення I вказане на приладі).

Порядок виконання лабораторної роботи

Завдання 1. Виконати градування вентильного фотоелемента.

1. Ознайомитися з лабораторною установкою для градування фотоелемента (рис. 8.37).
2. Підключити джерело світла до джерела струму.
3. Для 5–6 відстаней R між фотоелементом та джерелом світла визначити силу фотоструму.

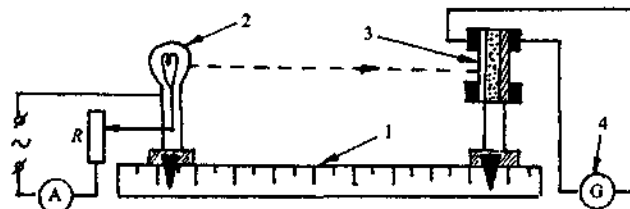


Рис. 8.37. Установка для градування фотоелемента

4. Для кожної з цих відстаней розрахувати освітленість E за формулою $E = I/R^2$ в люксах (лк).

5. Результат занести до таблиці.

Таблиця. Значення освітленості та фотоструму

№	Освітленість E , лк	Фотострум i_ϕ , мКА
1		
2		
3		
4		
5		

6. За даними таблиці побудувати графік $i_\phi = f(E)$.

7. Одержаний графік може бути використаний для виміру освітленості будь-якої поверхні. Для цього досить розташувати фотоелемент на цій поверхні і визначити i_ϕ . Значення освітленості поверхні, що відповідає одержаному значенню i_ϕ , визначається за допомогою графіка $i_\phi = f(E)$.

Завдання 2. Визначити інтегральну чутливість фотоелемента.

1. На ділянці графіка, де спостерігається лінійна залежність між i_ϕ та освітленістю E (для досить великих відстаней R), взяти точку і визначити для неї i_ϕ та E .

2. Розрахувати площу активної поверхні фотоелемента за такою формулою: $S = \pi d^2/4$, де d – діаметр поверхні фотоелемента (вказаний на приладі).

3. Розрахувати величину чутливості фотоелемента за такою формулою:

$$k = i_\phi/SE,$$

де значення i_ϕ , E та S одержані в пп. 1, 2.

Контрольні запитання

1. У чому полягає явище внутрішнього фотоелектру?
2. У чому полягає принцип дії вентильного фотоелемента?
3. Опишіть будову та принцип дії селенового елемента.
4. Що називається інтегральною чутливістю фотоелемента?
5. Як визначається інтегральна чутливість фотоелемента в цій лабораторній роботі?

8.6.3. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА

“Вивчення роботи оптичного квантового генератора”

Мета роботи: вивчити будову та принцип дії газового лазера, визначити основні технічні характеристики лазера – довжину хвилі його випромінювання та енергію кванта.

Прилади та обладнання: гелій-неоновий газовий лазер, дифракційна решітка, екран, міліметрова лінійка.

Питання для підготовки до лабораторної роботи

1. Рівноважна та інверсна заселеність енергетичних рівнів.
2. Індуковане випромінювання.
3. Лазери, принцип дії і застосування в медицині.

Додаткова література

1. Ливенцев Н.М. Курс фізики. – М.: Высшая школа, 1978. – Ч. 2.
2. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996.

Теоретичні відомості

Розглянемо будову та принцип дії газового гелій-неонового лазера (рис. 8.38). Прилад складається з трубки 1, наповненої сумішшю газів: гелія (під парціальним тиском 1 мм рт. ст.) та неона (під парціальним тиском 0,1 мм рт. ст.). Атоми неона є випромінюючими (робочими), атоми гелія – допоміжними, які необхідні для створення інверсної заселеності енергетичних рівнів атомів неона. Збудження атомів гелія досягають за допомогою тліючого електричного розряду. Для створення тліючого розряду в трубку 1 вмонтовані електроди 2 і 3, під'єднані до джерела електричного струму.

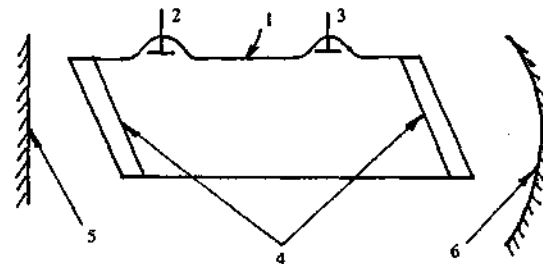


Рис. 8.38. Будова газового гелій-неонового лазера

На рис. 8.39 зображена система енергетичних рівнів атомів гелію та неона. Під дією електричного розряду атоми гелію переходять на збуджений рівень 2. Внаслідок непружного зіткнення атоми гелію передають енергію атомам неона, які, збуджуючись, накопичуються на двох близько розташованих метастабільних рівнях 3. Таким чином, у трубці створюється середовище з інверсною заселеністю енергетичних рівнів. Спонтанний перехід окремих атомів Ne з двох метастабільних рівнів 3 на проміжний рівень 2 викликає появу фотонів, які спричиняють індуковане (вимушене) когерентне випромінювання з довжинами хвиль $\lambda_1 = 632,8 \text{ нм}$ (червоний діапазон) та $\lambda_2 = 1153 \text{ нм}$ (інфрачервоний діапазон). Для збільшення потужності випромінювання трубку 1 розміщують в дзеркальному резонаторі (рис. 8.38).

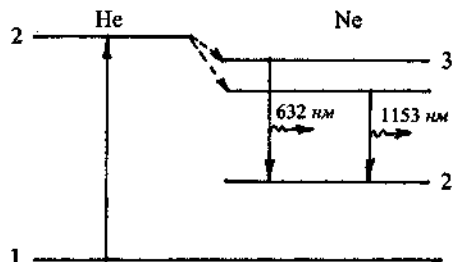


Рис. 8.39. Система енергетичних рівнів атомів гелію та неона

Відбиваючись від дзеркал і проходячи багато разів вздовж вісі трубки, потік фотонів залучає до індукованих переходів дедалі більшу кількість атомів Ne , внаслідок чого інтенсивність випромінювання збільшується. Трубка 1 з торців закрита плоскопаралельними пластинками 4, які розташовані під кутом Брюстера до вісі трубки. Таке положення пластинок призводить до плоскої поляризації лазерного випромінювання.

Для визначення довжини хвилі випромінювання лазера в цій лабораторній роботі пропонується використати дифракційну решітку. Вона становить скляну пластинку, на яку через рівні проміжки a нанесені паралельні непрозорі штрихи шириною b . Величина $a + b = d$ називається періодом (або постійною) дифракційної решітки. При освітленні решітки монохроматичним

світлом відбувається явище дифракції, внаслідок якого на екрані, розташованому за решіткою, спостерігається дифракційна картина (рис. 8.40).

При нормальному падінні світла на решітку головні дифракційні максимуми характеризуються умовою

$$d \sin \varphi_k = k\lambda,$$

де d – постійна решітки; λ – довжина хвилі випромінювання; φ_k – кут, на який дифрагують промені, що утворили даний максимум; k – ціле число, що називається порядком максимуму ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$). Якщо нам відомі значення d , φ_k та k , то довжину хвилі випромінювання, що проходить крізь дифракційну решітку, визначають за такою формулою:

$$\lambda = \frac{d \sin \varphi_k}{k}.$$

Оскільки, як правило, кути дифракції φ_k є малими, можна вважати, що

$$\sin \varphi_k \approx \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{l_k}{L},$$

де l_k – відстань на екрані між максимумами нульового та k -того порядків; L – відстань між решіткою та екраном.

Порядок виконання лабораторної роботи

Завдання 1. Визначити довжину хвилі випромінювання лазера.

1. Розташувати дифракційну решітку та екран перпендикулярно до вісі лазера (рис. 8.40).

2. Переміщуючи екран, отримати на ньому чітке зображення дифракційної картини. При цьому треба домогтися, щоб на екрані спостерігалися максимуми не менше трьох порядків.

3. Виміряти за допомогою міліметрової лінійки відстань L між решіткою та екраном.

4. Виміряти відстань l_1 між максимумами нульового (центральна пляма) та першого порядків.

5. Визначити значення $\operatorname{tg} \varphi_1$ для максимуму першого порядку.

6. Визначити довжину хвилі λ_1 випромінювання лазера за формулою $\lambda = d \sin \varphi_k / k = \frac{dl_k}{L}$.

7. Виконати аналогічні виміри та розрахунки для максимумів другого та третього порядків.

8. Результати вимірів та розрахунків занести до таблиці.

Таблиця. Значення відстаней та довжини хвилі

k	$l_k, \text{мм}$	$L, \text{мм}$	$\text{tg } \varphi_k$	$\lambda, \text{мм}$
1				
2				
3				

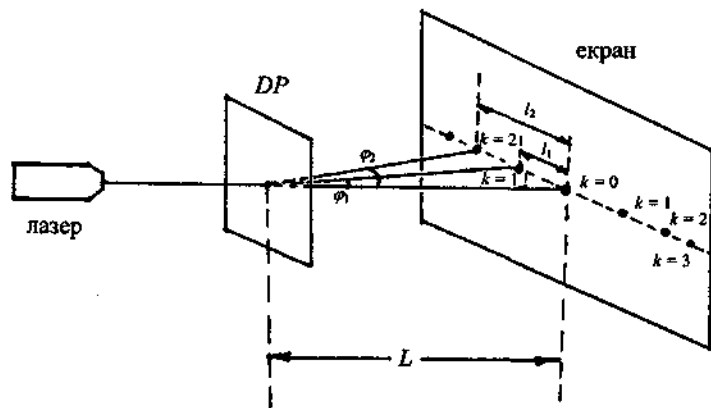


Рис. 8.40. Визначення довжини хвилі лазера за допомогою дифракційної решітки

9. Обчислити середнє значення довжини хвилі $\bar{\lambda}$ випромінювання лазера.

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3}$$

Завдання 2. Визначити енергію кванта випромінювання лазера за такою формулою:

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

Контрольні запитання

1. Назвіть основні властивості індукованого випромінювання.
2. Опишіть будову та принцип дії гелій-неонового лазера.
3. Як утворюється інверсна заселеність енергетичних рівнів атомів в гелій-неоновому лазері?
4. Яке призначення має резонатор в газовому лазері?
5. Як можна визначити експериментально довжину хвилі лазерного випромінювання?
6. Як визначити енергію фотона, що випромінюється лазером?
7. Назвіть області застосування лазера в медицині.

РОЗДІЛ 9. ІОНІЗУЮЧЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ ТА ЙОГО ДІЯ НА МЕДИКО-БІОЛОГІЧНІ ОБ'ЄКТИ

“Цю загрозу породила наука, але дійсний ключ до вирішення поставленої перед нами проблеми – в розумі та серцях людей. Немає такої машини, за допомогою якої ми могли б впливати на чужі серця. Для цього потрібно, щоб наші власні серця стали іншими і щоб ми сміливо виказували свої погляди. Лише з ясним розумом і чистим серцем ми зможемо набратися мужності, щоб побороти той страх, який тяжіє над людством”.

А. Ейнштейн

Слова, що винесені в епіграф, Альберт Ейнштейн сказав півсторіччя тому, оцінюючи загрозу ядерної війни і відчуваючи свою певну вину перед людством, оскільки він своїми відкриттями ненавмисно сприяв створенню атомної бомби. Ці слова залишаються актуальними і нині в той час, коли робляться відкриття в біології і медицині (зокрема, в генній інженерії), які є видатними як за своїм науковим значенням, так і за своєю загрозою для життя окремих людей і всієї біосфери Землі.

Особлива роль в подоланні небезпечних тенденцій в розвитку сучасної цивілізації належить лікарям. Саме до них передусім слід віднести слова ще одного відомого фізика ХХ століття Віктора Вайскопфа: “Буття людини спирається одночасно на двох китів, якими є знання і почуття. Але самі почуття без знань не є ефективними, тоді як одні знання без почуттів не є гуманними”.

В цьому розділі викладаються фізичні, біофізичні і медичні проблеми, пов'язані з дією іонізуючого випромінювання на людину та інші біооб'єкти. Іонізуюче випромінювання – це загальний термін, що об'єднує альфа-, бета- і гамма-випромінювання, рентгенівське випромінювання та потоки частинок (протонів, нейтронів та ін.). Важко переоцінити значення знань в цій галузі для сучасного лікаря, особливо в зв'язку з тими

проблемами, які на довгі часи поставила перед Україною та іншими країнами аварія на Чорнобильській АЕС.

9.1. РЕНТГЕНІВСЬКІ ПРОМЕНІ

9.1.1. Історія відкриття рентгенівських променів, праці І. Пуллой

У кінці 1895 р. Вільгельм Конрад Рентген повідомив про відкриття ним нових променів, які були названі X-променями. Ці промені були виявлені під час пропускання електричного струму через розряджений газ в розрядній трубці. Вони випромінювалися речовиною, яка бомбардувалася потоком швидких електронів.

За 14 років до перших досліджень Рентгена ці X-промені відкрив український фізик Іван Пуллой (1845–1919 рр.), уродженець містечка Гримаилова Тернопільської області. Пуллой після гімназії вступає на теологічний факультет Віденського університету. Паралельно відвідує лекції з математики, фізики, астрономії, які читались на філософському факультеті. І так ними захопився, що після закінчення курсу теології відмовляється від сану священника і займається фізико-математичними науками. Він у 1884 р. став професором Вищої технічної школи в Празі, в 1899–1900 рр. – її ректором, у 1902 р. – першим деканом першого в Європі електротехнічного факультету Вищої технічної школи. Дійсний член Наукового товариства імені Т.Г. Шевченка у Львові. І. Пуллой одержав міжнародне визнання за розробку електроосвітлювальних ламп та катодних трубок, першим досліджував лампи “холодного світла”. Він виготовив так звані “катодні лампи”, які спонукали його до відкриття X-променів. І. Пуллой відкрив іонізуючу здатність X-променів, першим дав пояснення їх природи і механізму утворення. Але Пуллой не приділив належної уваги своєму винаходу, займаючись іншими дослідженнями.

Його винахід дав можливість Рентгену в 1895 р. знову відкрити ті промені та отримати за це в 1901 р. першу Нобелівську премію з фізики. І внаслідок цих випадкових обставин, на

жаль, ми нині кажемо: “рентгенівські промені”, а не “промені Пулюя”.

Рентгенівські промені дуже сильно діяли на фотопластинку – засвічували її, іонізували газ. Ці промені також частково проходили через непрозорі для видимого світла тіла, поглинаючись тим менше, чим менша товщина цих тіл і атомні номери елементів, що входять до їх складу; викликали флуоресцентне свічення люмінофорів. Ці властивості X -променів використовують для їх виявлення.

9.1.2. Природа рентгенівських променів і методи їх отримання

Вчені з різних країн, починаючи з 1896 р., стали швидко поширювати відомості про нові промені і їх чудові властивості. Так, визначний російський фізик П.М. Лебедев, відомий своїм відкриттям тиску світла, вже 19 січня 1896 р. зробив знімок своєї руки і демонстрував його на лекціях під назвою “Про відкриття Рентгеном X -променів”, які відбулися в Санкт-Петербурзькому університеті 29 січня і 8 лютого 1896 р.

Тоді ще вчені, навіть такі досвідчені, як П.М. Лебедев, нічого не знали про біологічну дію радіації. Тому не можна без жаху і одночасно з великою повагою до цього лицаря науки читати такі слова із щоденника П. М. Лебедева: “20 лютого. Готуючись до “рентгенівської” лекції, я для зйомки грудної клітки позував 30 січня в клініці Льовшина 20 хвилин, не захищаючи обличчя, а 8 лютого – 60 хвилин, захищаючи обличчя цинковим листком, за виключенням підборіддя. В ніч з вчора на сьогодні у мене вилізла вся борода. З жахом чекаю, що буде далі. Виявляється, що брови також помітно випадають”. На жаль, великий вчений-фізик П. М. Лебедев, ім'ям якого названий Інститут фізики Російської Академії наук в Москві, прожив лише 48 років.

Наступні дослідження показали, що рентгенівські промені – це короткі електромагнітні хвилі з довжиною хвилі в інтервалі $\Delta\lambda = 8 \cdot 10^{-8} + 10^{-14}$ м. В шкалі електромагнітних хвиль вони розміщені між ультрафіолетовими і гамма-променями.

Хвильова електромагнітна природа рентгенівських променів була повністю доведена дослідями по дифракції рентгенівських променів на кристалічній решітці, які провів в 1912 р. німецький

фізик Лауе. Крім того, з цими променями були здійснені інтерференційні (російський фізик Лінник, 1930 р.) та дифракційні досліді, аналогічні дослідіам із дзеркалами Френеля і дифракції на щілині.

Одержання рентгенівського випромінювання. Будова рентгенівської трубки. Рентгенівські промені одержують в рентгенівських трубках – скляних балонах, з яких викачане повітря до тиску $p = 10^{-6} - 10^{-7}$ мм рт. ст. В балон впаєні два електроди: катод K і анод A (рис. 9.1).

Анод (антикатод) – металевий стержень, на скошеному кінці якого закріплена пластинка Z із тугоплавкого металу, яка називається дзеркальцем антикатада. Ділянка дзеркальця Z , на яку падає основна частина електронів (для концентрації електронів катод має спеціальний фокусуючий циліндр), називається фокусом трубки. Від його площі залежить ширина пучка випромінювання.

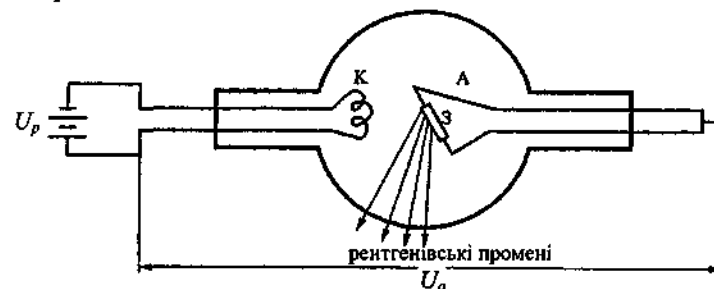


Рис. 9.1. Будова рентгенівської трубки

Катод становить спіраль із вольфрамового дроту, який нагрівається електричним струмом від джерела розжарювання U_p і випромінює електрони (термоелектронна емісія). Електрони, які випускає нагрітий катод, прискорюються електричним полем між катодом і антикатодом A і бомбардують антикатод. Прискорююча електрони різниця потенціалів U_a дорівнює кільком десяткам тисяч (і навіть більше) вольт. Швидкі електрони влітають в антикатод, гальмуються в ньому і в результаті гальмування їх кінетична енергія перетворюється в енергію рентгенівського випромінювання.

Взаємодія швидких електронів з атомами речовини, на яку вони падають, зводиться до таких процесів:

1. Прискорені електрони вибивають зовнішні електрони з атомів речовини антикатада, тобто іонізують їх. Втрату енергії швидких електронів на іонізацію атомів називають іонізаційними втратами. Вони становлять до 96% енергії швидких електронів. Ця енергія перетворюється в теплоту, за рахунок якої нагрівається тіло антикатада. Щоб антикатод не розплавився, його виготовляють із матеріалу з досить високою теплопровідністю (звичайно, із міді), в процесі роботи його охолоджують проточною водою (стаціонарні установки) або маслом (пересувні рентгенівські установки). З цією метою в тілі антикатада роблять канали, по яких циркулює охолоджуюча рідина.

2. Швидкі електрони втрачають енергію в результаті гальмування під час руху у речовині. Згідно з класичною електродинамікою, будь-який заряд, що рухається із прискоренням, випромінює електромагнітну енергію. При різкому гальмуванні швидких електронів їх кінетична енергія переходить частково в енергію так званого гальмівного рентгенівського випромінювання.

3. Швидкі електрони можуть виривати електрони із внутрішніх (K, L, M) оболонок атомів речовини антикатада. На звільнене місце переходить електрон з вищої (зовнішньої) оболонки, внаслідок чого створюється характеристичне випромінювання.

Таким чином, рентгенівські промені, які випускає антикатод, дають два спектри: 1) суцільний (або гальмівний), що залежить від напруги на трубці U_a і має різку межу з боку коротких довжин хвиль; 2) характеристичний (лінійчатий), що залежить від матеріалу антикатада.

9.1.3. Гальмівне рентгенівське випромінювання

Суцільний спектр одержується в результаті гальмування швидких електронів у речовині антикатада. Якщо між катодом і антикатодом прикладена напруга U_a , електрони розганяються і їх енергія дорівнює eU_a , де e – заряд електрона. Влітаючи в антикатод, електрони різко гальмуються, тобто рухаються з

від'ємним прискоренням, і стають джерелами рентгенівського електромагнітного випромінювання.

Умови гальмування для різних електронів неоднакові, і різні частки їх кінетичної енергії перетворюються в енергію рентгенівських квантів. При повному перетворенні енергії електрона $mv^2/2 = eU_a$ в енергію кванта $h\nu_{\max}$ дістанемо $eU_a = h\nu_{\max}$, де h – стала Планка, ν_{\max} – найбільша частота рентгенівського гальмівного спектра. Враховуючи, що $\nu_{\max} = c/\lambda_{\min}$ (c – швидкість світла у вакуумі, λ_{\min} – гранична довжина хвилі випромінювання, яка відповідає ν_{\max}), дістанемо $eU_a = hc/\lambda_{\min}$, звідки

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU_a} = \frac{1,24 [\text{нм}]}{U [\text{кВ}]} \quad (9.1)$$

З цієї причини в гальмівному рентгенівському спектрі спостерігаються всі довжини хвиль, починаючи з λ_{\min} . Його називають тому суцільним “білим спектром”.

Розподіл інтенсивності по неперервному спектру рентгенівських променів при різних U_a для вольфрамового антикатада наведено на рис. 9.2. Довжина хвилі λ_m , на яку припадає максимум в спектрі гальмівного рентгенівського випромінювання, задовольняє умові

$$\lambda_m = \frac{3}{2} \lambda_{\min} \quad (9.2)$$

Важливою особливістю суцільного рентгенівського спектра є його короткохвильова межа. Із виразу (9.1) випливає, що при даній напрузі U_a не може бути довжини хвилі, яка менша за

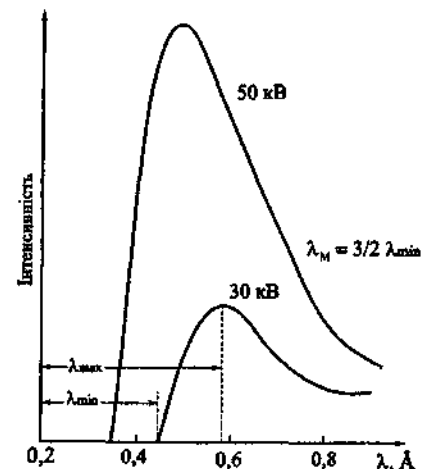


Рис. 9.2. Розподіл інтенсивності по неперервному спектру

λ_{\min} . Значення сталої Планка h , одержане із вимірювань короткохвильової межі рентгенівського суцільного спектра, є одним із найточніших і достовірних.

Потік Φ рентгенівських променів, що виходять із трубки, зростає пропорційно силі струму I в трубці, квадрату напруги на трубці U_a і залежить від величини атомного номера Z речовини антикатада, тобто

$$\Phi = kZU_a^2 I, \quad k = 10^{-9} \text{ Вт} / \text{В}^2 \text{А}. \quad (9.3)$$

Жорсткість рентгенівських променів, яка зростає зі зменшенням довжини хвилі, характеризує їх проникаючу здатність і залежить тільки від напруги U_a , яка подається на трубку. Чим вища напруга, тим жорсткіші рентгенівські промені, як це видно із формул (9.1) і (9.2). Інтенсивність рентгенівського випромінювання регулюється шляхом зміни струму розжарювання залежно від потрібної потужності випромінювання – від малих струмів в трубці при просвічуванні (2–5 мА) до дуже великих струмів (тисячі міліампер), що застосовуються при деяких рентгенівських знімках.

9.1.4. Характеристичне рентгенівське випромінювання, його природа. Закон Мозлі

Характеристичний спектр виникає тому, що частина бомбардуєчих електронів проникає в атоми антикатада і збуджує їх. Причому електронні переходи відбуваються в надрах атомів, тобто в оболонках, ближчих до ядра – K , L , M . Тому енергія квантів рентгенівських променів більша від енергії квантів видимого світла, так як останні отримуються при електронних переходах між зовнішніми оболонками атома, тобто на його периферії.

Характеристичне випромінювання має лінійчатий спектр. Свою назву воно дістало тому, що цей тип рентгенівського випромінювання характеризує речовину антикатада і його вид не залежить від того, чи елемент знаходиться у вільному або хімічно зв'язаному стані. Характеристичні лінії завжди виникають на фоні неперервного спектра.

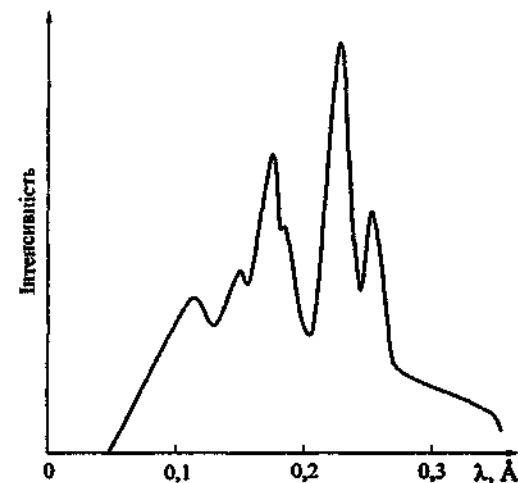


Рис. 9.3. Розподіл інтенсивності по спектру випромінювання рентгенівської трубки з вольфрамовим анодом

На рис. 9.3 зображено графік розподілу інтенсивності по спектру випромінювання рентгенівської трубки з вольфрамовим анодом при $U_a = 168$ кВ. Цей графік наочно ілюструє той факт, що загальний спектр включає в себе як неперервний спектр, так і характеристичні лінії K -серії. На ділянці неперервного спектра, розміщеного зліва від накладених на нього спектральних ліній, видний "провал". Ця відсутня енергія пішла на збудження сусідніх спектральних ліній.

На рис. 9.4 схематично зображено виникнення різних серій характеристичних рентгенівських променів. В атомах з більшим атомним номером внутрішні електронні оболонки K , L , M повністю заповнені електронами. При вилу-

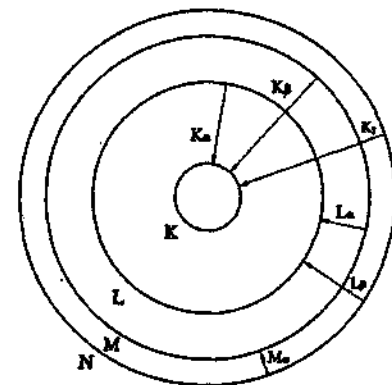


Рис. 9.4. Виникнення різних серій характеристичних рентгенівських променів

ченні електрона з однієї із внутрішніх оболонок на звільнене місце переходить електрон з більш віддаленої від ядра оболонки і випромінюється рентгенівський квант. Переходи, що закінчуються на K -оболонці, дають K -серію характеристичного спектра, яка складається з трьох ліній:

K_α – відповідає переходу з L -оболонки на K -оболонку;

K_β – відповідає переходу з M -оболонки на K -оболонку;

K_γ – відповідає переходу з N -оболонки на K -оболонку.

Переходи, що закінчуються на L -оболонці та M -оболонці, дають відповідно L -серію і M -серію характеристичного рентгенівського спектра. Характеристичний спектр складається із 8–10 ліній, що утворюють K , L , M -серії. Для важких елементів в кожну серію входять три лінії α , β , γ . Найінтенсивніша в характеристичному спектрі K_α -лінія, так як ймовірність переходів на K -оболонку з L -оболонки більша, ніж з M , N та інших більш віддалених оболонок.

Для кожного атома існує межа збудження K -серії. Наприклад, для ртуті ($Z = 80$) вона становить близько 82 кеВ. Це пов'язано з

тим, що для виривання електрона із найближчої до ядра K -оболонки, на якій електрони найсильніше притягуються до ядра, необхідна значна енергія, яка іде на виконання роботи по вириванню електрона. Тому лінії характеристичного спектра з'являються тільки при напрузі на рентгенівській трубці, яка більша певного значення для кожного матеріалу анода.

Закон Мозлі. В 1913 р. англійський фізик Мозлі, досліджуючи залежність довжини хвилі характеристичних променів від атомного номера Z різних елементів, встановив

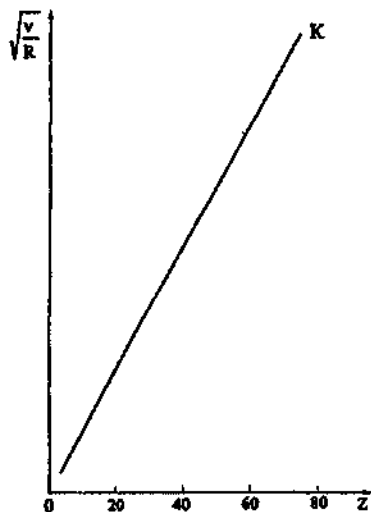


Рис. 9.5. Діаграма Мозлі

співвідношення, які називаються **законом Мозлі**:

$$\nu = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \text{ для } K_\alpha\text{-лінії}; \quad (9.4)$$

$$\nu = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \text{ для } L\text{-серії},$$

де $R = 3,3 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$ – стала Ридберга; σ – постійна величина, яка називається сталою екранування (для лінії K_α $\sigma = 1$, для L -серії $\sigma = 0,75$).

На рис. 9.5 зображено так звану діаграму Мозлі, яка ілюструє для ліній K_α лінійну залежність $\sqrt{\nu/R}$ від атомного номера Z . Послідовне застосування формули Мозлі до елементів періодичної системи Менделєєва підтвердило в свій час закономірне зростання на одиницю заряду ядра при переході від одного елемента до іншого. Це стало природничо-науковим підтвердженням справедливості ядерної моделі атома і періодичного закону Д. І. Менделєєва.

9.2. РАДІОАКТИВНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ

9.2.1. Радіоактивність, її властивості

Вивчаючи фосфоресцентне свічення мінералів, А. Беккерель в 1896 р. знайшов, що солі урану випускають невидимі промені, яким притаманна висока проникаюча здатність (фотопластинки, які були загорнуті в чорний папір, “засвічувались”, коли поблизу розташовували сіль урану). Це випромінювання було спочатку назване беккерелевими променями. Характерні особливості цього випромінювання – самодовільність і постійність, повна незалежність від зовнішніх умов (освітлення, тиску і температури).

Пі. Кюрі і М. Складовська-Кюрі (єдина жінка, яка була нагороджена двома Нобелівськими преміями) зайнялися вивченням беккерелевих променів і перебрали майже всі відомі на той час мінерали з метою знайти в них таке ж саме випромінювання. Так, вони встановили, що уранова смоляна руда дає випромінювання, інтенсивність якого в чотири рази більша інтенсивності солей

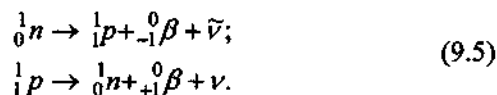
урану. В 1898 р. подружжя Кюрі відкрили два елементи – полоній і радій, які випускали відкрите Беккерелем випромінювання.

М. Складовська-Кюрі, П. Кюрі та Е. Резерфорд вивчили фізичну природу беккерелевих променів. У магнітному полі потік беккерелевих променів поділяється на три частини – компоненти, які названі альфа (α)-, бета (β)- і гамма (γ)-променями. Речовини, які випускають відкрите Беккерелем випромінювання, назвали радіоактивними, а властивість речовин випромінювати α -, β -, γ -промені назвали радіоактивністю або радіоактивним розпадом. Було встановлено, що при α - і β -розпадах утворюються ядра нових елементів.

Альфа-випромінювання. Надалі Резерфорд, Кюрі та їх співробітники довели, що α -частинки становлять ядра гелію ${}^4_2\text{He}$,

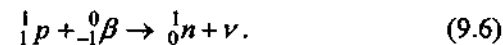
тобто мають заряд вдвічі більший за модулем, ніж заряд електрона ($q = 2e$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл) завдяки двом протонам, та масу, яка в чотири рази більша, ніж маса ядра атома водню ($m = 4m_0$, $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг) завдяки двом протонам і двом нейтронам.

Бета-випромінювання. Воно буває двох типів: 1) електронне бета-випромінювання, що складається із швидких електронів, які вилітають з ядра атома; 2) позитронного бета-випромінювання. Позитрон, що також вилітає з ядра, є античастинка по відношенню до електрона, яка відрізняється від нього лише знаком заряду і магнітного моменту. Позитрон був відкритий теоретично В. Паулі та П. Дираком в 1930 р. та експериментально Андерсоном в 1932 р. при дослідженні космічних променів в камері Вільсона, що була вміщена у магнітне поле. Принципове пояснення дивовижного факту вильоту з ядра електронів і позитронів в той час, коли, як добре відомо, ядро складається лише з протонів та нейтронів, дав Е. Фермі в 1934 р. За Е. Фермі, бета-випромінювання відбувається внаслідок самодовільного перетворення частинок ядра – нуклонів (цю назву, що об'єднує протони і нейтрони всередині ядра, запропонував В. Гейзенберг) за такими схемами:

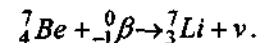


Тут використані такі позначення: 1_0n – нейтрон, 1_1p – протон, ${}^0_{-1}\beta$ – електрон, ${}^0_{+1}\beta$ – позитрон, ν і $\tilde{\nu}$ – нейтрино та антинейтрино. Таким чином, перетворення нейтрона у протон у ядрі атома супроводжується електронним бета-випромінюванням, а обернений процес – перетворення протона в нейтрон – позитронним бета-випромінюванням. Слід зазначити, що термін бета-випромінювання асоціюється, як правило, з електронами.

Існує ще один процес, який відносять також до бета-розпаду – електронне K -захоплення, при якому відбувається взаємне перетворення нуклонів ядра:



За цим процесом електрон, що знаходиться на найближчій до ядра K -орбіті захоплюється ядром, в результаті чого протон перетворюється в нейтрон і випромінюється нейтрино. При K -захопленні (значно рідше відбуваються процеси L - і M -захоплення, тобто поглинання ядром електронів з L - або M -оболонки) число протонів Z , яке визначає порядковий номер хімічного елемента, зменшується на одиницю. Внаслідок такого процесу утворюється ядро елемента, який розташований в періодичній системі Менделєєва на попередньому місці, як це спостерігається при позитронному β -розпаді. Прикладом такого перетворення хімічних елементів внаслідок K -захоплення є реакція



Треба зауважити, що фізики досить довго мали труднощі з поясненням неперервного спектру бета-випромінювання (рис. 9.6). Дійсно, здавалося зовсім незрозумілим з погляду закону збереження енергії, як при фіксованих енергіях протона і нейтрона енергія бета-частинки може

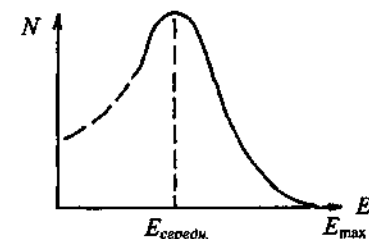


Рис. 9.6. Крива розподілу кількості β -частинок N за енергією E

змінюватися в досить широких межах, а не бути фіксованою. При фіксованій енергії бета-частинки її спектр мав би бути, звичайно, лінійчатим. Висловлювалось навіть таке припущення, що при β -розпадах може не виконуватися закон збереження енергії. Але згодом Е. Фермі знайшов вірне пояснення неперервному спектрові бета-випромінювання, припустивши наявність ще однієї частинки – нейтрино ν (при позитронному β -розпаді) та антинейтрино (при електронному β -розпаді). Саме Е. Фермі ввів термін “нейтрино”, що означає “маленький нейтрон”, хоча гіпотезу про можливість існування такої нейтральної частинки висловив В. Паулі в 1930 р., тобто за чотири роки до теорії β -розпаду Е. Фермі. Фіксована різниця енергій протона і нейтрона перерозподіляється між β -частинками та нейтрино і антинейтрино, причому кути розльоту цих частинок не є постійними і в кожному акті β -розпаду вони змінюються. Ці теоретичні та експериментальні факти підтверджують неперервність спектру β -частинок.

Гамма-випромінювання. Воно, як і рентгенівське випромінювання, належить до більш широкого класу електромагнітних випромінювань. В основному фізична природа гамма-випромінювання пов'язана з переходами нуклонів ядра з одного стаціонарного енергетичного рівня на інший подібно до того, як перехід між стаціонарними енергетичними рівнями атомів та молекул супроводжується випромінюванням або поглинанням електромагнітного випромінювання радіо-, інфрачервоного, видимого та ультрафіолетового діапазонів. Тому енергія γ -фотона при гамма-випромінюванні може бути знайдена за відомою формулою Бора–Зоммерфельда:

$$h\nu = \Delta E, \quad (9.7)$$

де ΔE – різниця енергій стаціонарних рівнів ядра атома, між якими відбувається перехід нуклонів. Звичайно, частота ν та відповідно довжина хвилі $\lambda = c/\nu$ гамма-випромінювання визначається цією енергією ΔE . Так, при енергії γ -променів в 0,5 MeV довжина їх хвилі дорівнює $\lambda \approx 2,5 \cdot 10^{-12}$ м.

Слід підкреслити такі факти: 1) гамма-випромінювання не спричинює зміни порядкового номера хімічного елемента через

нульовий заряд γ -квантів, тобто тільки за рахунок гамма-випромінювання не може відбутися перехід ядер одного елемента в ядра іншого елемента; 2) гамма-випромінювання відбувається одночасно з іншими радіоактивними перетвореннями – α -розпадом, всіма типами β -розпаду (електронним, позитронним і електронним K -захопленням), спонтанним діленням атомних ядер тощо.

Таким чином, **радіоактивність** – це такий процес, внаслідок якого відбуваються: а) самодовільне перетворення ядер одного хімічного елемента в ядра іншого елемента, яке супроводжується випромінюванням ядер гелію (α -розпад) або електронів і позитронів (β -розпад); б) самодовільне випромінювання з ядра хімічного елемента короткохвильового електромагнітного випромінювання (γ -розпад), яке супроводжує α - і β -розпади.

9.2.2. Основний закон радіоактивного розпаду, період напіврозпаду, активність

Розрізняють два види радіоактивності: природну і штучну. Досі ми розглядали **природну радіоактивність** – перетворення нестійких ізотопів одного елемента в ізономи інших елементів при α - і β -розпадах або випромінювання ядрами γ -квантів, які відбуваються в природних умовах самодовільно, тобто без зовнішніх впливів. **Штучна радіоактивність** – розпад штучно отриманих ізотопів хімічних елементів внаслідок різних ядерних реакцій. Штучна радіоактивність була відкрита в 1934 р. подружжям Ірен Кюрі та Фредеріком Жоліо-Кюрі. Обидва види радіоактивності – природна і штучна – підпорядковуються одним і тим самим законам.

Основний закон радіоактивного розпаду. Отримаємо закон радіоактивного розпаду в двох формах: диференціальній та інтегральній.

Внаслідок самодовільності радіоактивного розпаду число ядер dN , які розпадаються за проміжок часу від t до $t + dt$, пропорційно числу вихідних радіоактивних ядер N та проміжку часу dt :

$$-dN = \lambda N dt. \quad (9.8)$$

Знак “-” в (9.8) перед dN характеризує зменшення числа вихідних радіоактивних ядер за проміжок часу dt . Стала величина λ називається постійною радіоактивного розпаду. Вона не залежить від зовнішніх умов і визначається лише внутрішніми властивостями атомного ядра хімічного елемента.

Співвідношення (9.8) визначає по суті закон радіоактивного розпаду в диференціальній формі, який формулюється таким чином: *відносне зменшення кількості радіоактивних ядер за одиницю часу, тобто $-dN/Ndt$, є величина стала, яка називається постійною радіоактивного розпаду λ* . Або, іншими словами, *за одиницю часу розпадається одна і та сама частка наявних радіоактивних ядер*.

Для отримання закону радіоактивного розпаду в інтегральній формі поділимо змінні в рівнянні (9.8)

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

та проінтегруємо це диференціальне рівняння з поділеними змінними (див. розділ 1 в першому томі) В результаті отримаємо

$$\ln N = -\lambda t + C, \quad (9.9)$$

де C – постійна інтегрування, значення якої можна знайти з початкових умов. Будемо вважати, що у вихідний момент часу $t = 0$ початкова кількість радіоактивних ядер становила N_0 . Тоді з рівняння (9.9) маємо, що постійна інтегрування $C = \ln N_0$. Підставляючи це значення постійної інтегрування в (9.9), отримуємо

$$\ln N - \ln N_0 = -\lambda t. \quad (9.10)$$

Далі скористаємося такими очевидними співвідношеннями:

$$\ln N - \ln N_0 = \ln \frac{N}{N_0}, \quad -\lambda t = \ln e^{-\lambda t}.$$

У результаті рівняння (9.10) набуває вигляду

$$\ln \frac{N}{N_0} = \ln e^{-\lambda t}.$$

Оскільки логарифми є рівними, то мають бути рівними і вирази, що стоять під знаком логарифмів. Звідси отримаємо закон радіоактивного розпаду в інтегральній формі:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (9.11)$$

Графік закону радіоактивного розпаду наведений на рис. 9.7. Чим більша постійна радіоактивного розпаду, тим швидше спадає крива залежності $N(t)$, що визначає кількість радіоактивних ядер в момент часу t .

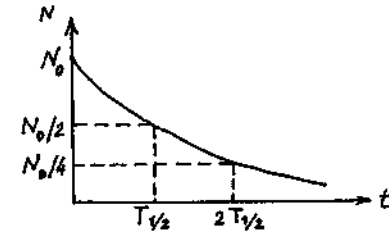


Рис. 9.7. Зменшення кількості радіоактивних ядер з плином часу

Період напіврозпаду. Для оцінки стійкості радіоактивних ядер щодо їх розпаду вводять поняття періоду напіврозпаду $T_{1/2}$. Період напіврозпаду $T_{1/2}$ визначається як той час, протягом якого розпадається половина вихідної кількості, тобто $N_0/2$, радіоактивних ядер речовини. Відповідно за два періоди напіврозпаду залишається четверта частина радіоактивних ядер, що не розпалися (рис. 9.7).

Знайдемо зв'язок періоду напіврозпаду $T_{1/2}$ з постійною радіоактивного розпаду λ . Оскільки в момент часу $t = T_{1/2}$ кількість радіоактивних ядер $N = N_0/2$, то з рівняння (9.11) маємо $N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$. Звідси отримаємо $e^{\lambda T_{1/2}} = 2$, що дає після логарифмування

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \quad (9.12)$$

Отриманий зв'язок між $T_{1/2}$ і λ показує, що чим більша постійна радіоактивного розпаду, тим меншим є період напіврозпаду.

У радіоактивних елементах періоди напіврозпаду $T_{1/2}$ змінюються в дуже широких межах. Наприклад, для ізотопу урану ${}^{238}_{92}\text{U}$ період напіврозпаду складає $T_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9$ років, ізотопу кобальту ${}^{60}_{27}\text{Co}$ $T_{1/2} = 5,3$ року, для ізотопу літію ${}^8_3\text{Li}$ $T_{1/2} = 0,9$

с, а для ізотопу полонію $^{213}_{84}\text{Po}$ $T_{1/2} = 4 \cdot 10^{-6}$ с. Важливо зазначити, що для радіоактивних ізотопів, що здатні довго затримуватися в організмі людини і тварин, періоди напіврозпаду становлять такі значення: для ізотопу йоду $^{131}_{53}\text{I}$ $T_{1/2} = 8$ діб, для ізотопів стронцію $^{89}_{38}\text{Sr}$ та $^{90}_{38}\text{Sr}$ відповідно $T_{1/2} = 51$ доба та $T_{1/2} = 28,6$ років, для ізотопу цезію $^{137}_{55}\text{Cs}$ $T_{1/2} = 30,2$ років.

Під час дослідження проходження ізотопів $^{90}_{38}\text{Sr}$ і $^{137}_{55}\text{Cs}$ вздовж біологічного ланцюжка “земля–рослина–тварина–людина” було помічено, що ізотоп $^{90}_{38}\text{Sr}$ поводить себе подібно до кальцію Ca, а ізотоп $^{137}_{55}\text{Cs}$ – подібно до калію K. Далі було встановлено, що при радіоактивному забрудненні біосфери найбільша концентрація $^{90}_{38}\text{Sr}$ завжди виявляється в органах або продуктах, багатих на кальцій (кісткова тканина), а $^{137}_{55}\text{Cs}$ – в біооб’єктах, багатих на калій (м’язова тканина).

Умовно прийнято вважати, що радіонукліди (ізотопи радіоактивних елементів) практично перестають діяти через час, що становить 10 періодів напіврозпаду. Згідно з законом радіоактивного розпаду

$$N = N_0 e^{-t \ln 2 / T_{1/2}},$$

через час $t = 10 T_{1/2}$ кількість радіоактивних ядер буде рівною

$$N = N_0 e^{-10 \ln 2} = \frac{N_0}{2^{10}} = \frac{N_0}{1024},$$

тобто зменшиться майже в тисячу разів. Звідси випливає, що оскільки період напіврозпаду ізотопів $^{90}_{38}\text{Sr}$ і $^{137}_{55}\text{Cs}$ становить близько 30 років, то населення України буде відчувати вплив цих небезпечних радіонуклідів близько трьох століть після Чорнобильської катастрофи.

Активність. Активністю A називають швидкість радіоактивного розпаду, тобто кількість розпадів за одиницю часу. Оскільки енергія виділяється при кожному акті розпаду, то загальна кількість енергії, що виділяється внаслідок

радіоактивного розпаду за одиницю часу, буде визначатися саме активністю. Формула для активності A має такий вигляд:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \frac{0,693N}{T_{1/2}}, \quad (9.13)$$

де були враховані закон радіоактивного розпаду (9.11) та зв’язок між періодом напіврозпаду $T_{1/2}$ і постійною радіоактивного розпаду λ , що виражається формулою (9.12). З формули (9.13) випливає важливий висновок: **активність A радіоактивного ізотопу (радіонукліду) тим більша, чим більша кількість радіоактивних ядер N в даний момент часу і чим менший період напіврозпаду $T_{1/2}$.** Тому при однаковому значенні N активність A , а з нею і небезпека радіоактивного ураження, буде визначатися радіонуклідами з малим періодом напіврозпаду. Таким найбільш небезпечним радіонуклідом в перші три місяці після Чорнобильської аварії був радіоактивний йод $^{131}_{53}\text{I}$, який, як вже зазначалося, має короткий період напіврозпаду $T_{1/2} = 8$ діб і який накопичується переважно у щитовидній залозі людини у відсутності в ній нерадіоактивного ізотопу йоду $^{127}_{53}\text{I}$.

З формули (9.13) видно також, що з плином часу активність A зменшується тому, що зменшується кількість радіоактивних ядер. Дійсно, оскільки $N = N_0 e^{-\lambda t}$, то

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}, \quad (9.14)$$

де $A_0 = \lambda N_0$ – вихідне значення активності радіонукліду в момент часу $t = 0$. Цей результат означає, що зменшення активності з часом описується законом радіоактивного розпаду.

Активність вимірюється в таких одиницях: беккерель (Bk) і кюрі (Ki). Беккерель – це активність такого радіонукліду, для якого за одну секунду відбувається один радіоактивний розпад, тобто $1 Bk = 1$ розпад/с. Кюрі (Ki) – це суттєво більша одиниця активності: $1 Ki = 3,7 \cdot 10^{10}$ розпадів/с $= 3,7 \cdot 10^{10} Bk$. Застосовуються дрібні одиниці – мілікюрі (mKi), мікрокюрі (μKi), нанокюрі (nKi) тощо, а також кратні одиниці – кілокюрі (kKi), мегакюрі (Mki), гігакюрі (Gki) та інші, які мають такий зв’язок з основними одиницями активності:

$$1 \text{ мКі} = 10^{-3} \text{ Кі} = 3,7 \cdot 10^7 \text{ Бк}, 1 \text{ кКі} = 10^3 \text{ Кі} = 3,7 \cdot 10^{13} \text{ Бк};$$

$$1 \text{ мкКі} = 10^{-6} \text{ Кі} = 3,7 \cdot 10^4 \text{ Бк}, 1 \text{ МКі} = 10^6 \text{ Кі} = 3,7 \cdot 10^{16} \text{ Бк};$$

$$1 \text{ нКі} = 10^{-9} \text{ Кі} = 37 \text{ Бк}, 1 \text{ ГКі} = 10^9 \text{ Кі} = 3,7 \cdot 10^{19} \text{ Бк}.$$

9.2.3. Правила зміщення, особливості спектрів у разі радіоактивного розпаду

Радіоактивний розпад відбувається, як і будь-який інший процес в живій та неживій природі, згідно з законами збереження енергії, маси, імпульсу, електричного заряду, спіну тощо.

Відповідно до закону збереження електричного заряду маємо, що заряд вихідного атомного ядра (його називають інколи материнським) повинен дорівнювати сумарному заряду утворених при радіоактивному розпаді частинок і нових ядер (їх називають дочірніми). При ядерних перетвореннях величину заряду умовно характеризують зарядовим числом Z , яке дорівнює відношенню заряду ядра (частинки) q до елементарного заряду e : $Z = q/e$. Так, для всіх ізотопів урану зарядове число становить $Z = 92$, а для ізотопів гелію і для α -частинки $Z = 2$. Тому закон збереження електричного заряду при радіоактивному розпаді можна подати в наступному формулюванні: *сума зарядових чисел дочірніх ядер і частинок, які утворилися при розпаді, дорівнює зарядовому числу вихідного (материнського) ядра.*

Закон збереження маси при радіоактивному розпаді з врахуванням формули Ейнштейна $E = mc^2$, що пов'язує масу m і енергію E , можна записати у такому вигляді:

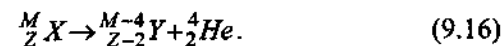
$$M_a = \sum_i M_i + E/c^2, \quad (9.15)$$

де M_a – маса вихідного (материнського) ядра; M_i – маса утвореного (дочірнього) ядра і частинок; E – енергія, що виділяється при радіоактивному розпаді.

Типові значення енергії, що виділяється при різних радіоактивних розпадах, не перевищують кількох MeV (так, при α -розпаді ядра полонія $^{210}_{84}\text{Po}$ виділяється $5,3 \text{ MeV}$, при α -розпаді ядра радону $^{222}_{86}\text{Rn}$ – $5,5 \text{ MeV}$, при β -розпаді ядра $^{38}_{17}\text{Cl}$ – $4,8 \text{ MeV}$).

Ці значення енергії E значно менші за енергію $931,2 \text{ MeV}$, що відповідає 1 атомній одиниці маси ($a.o.m.$) = $1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$. В такому наближенні ($E/c^2 \ll 1 a.o.m.$) закон збереження маси формулюється через масові числа (масове число M – це відношення маси ядра або частинки до $a.o.m.$) наступним чином: *сума масових чисел дочірніх ядер і частинок, які утворюються при радіоактивному розпаді, дорівнює масовому числу вихідного (материнського) ядра.*

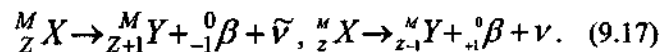
Оскільки при α -розпаді із вихідного (материнського) ядра вилітає ядро гелію ^4_2He , тобто частинка з зарядовим числом 2 і масовим числом 4, то нове утворене дочірнє ядро буде мати зарядове число на дві одиниці менше і масове число на чотири одиниці менше, ніж у вихідного ядра. Позначивши материнське (вихідне) ядро символом X , а дочірнє (утворене) – символом Y , запишемо процес α -розпаду у вигляді такої схеми:



Зарядове число визначає місце (номер) елемента в періодичній системі Менделєєва, тому із схеми (9.16) виходить, що в результаті α -розпаду утворюється ядро елемента, який стоїть в періодичній системі Менделєєва на два місці раніше, ніж вихідне ядро.

При β -розпаді із ядра вихідного елемента вилітає електрон або позитрон. Маса електрона у 1836 разів менша маси атома водню, тому масове число електрона приймають рівним нулю. Заряд електрона чисельно дорівнює заряду протона, але цей заряд від'ємний. Тому зарядове число електрона $Z = -1$. Відповідно, масове число позитрона дорівнює, як і у електрона, нулю, а зарядове число $Z = 1$.

У зв'язку з викладеним схеми електронного і позитронного β -розпадів будуть мати вигляд



Таким чином, в результаті електронного і позитронного β -розпаду утворюються ядра елементів, які розташовані в

періодичній таблиці Менделєєва на наступному (попередньому) місці по відношенню до вихідного елемента.

Формули (9.16) і (9.17) називають *правилами зміщення*. Вони дають змогу розібратися у всіх послідовних перетвореннях ядер, які відбуваються в процесі їх радіоактивного розпаду.

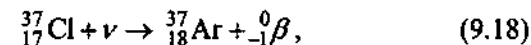
Швидкості, з якими α -частинки вилітають із ядра, типово є дуже великі ($\sim 10^7$ м/с), а кінетична енергія α -частинок порядку кількох MeV. Кінетична енергія α -частинок виникає за рахунок надлишку енергії спокою материнського ядра над сумарною енергією спокою дочірнього ядра і α -часточки. Ця надлишкова енергія розподіляється між α -частинкою і дочірнім ядром у відношенні, обернено пропорційному їх масам. Енергія α -частинок, які випускаються даною радіоактивною речовиною, є жорстко визначеною. Тому енергетичний спектр α -частинок є лінійчастий.

У більшості випадків радіоактивна речовина випускає кілька груп "моноенергетичних" α -частинок. Це зумовлено тим, що дочірнє ядро може виникати як в нормальному (незбудженому), так і в збудженому стані. Переходячи в нормальний або більш низький збуджений стан, дочірнє ядро випускає γ -фотон. Через це α -розпад може супроводжуватися γ -випромінюванням. Утворене в результаті α -розпаду збуджене ядро може віддати надлишок енергії безпосередньо (без попереднього випускання γ -кванта) одному із електронів K -, L - або M -шару атома, в результаті чого електрон вилітає з атома. Цей процес називають *внутрішньою конверсією*. Утворене в результаті вильоту електрона вакантне місце буде заповнюватися електронами з вищерозташованих енергетичних рівнів. Тому внутрішня конверсія завжди супроводжується випусканням характеристичних рентгенівських променів.

Бета-частинки (електрони і позитрони), які випромінюються при радіоактивному β -розпаді, володіють різними значеннями енергії від 0 до E_{\max} (див. рис. 9.6). Випромінювання такого енергетичного спектра β -частинок відіграло важливу роль в поясненні природи β -розпаду, про що вже говорилося в параграфі 9.2.1.

Загальні властивості β -спектрів: неперервність і наявність максимальної енергії E_{\max} – верхньої границі β -спектра. Бета-випромінювання з енергією від 0,05 MeV до E_{\max} називають м'яким, а від E_{\max} до кількох MeV – жорстким. Максимальна швидкість β -частинок у разі жорсткого β -випромінювання наближається до швидкості світла і має бути розрахованою за формулами спеціальної теорії відносності А. Ейнштейна.

Безпосередній експериментальний доказ існування нейтрино і антинейтрино було отримано лише в 1956 р., приблизно через чверть століття після його теоретичного відкриття В. Паулі та Е. Фермі. Нейтрино було відкрито Р. Девісом, який реалізував теоретичну ідею Б. Понтекорво, в реакції перетворення хлору в аргон



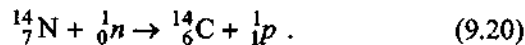
а антинейтрино Ф. Райнісом і К. Коеном в реакції перетворення протона в нейтрон



Нейтрино і антинейтрино, які беруть участь в ядерних реакціях (9.5), (9.6) і (9.18), (9.19) називаються електронними (інколи їх позначають через ν_e і $\bar{\nu}_e$). Відомі ще інші типи нейтрино і антинейтрино – мезонні (ν_μ і $\bar{\nu}_\mu$), тау (ν_τ і $\bar{\nu}_\tau$). Принципово важливим з погляду проблеми еволюції Всесвіту є питання про нульову або ненульову масу спокою нейтрино. Якщо нейтрино має ненульову масу спокою (для цього зараз є певні експериментальні підстави), то згідно з сучасною космологією – наукою про еволюцію Всесвіту – галактики, які нині розбігаються внаслідок розширення Всесвіту, через деякий час (зрозуміло, дуже великий в масштабі тривалості життя окремої людини) почнуть збігатися. Це означає, що Всесвіт буде поступово стискатися і такий процес, згідно з загальними законами термодинаміки, буде супроводжуватися зростанням середньої густини і температури речовини у Всесвіті.

Оцінка віку організмів через вимірювання концентрації радіоуглецю. Під дією нейтронів космічного випромінювання в

повітрі з азоту постійно утворюється ізотоп вуглецю $^{14}_6\text{C}$ за реакцією



Цей ізотоп є β -активним з періодом напіврозпаду $T_{1/2} \approx 5600$ років. Через радіоактивні властивості ізотопу $^{14}_6\text{C}$ його називають радіовуглецем. За проміжок часу dt внаслідок реакції (9.20) з азоту повітря в одиниці об'єму утворюється певна кількість радіоактивних ядер $^{14}_6\text{C}$. І за той же час внаслідок радіоактивного розпаду кількість ядер $^{14}_6\text{C}$ зменшується на величину $dN = -\lambda N dt$. Виявляється, що ці два процеси (збільшення радіовуглецю під дією космічного випромінювання і його зменшення через радіоактивний β -розпад) взаємно компенсують один одного, тобто виконується умова $dN_+ = dN_-$. Внаслідок цього в різних місцях земної кулі середня концентрація радіовуглецю $^{14}_6\text{C}$ однакова. Вона відповідає такій активності, при якій на кожний грам радіовуглецю відбувається 14 розпадів за хвилину.

Радіовуглець засвоюється при фотосинтезі рослинами і бере участь в колообігу речовин в природі. Поки органічна речовина жива, зменшення в ньому $^{14}_6\text{C}$ через β -розпад відновлюється за рахунок участі в колообігу речовин в природі. В момент смерті організму надходження радіовуглецю із навколишнього середовища зупиняється, і концентрація $^{14}_6\text{C}$ починає спадати за законом радіоактивного розпаду. Вимірявши концентрацію $^{14}_6\text{C}$ в залишках організмів (в деревині, кістках тощо) можна визначити дату їх смерті або, як говорять, їх вік.

9.3. ОСНОВИ ДОЗИМЕТРІЇ ІОНІЗУЮЧОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

9.3.1. Експозиційна доза, її потужність, одиниці

Для кількісної характеристики дії іонізуючого випромінювання (нагадаємо, що загальна назва "іонізуюче випромінювання" об'єднує всі види радіоактивного випромінювання, рентгенівське випромінювання та потоки частинок – протонів, нейтронів тощо) вводять так звану *експозиційну дозу* D_0 . *Експозиційна доза визначає величину заряду, що виникає в одиниці маси сухого повітря під дією рентгенівського і γ -випромінювання, тобто*

$$D_0 = \frac{q}{m}. \quad (9.21)$$

Формула (9.21) є, таким чином, визначенням експозиційної дози. Експозиційна доза характеризує міру іонізації повітря рентгенівськими і γ -променями, яку досить легко поміряти експериментально. Цікаво зазначити, що енергія іонізації суттєво відрізняється від теплової енергії. Скажімо, та доза γ -випромінювання, яка може стати летальною для людини, підвищує температуру тіла лише на тисячні часточки градуса.

У відповідності з формулою (9.21) за одиницю експозиційної дози в системі СІ прийнята така експозиційна доза рентгенівського і γ -випромінювань, при якій в результаті повної іонізації 1 кг сухого повітря утворюється заряд в 1 кулон, тобто $[D_0] = 1 \text{ Кл/кг}$.

Іншою (дуже поширеною, позасистемною) одиницею експозиційної дози є *рентген* (R). Зв'язок між одиницями експозиційної дози подається таким співвідношенням:

$$1 R = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг}. \quad (9.22)$$

Таким чином, 1 *рентген* – це така експозиційна доза рентгенівського і γ -випромінювань, яка внаслідок іонізації 1 кг сухого повітря викликає появу електричного заряду в $2,58 \cdot 10^{-4}$ кулона. Оскільки кожний додатний іон, що утворюється при відриванні одного електрона від нейтрального атома, несе

заряд $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, то легко підрахувати кількість пар додатних і від'ємних іонів, точніше пар "однозарядний додатний іон + електрон", що виникають в 1 кг повітря під дією експозиційної дози $D_0 = 1 \text{ Р}$. Ця величина дорівнює $2,58 \cdot 10^{-4} / 1,6 \cdot 10^{-19} \approx 1,6 \cdot 10^{15}$ пар іонів/кг.

Можна дати ще й інші еквівалентні (9.22) визначення експозиційної дози в 1 *рентген*. Наприклад: 1) 1 рентген – це така експозиційна доза, при якій внаслідок повної іонізації під дією рентгенівського і γ -випромінювання в 1 см^3 сухого повітря утворюється близько 2 мільярдів пар іонів (точніше, $2,07 \cdot 10^9$ пар іонів). Зауважимо, що 1 см^3 сухого повітря при нормальних умовах ($T = 273 \text{ К}$, $p = 10^5 \text{ Па}$) має, як це впливає з рівняння Клайперона-Менделєєва, масу $m = 0,001293 \text{ г} \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$; 2) 1 *рентген* – це така експозиційна доза, при якій в 1 кг сухого повітря поглинається 8,69 *мДж* енергії рентгенівського і γ -випромінювання. Дійсно, середня енергія, яка викликає появу пари "додатний іон + електрон" у повітрі, дорівнює $5,43 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} \approx 34 \text{ eV}$ (ця цифра враховує відносні концентрації та іонізаційні потенціали атомів і молекул, що входять до складу повітря). Тому загальна енергія, яка необхідна для утворення $1,6 \cdot 10^{15}$ пар іонів/кг, становить

$$W = 5,43 \cdot 10^{-18} \cdot 1,6 \cdot 10^{15} = 8,69 \cdot 10^{-3} \text{ Дж/кг} \approx 5,4 \cdot 10^{16} \text{ eV/кг}.$$

Певним недоліком рентгену як одиниці експозиційної дози є те, що він характеризує: 1) лише рентгенівське і γ -випромінювання; 2) іонізаційний ефект тільки у повітрі. Прийнято вважати, що для тканин організму людини 1 *Р* експозиційної дози викликає поглинання приблизно 10^{-2} Дж на 1 кг біомаси (точніше, $1 \text{ Р} = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ Дж/кг}$).

Потужність експозиційної дози P_0 – це експозиційна доза, що віднесена до одиниці часу, тобто

$$P_0 = \frac{D_0}{t}, \quad (9.23)$$

або з урахуванням визначення (9.21) масмо

$$P_0 = \frac{q}{mt} = \frac{I}{m}, \quad (9.24)$$

де $I = q/t$ – сила струму. Таким чином, **потужність експозиційної дози P_0 – це: 1) заряд, який виникає за 1 с в 1 кг сухого повітря під дією рентгенівського і γ -випромінювання; 2) сила струму, що виникає в 1 кг сухого повітря внаслідок його іонізації рентгенівським і γ -променями.**

У відповідності з формулами (9.23) і (9.24) одиницями потужності експозиційної дози є

$$[P_0] = \frac{\text{Кл}}{\text{кг} \cdot \text{с}} = \frac{\text{А}}{\text{кг}} \quad (\text{в системі СІ});$$

$[P] = \text{Р/с, Р/хв, Р/год}$ (позасистемні одиниці), тобто *ампер на кілограм* або *рентген за секунду (хвилину, годину)*.

9.3.2. Поглинена доза, її потужність, одиниці

Дія на речовину зумовлена не всім падаючим на нього іонізуючим випромінюванням, а тільки тією його частиною, що взаємодіє з атомами і молекулами речовини і при цьому поглинається. Тому основною величиною, що характеризує дію на речовину іонізуючого випромінювання (причому всіх його типів), є **енергія випромінювання, що поглинається одиницею маси за час опромінення**. Ця величина називається **поглиненою дозою D_n** і визначається формулою

$$D_n = \frac{W}{m}. \quad (9.25)$$

Згідно з цим визначенням одиницею поглиненої дози в системі СІ є $[D_n] = 1 \text{ Дж/кг}$, тобто така поглинена доза випромінювання, при якій в 1 кг маси опроміненої речовини поглинається 1 *Дж* енергії будь-якого іонізуючого випромінювання. Іншою назвою цієї одиниці є *Грей (Гр)*, тобто $1 \text{ Гр} = 1 \text{ Дж/кг}$.

Використовується ще й позасистемна одиниця поглиненої дози іонізаційного випромінювання, яка називається **рад** (це є аббревіатура англomовного терміну "radiation absorbed dose" – доза поглиненої радіації). Рад є поглинена доза будь-якого виду іонізуючого випромінювання, при якій в 1 кг речовини поглинається 0,01 *Дж* енергії. Це означає, що $1 \text{ Рад} = 0,01 \text{ Гр}$.

Між поглиненою дозою D_n і експозиційною дозою D_0 існує такий пропорційний зв'язок:

$$D_n = f D_0, \quad (9.26)$$

де f – перехідний коефіцієнт, що залежить від атомного номера і густини опроміненої речовини, а також від енергії іонізуючого випромінювання. Чисельне значення коефіцієнта f знаходиться звичайно дослідним шляхом.

Наведемо деякі значення коефіцієнта f . Оскільки, як зазначалося вище, 1 *рентгену* експозиційної дози відповідає поглинання 8,69 *мДж* енергії рентгеновського і γ -випромінювання в 1 *кг* сухого повітря, то експозиційна доза $D_0 = 1$ *Р* викликає в повітрі поглинену дозу, яка рівна

$$D_n = \frac{8,69 \cdot 10^{-3} \text{ Дж/кг}}{10^{-2} \text{ Дж/кг}} (\text{рад}) = 0,869 \text{ рад}.$$

Звідси маємо D_n (*рад*) = 0,869 D_0 (*Р*), тобто для повітря $f = 0,869$. Для води і біологічних рідин (кров, лімфа), а також для м'яких тканин організму людини експозиційна доза $D_0 = 1$ *Р* викликає, як вказувалося в 9.3.1, поглинання 9,6 $\cdot 10^{-3}$ *Дж/кг* γ -випромінювання. Тому для цих середовищ

$$D_n = \frac{9,6 \cdot 10^{-3} \text{ Дж/кг}}{10^{-2} \text{ Дж/кг}} = 0,96 \text{ рад},$$

а перехідний коефіцієнт $f = 0,96 \approx 1$.

Таким чином, для досить широкого класу середовищ можна вважати, що експозиційній дозі, виміряній в рентгенах, відповідає поглинена доза в радах. Але є і виключення з цього правила: так, наприклад, для кісткових тканин коефіцієнт f змінюється в межах від 2 до 5 (менші значення відповідають більшим енергіям γ -фотонів).

Дія іонізуючого випромінювання на речовину, в особливості на тканини організмів людей і тварин, суттєво залежить не тільки від загальної дози поглиненого випромінювання, а й від швидкості, з якою ця доза змінювалася, тобто похідної dD_n/dt від поглиненої дози по часу. Зрозуміло, що ця похідна визначає *потужність P_n поглиненої дози*. При досить рівномірній дії

іонізуючого випромінювання на речовину *потужність поглиненої дози P_n визначається відношенням величини поглиненої дози D_n до проміжку часу t , протягом якого діяло іонізаційне випромінювання*, тобто

$$P_n = \frac{D_n}{t}. \quad (9.27)$$

У відповідності з формулами (9.25) і (9.27) одиницями потужності поглиненої дози є

$$[P_n] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Гр}}{\text{с}} = \frac{\text{Вт}}{\text{кг}} \text{ (в системі СІ);}$$

$$[P_n] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \frac{\text{рад}}{\text{хв}}, \frac{\text{рад}}{\text{год}} \text{ (позасистемні одиниці),}$$

тобто *грей за секунду (ватт на кілограм) або рад за секунду (хвилину, годину)*.

9.3.3. Еквівалентна доза, її потужність, одиниці

Питання, пов'язані з фізико-хімічними механізмами і медико-біологічними аспектами взаємодії іонізуючого випромінювання з біооб'єктами, будуть детальніше розглянуті нижче в 9.4 і 9.5. Тут лише зауважимо, що біологічна дія іонізуючого випромінювання суттєво відрізняється для різних його видів при одній і тій самій поглиненій дозі. Так, для одного і того самого біологічного об'єкта ефективність дії випромінювання (або, як ще кажуть, радіочутливість біооб'єкта) може відрізнятися (збільшуватися) в 10 разів при переході від γ -випромінювання до швидких нейтронів. Це означає, що для оцінки біологічної дії кожного типу іонізуючого випромінювання треба множити величину поглиненої дози D_n на відповідний множник κ , який називають *коефіцієнтом якості* або *відносною біологічною ефективністю (ББЕ)* випромінювання. Такий добуток κD_n характеризує так звану *еквівалентну дозу $D_{екв}$* . Таким чином, маємо такий зв'язок між еквівалентною дозою і поглиненою дозою:

$$D_{екв} = \kappa D_n, \quad (9.28)$$

а також з врахуванням співвідношення (9.26) між поглиненою та експозиційною дозами отримуємо таку формулу, що пов'язує між собою еквівалентну та експозиційну дози:

$$D_{екв} = \kappa f D_0. \quad (9.29)$$

Значення коефіцієнта якості (ВБЕ) κ залежить від багатьох параметрів (маси, заряду, енергії тощо) різних типів випромінювання, які визначають іонізацію та інші фізико-хімічні механізми радіаційних пошкоджень. В табл. 9.1 наведені значення коефіцієнта якості для найбільш поширених типів іонізуючого випромінювання.

За основну одиницю еквівалентної дози в системі СІ прийнятий 1 *зіверт* (Зв) – це така еквівалентна доза, що відповідає поглиненій дозі в 1 *грей* (Гр) при дії на біооб'єкт рентгенівського, γ - і β -випромінювань. В загальному випадку, що включає інші типи іонізуючих випромінювань, маємо на підставі формули (9.28) таке співвідношення між еквівалентною дозою $D_{екв}$, виміряною в Зв, і поглиненою дозою D_n в Гр:

$$D_{екв} (Зв) = \kappa \cdot D_n (Гр). \quad (9.30)$$

Таблиця 9.1. Значення коефіцієнта якості для різних випромінювань

Тип випромінювання	Коефіцієнт якості (ВБЕ) κ
Рентгенівське випромінювання	1
Гамма-випромінювання	1
Електрони (β -випромінювання)	1
Теплові нейтрони	2–3
Повільні нейтрони	5
Швидкі нейтрони	10
Протони	10
Альфа-випромінювання	20

Іншою (позасистемною) одиницею еквівалентної дози є *бер*. Ця аббревіатура виникла від терміну “біологічний еквівалент рентгену”. Оскільки $\kappa = 1$ для перших трьох типів випромінювання (див табл. 9.1), то 1 *бер* – це така еквівалентна доза,

яка відповідає поглиненій дозі в 1 *рад* рентгенівського, γ - і β -випромінювань. Для інших типів випромінювань по аналогії з (9.30)

$$D_{екв} (бер) = \kappa \cdot D_n (рад), \quad (9.31)$$

$$D_{екв} (бер) = \kappa \cdot f \cdot D_0 (P). \quad (9.31 \text{ а})$$

Останнє співвідношення, яке пов'язує між собою біологічну дозу $D_{екв}$, виміряну в берах, і експозиційну дозу D_0 , виміряну в рентгенах, і дало підстави для терміну “біологічний еквівалент рентгену” – бер. Оскільки 1 *Гр* = 100 *рад*, то таке саме співвідношення залишається між зівертом і бером, тобто 1 *Зв* = 100 *бер*.

Потужність еквівалентної дози P_6 визначається величиною еквівалентної дози D_6 , віднесеної до одиниці часу, тобто

$$P_{екв} = \frac{D_{екв}}{t}. \quad (9.32)$$

Відповідно одиницями потужності еквівалентної дози є

$$[P_{екв}] = \frac{Зв}{с} \text{ (в системі СІ);}$$

$$[P_{екв}] = \frac{бер}{с}, \frac{бер}{хв}, \frac{бер}{год} \text{ (позасистемні одиниці),}$$

тобто *зіверт за секунду* або *бер за секунду* (*хвилину, годину*).

На закінчення цього параграфу наведемо приклади розрахунку еквівалентних доз за відомими значеннями поглиненої дози або потужності поглиненої дози.

Приклад 1. Відомо, що середня потужність експозиційної дози за рахунок природного γ -випромінювання становить приблизно $P_0 = 15 \text{ мкР/год}$. Знайти середню еквівалентну дозу D_6 (в берах), що отримає людина за рік.

Знайдемо загальну експозиційну дозу D_0 γ -випромінювання за рік:

$$D_0 = P_0 \cdot N_{год} = 15 \cdot 10^{-6} \cdot 24 \cdot 365 \approx 0,13 \text{ Р.}$$

Для γ -випромінювання коефіцієнт якості (відносна біологічна ефективність) $\kappa = 1$. Вважаючи, що поглинання енергії γ -випромінювання відбувається в біологічних рідинах і м'яких тканинах організму людини, де перехідний коефіцієнт $f = 1$ (це є,

звичайно, істотне наближення), маємо остаточно для шуканої еквівалентної дози, що отримує людина за 1 рік, наступний результат на підставі (9.31):

$$D_{екв} = \kappa \cdot f \cdot D_0(P) = 0,13 \text{ бер.}$$

В Україні прийнято, що максимальна еквівалентна доза за рік для операторів АЕС та всіх інших, хто працює з іонізуючим випромінюванням, не повинна перевищувати 2 бер=20 мЗв.

Приклад 2. Оператор АЕС отримав за рік такі поглинені дози різних типів іонізуючого випромінювання:

$(D_n)_\gamma = 0,0015 \text{ Гр} = 0,15 \text{ рад}$ за рахунок γ -випромінювання;

$(D_n)_\beta = 0,0005 \text{ Гр} = 0,05 \text{ рад}$ за рахунок β -випромінювання;

$(D_n)_n = 0,0005 \text{ Гр} = 0,05 \text{ рад}$ за рахунок повільних нейтронів;

$(D_n)_\alpha = 0,0001 \text{ Гр} = 0,01 \text{ рад}$ за рахунок α -випромінювання.

Знайти сумарну еквівалентну дозу, яку отримав оператор АЕС за рік, припускаючи, що поглинання всіх цих типів випромінювання відбувалося в біологічних рідинах і м'яких тканинах, де $f = 1$.

Скористаємося формулою (9.31) і даними про коефіцієнт якості різних типів випромінювання, що наведені в табл. 10.1. Тоді для сумарної еквівалентної дози отримаємо

$$D_б = \kappa_\gamma (D_n)_\gamma + \kappa_\beta (D_n)_\beta + \kappa_n (D_n)_n + \kappa_\alpha (D_n)_\alpha = 1 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,05 + 5 \cdot 0,02 + 20 \cdot 0,01 = 0,15 + 0,05 + 0,10 + 0,20 = 0,50 \text{ (бер.)}$$

10.3.4. Дозиметри іонізуючого випромінювання

Дозиметри – це прилади для вимірювання доз та потужностей доз іонізуючого випромінювання. Існують різні види приладів, які використовуються з метою дозиметричного контролю:

- 1) дозиметри γ -випромінювання (γ -дозиметри);
- 2) дозиметри для вимірювання потоків нейтронів (нейтронні дозиметри);
- 3) дозиметри, що вимірюють експозиційні дози рентгенівського і γ -випромінювання в рентгенах (рентгенометри);
- 4) дозиметричні прилади для визначення біологічних доз в берах (берметри);

5) дозиметричні прилади для вимірювання потоків α - і β -частинок із радіаційно забруднених поверхонь;

6) дозиметричні пристрої для вимірювання вмісту радіоактивних газів і аерозолів у повітрі, а також активності повітря, що вдихається людиною;

7) дозиметричні пристрої для вимірювання активності проб води та продуктів харчування;

8) прилади для вимірювання індивідуальних доз іонізаційного випромінювання, отриманих людиною, а також зовнішнього випромінювання (природного та штучного γ і β -випромінювання) від окремої людини.

До складу дозиметрів входять 2 основні частини – детектор та вимірювальний (лічильний) пристрій (рис. 9.8).



Рис. 9.8. Принципова схема детектора

Залежно від фізичного принципу, який покладений в роботу детектора, дозиметричні прилади поділяються на:

1) **іонізаційні**, в яких використовується явище іонізації газів під дією випромінювання (різні іонізаційні камери, пропорційні лічильники, лічильник Гейгера–Мюллера тощо);

2) **радіолюмінесцентні**, в основі роботи яких лежить явище люмінесценції під дією радіоактивного випромінювання, тобто радіолюмінесценція;

3) **напівпровідникові**, в котрих використовується явище внутрішнього фотоефекту, внаслідок якого електрони під дією радіації долають заборонену зону і з'являються в зоні провідності, що призводить до зниження опору (збільшення електропровідності);

4) **кристалічні**, в яких під дією радіоактивного випромінювання з'являється характерний колір (зокрема, таке відбувається в лужно-галоїдних кристалах при їх опроміненні γ -радіацією);

5) **фотокасетні**, в яких використовується дія іонізуючого випромінювання на фотоплівки;

6) **хімічні**, робота яких базується на вимірюванні енергетичного виходу екзотермічних хімічних реакцій під дією іонізуючого випромінювання;

7) **колориметричні**, які дають змогу розрахувати потужності досить значних потоків випромінювання шляхом порівняння їх теплової та іонізаційної дії.

Важливою і складною проблемою дозиметрії іонізуючого випромінювання є розрахунки (реконструкція) доз, якщо відомий потік випромінювання через певну поверхню. Так, наприклад, поглинена доза γ -випромінювання (в рад) може бути розрахована за формулою

$$D_n = 1,6 \cdot 10^{-5} N h\nu (\mu_k + \mu_f + \mu_n),$$

де N – кількість γ -квантів з енергією $h\nu$, що падають перпендикулярно до 1 см^2 поверхні. Вираз у круглих дужках характеризує лінійний коефіцієнт послаблення, що віднесений до одиниці маси речовини і який відповідає первинним механізмам дії γ -випромінювання – комптон-ефекту (μ_k), фотоефекту (μ_f) і утворенню електронно-позитронних пар (μ_n) (див. нижче в 9.4). Чисельний коефіцієнт дає можливість перевести поглинену дозу D_n (MeV/kg) в D_n (рад). Доза β -випромінювання може бути знайдена, якщо відома кількість β -частинок, що падають на речовину, та середнє значення іонізаційних втрат при проходженні β -променів крізь речовину. Більш докладно з дозиметрами іонізуючого випромінювання можна ознайомитися при виконанні лабораторних робіт “Визначення коефіцієнта лінійного послаблення гамма-випромінювання” і “Робота з дозиметром ДРГЗ-04”.

9.4. ВЗАЄМОДІЯ ІОНІЗУЮЧОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ З РЕЧОВИНОЮ

9.4.1. Первинні фізичні механізми взаємодії рентгенівського випромінювання з речовиною

Механізм взаємодії з речовиною рентгенівських променів визначається довжиною їх хвилі (частотою). Випромінювання з довжиною хвилі $\lambda \leq 0,1 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м} = 0,1 \text{ нм}$) має більшу енергію і глибше проникає в речовину, його називають жорстким рентгенівським випромінюванням. Випромінювання з $\lambda = 10 - 100 \text{ \AA}$ називають граничним, а з $\lambda > 100 \text{ \AA}$ – м'яким, оскільки воно має порівняно малу проникну здатність.

Потрапляючи в речовину (наприклад, тіло людини), рентгенівське випромінювання частково поглинається і розсіюється в речовині, частково проходить через речовину. Дію на речовину чинить випромінювання, поглинуте і розсіяне в речовині. Фотони рентгенівського випромінювання взаємодіють в основному з електронами атомів і молекул речовини. Є три первинні процеси взаємодії рентгенівського випромінювання з речовиною: когерентне розсіяння, фотоефект, комптон-ефект (некогерентне розсіяння).

Когерентне розсіяння спостерігається при взаємодії рентгенівського фотона з електронами внутрішніх, міцно пов'язаних з ядром оболонок. При цьому змінюється тільки напрямок первинного фотона, довжина хвилі залишається незмінною.

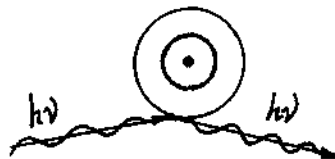


Рис. 9.9. Процес когерентного розсіяння, при якому енергія рентгенівського кванта $h\nu$ залишається незмінною, а змінюється лише напрямок поширення кванта

На рис. 9.9 схематично зображений процес когерентного розсіяння, який відбувається за умови, що енергія $h\nu$ рентгенівського кванта (фотона) менша за енергію, необхідну для іонізації атома, яка дорівнює роботі A_i по відриву електрона від атома ($h\nu < A_i$).

Слід зазначити, що саме механізм когерентного розсіяння

рентгенівських променів лежить в основі рентгеноструктурного аналізу. За допомогою рентгеноструктурного аналізу були вперше визначені, як зазначалося в розділі 6, просторова структура білкової молекули гемоглобіну кита та спіральна структура ДНК.

Отримаємо основну формулу Вульфа–Брегга, що використовується в рентгеноструктурному аналізі. Для спрощення розглянемо кубічну кристалічну решітку з періодом d , який часто є шуканою величиною.

На рис. 9.10 зображено розріз кристалічної решітки. Виділимо в кристалі сімейство паралельних атомних площин 1, 2, 3, ... , які утворюють з пучком первинних променів з довжиною хвилі λ кут θ , і розглянемо інтерференцію відбитих хвиль від окремих площин сімейства. Так як рентгенівські промені здатні проникати в глибину кристала, то відбивання променів пройде не тільки від площини 1, але й від площин 2, 3, Відбиті від різних площин промені будуть інтерферувати між собою і підсилювати один одного, якщо різниця ходу променів Δ рівна цілому числу k ($k = 1, 2, \dots$) довжин хвиль λ : $\Delta = k\lambda$. З рис. 9.10 видно, що $\Delta = AB + BC = 2AB = 2d \sin \theta$.

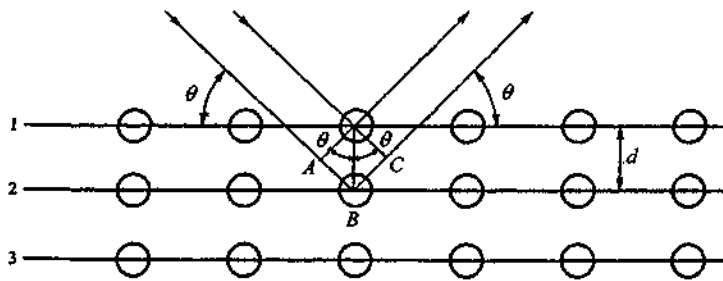


Рис. 9.10. Розріз кристалічної решітки: 1, 2, 3 – атомні площини

Таким чином, умова інтерференційного максимуму відбитих рентгенівських променів має вигляд

$$2d \sin \theta = k\lambda, \quad (9.33)$$

де d – міжплощинна відстань (період решітки). Кут θ звичайно називають кутом ковзання, або кутом відбивання. Якщо відомо λ і θ , з формули (9.33) легко знайти d . На дифракції рентгенівських

променів ґрунтується рентгеноструктурний аналіз кристалічних решіток твердих розчинів, сплавів і чистих речовин, а також інших систем, включаючи біологічні об'єкти.

Формула (9.33) має назву *формула Вульфа–Брегга*. Ця формула була отримана в 1913 р. незалежно російським кристалофізиком Ю.В. Вульфом та англійським фізиком Л. Бреггом. Останній разом із своїм батьком – англійським фізиком Г. Бреггом були нагороджені в 1915 р. Нобелівською премією за значний внесок у вивчення внутрішньої структури кристалів за допомогою рентгенівських променів.

Фотоефект спостерігається, коли енергії фотона $h\nu$ вистачає для виконання роботи виходу A_e електрона. При $h\nu > A_e$ фотон поглинається і електрон відривається від атома (рис. 9.11). Енергія такого електрона за формулою Ейнштейна має вигляд

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - A_e.$$

Залежно від енергії квантів, рентгенівські промені можуть викликати фотоефект з різних електронних оболонок атомів. Із збільшенням енергії квантів (зменшенням довжини хвилі) коефіцієнт поглинання зменшується. Однак на деяких частотах поглинання він різко зростає. Це пов'язано з появою додаткового поглинання за рахунок виривання електронів з відповідної внутрішньої оболонки атома. Значення цих частот рентгенівських променів дає змогу визначити енергію електронів в станах, що відповідають різним підоболонкам. Результатом фотоефекту є інтенсивна іонізація атомів і молекул речовини.

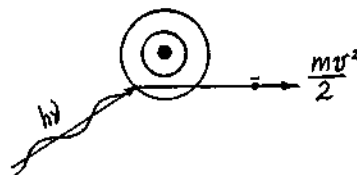


Рис. 9.11. Процес фотоефекту

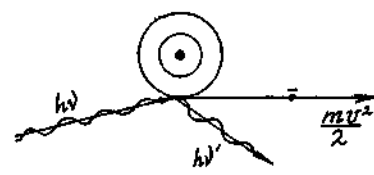


Рис. 9.12. Процес некогерентного розсіяння

Некогерентне розсіяння, або ефект Комптона, спостерігається при взаємодії фотонів досить великих енергій ($h\nu \gg A_i$) із зовнішніми електронами, що мають слабкий зв'язок з ядром. При цьому первинний (налітаючий) фотон передає частину своєї енергії електрону. Електрон відривається від атома, такі електрони називаються електронами віддачі, або комптонівськими електронами. Разом з електронами віддачі випромінюється ще й фотон з енергією меншою, ніж у первинного фотона. Напря́м цього фотона також інший, ніж у первинного (рис. 9.12).

Запишемо закон збереження енергії у випадку ефекта Комптона:

$$h\nu = A_i + \frac{mv^2}{2} + h\nu'. \quad (9.34)$$

Згідно з цим рівнянням енергія налітаючого рентгенівського кванта (фотона) $h\nu$ витрачається на роботу іонізації A_i для відриву електрона від атома, надання цьому електрону кінетичної енергії $mv^2/2$, а також на енергію вторинного фотона $h\nu'$, що з'являється внаслідок процесу некогерентного розсіяння. Оскільки енергія вторинного (розсіяного) фотона $h\nu'$ повинна бути менша за енергію первинного фотона $h\nu$, то з умови $\nu' < \nu$ випливає, що довжина хвилі $\lambda' = c/\nu'$ розсіяного фотона більша за довжину хвилі первинного фотона $\lambda = c/\nu$. Умова $\lambda' > \lambda$ означає, що розсіяний фотон "червоніє", тобто його довжина хвилі зсувається в бік більших довжин хвилі у порівнянні з довжиною хвилі первинного фотона, що налітає на атом.

Якщо енергія фотона недостатня для відриву електрона, може відбуватися збудження атома чи молекули. Переходячи із збудженого стану в стабільний, атом (молекула) випромінює фотон. У деяких речовин це випромінювання відбувається в області видимого спектра (рентгенолюмінесценція). В тканинах організму при цьому можливе збільшення швидкості перебігу фотохімічних реакцій. Швидкі електрони і фотони, що утворилися при первинних процесах, можуть викликати ряд так званих вторинних ефектів. Так, електрони, що утворились при фотоэффекті і комптон-ефекті, за наявності достатньої кінетичної енергії можуть іонізувати сусідні атоми шляхом зіткнення. На

місце електронів, вибитих при фотоэффекті із внутрішніх оболонок, можуть переходити електрони з більш високих рівнів, що супроводжується вторинним характеристичним випромінюванням. Фотони цього випромінювання, а також фотони, що утворюються при комптон-ефекті, можуть, в свою чергу, викликати явища фотоэффекту і комптон-ефекту.

Слід зазначити, що із зростанням енергії рентгенівського кванта (фотона) зростає роль процесу некогерентного розсіяння (ефекту Комптона) у порівнянні з процесом фотоэффекту. Так, якщо енергія фотона становить $W_1 = 10^4 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-15} \text{ Дж}$, то ефект Комптона практично відсутній і спостерігається лише фотоэффект. Під час зростання енергії фотона до величини $W_2 = 8 \cdot 10^4 \text{ eV} = 12,8 \cdot 10^{-15} \text{ Дж}$ ефект Комптона і фотоэффект стають рівноймовірними. Нарешті, коли енергія фотона стає $W_3 = 2 \cdot 10^5 \text{ eV} = 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}$, то ймовірність ефекту Комптона сягає 99%, тоді як ймовірність фотоэффекту – лише 1%.

При проходженні рентгенівських променів через речовину їх інтенсивність зменшується внаслідок істинного поглинання і розсіяння. Іntenсивність I паралельного пучка рентгенівських променів при проходженні ними в речовині відстані d задовольняє закону Бугера (див. розділ 7):

$$I = I_0 e^{-\mu d}, \quad (9.35)$$

де I_0 – інтенсивність падаючих на речовину променів (при $d = 0$), а μ – лінійний коефіцієнт послаблення.

Так як послаблення інтенсивності випромінювання, що проходить, здійснюється за рахунок істинного поглинання (фотоэффект і комптон-ефект) та когерентного розсіяння, то μ рівне сумі лінійних коефіцієнтів істинного поглинання τ і розсіяння σ :

$$\mu = \tau + \sigma. \quad (9.36)$$

Враховуючи (9.36), формулу (9.35) записують у вигляді

$$I = I_0 e^{-(\tau + \sigma)d}.$$

Експериментально встановлена формула залежності коефіцієнта істинного поглинання τ від атомного номера Z , густини

ρ поглинаючого середовища і довжини хвилі λ рентгенівських променів:

$$\tau = k\rho Z^4 \lambda^3, \quad (9.37)$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Дуже важлива залежність τ від Z . Наприклад, при просвічуванні тіла людини коефіцієнт істинного поглинання в кістках, що складаються із фосфорнокислого кальцію ($Z = 20$ для кальцію і $Z = 15$ для фосфору), буде приблизно в 150 раз більший, ніж для м'яких тканин, в яких поглинає переважно вода. Тому при фіксації рентгенівського випромінювання буде різко виділятися тінь від кісток. Другий приклад використання залежності коефіцієнта поглинання τ від атомного номера Z полягає в тому, що для захисту від рентгенівського випромінювання використовують матеріал з великим значенням Z (як правило, це свинець).

Залежність $\tau \sim \lambda^3$ (при $Z = \text{const}$) використовується при виборі матеріалу фільтрів, за допомогою яких із даного випромінювання виділяються компоненти з потрібною жорсткістю. Фільтр становить металеву пластинку із алюмінію, міді, інколи свинцю, яка ставиться на шляху променів. М'яке, тобто довгохвильове, рентгенівське випромінювання інтенсивно поглинається шкірою людини, тому потрібно захищати від цього випромінювання і пацієнта, і рентгенолога під час проведення рентгенологічних обстежень. Для захисту рентгенолога використовують свинцеве скло, свинцеві гумові фартухи, рукавички, а для захисту пацієнта – фільтри.

Для таких речовин, як повітря, вода, м'які тканини організму, що містять близькі за атомним номером елементи, залежність коефіцієнта поглинання τ від довжини хвилі практично не відрізняється. Це використовується при дозиметрії рентгенівського випромінювання, а саме: вимірюють експозиційну дозу, тобто енергію випромінювання, поглинутого в повітрі, далі помножують її на відповідний коефіцієнт і визначають за формулою (9.26) поглинуту в тканинах організму енергію цього ж випромінювання.

9.4.2. Первинні механізми дії радіоактивного випромінювання і потоків частинок на речовину

Як зазначалося в параграфі 9.2, дія заряджених α - і β -частинок радіоактивного випромінювання на речовину зводиться головним чином до збудження та іонізації атомів, тобто переходу електронів атома на більш високі енергетичні рівні і відриву електронів від атома. При цьому, якщо енергія α - і β -частинок є достатньо великою, то вони можуть вибити електрони з глибоких енергетичних рівнів, що призводить до виникнення характеристичного рентгенівського випромінювання.

Щодо γ -випромінювання, то первинні механізми його дії на речовину здебільшого подібні до дії рентгенівського випромінювання, а саме: зводяться до фотоефекту і ефекту Комптона. Крім того, для γ -випромінювання великих енергій характерним стає процес утворення електронно-позитронних пар. Оскільки енергії спокою електрона і позитрона майже однакові (маси їх спокою відрізняються на 0,007%)

$$W_0 = m_0c^2 = 0,51 \text{ MeV},$$

то для утворення електронно-позитронної пари і надання цим частинці та античастинці кінетичної енергії необхідно, щоб енергія γ -фотона була більшою, ніж $2W_0 = 1,02 \text{ MeV}$.

Таким чином, послаблення пучка γ -випромінювання, як і рентгенівського випромінювання, описується законом Бугера (9.35), в якому лінійний коефіцієнт послаблення μ складається з суми трьох доданків

$$\mu = \mu_f + \mu_k + \mu_n, \quad (9.38)$$

де перший доданок характеризує послаблення за рахунок явища фотоефекту, другий – комптон-ефекту, а третій – утворення електронно-позитронних пар.

У речовинах з високим атомним номером (наприклад, у свинцю) при енергіях фотонів менших, ніж 1 MeV , головним чином відбувається фотоефект, при середніх енергіях ($2\text{--}5 \text{ MeV}$) – комптон-ефект, а при великих енергіях значення набуває утворення пар. У результаті загальний коефіцієнт послаблення із

зростанням енергії фотонів спочатку падає внаслідок зниження фотоэффекту, а потім збільшується за рахунок утворення пар.

Для речовин з невисоким атомним номером (наприклад, для води) при енергії γ -фотонів $W < 100 \text{ кеВ}$ переважає фотоэффект, при $W \approx 1 \text{ МеВ}$ – ефект Комптона, а при $W > 10 \text{ МеВ}$ – процес утворення електронно-позитронних пар.

Для повітря фотоэффект має значення тільки при енергії фотонів до $0,01 \text{ МеВ}$, потім відбувається головним чином комптон-ефект, утворення пар можливе тільки при енергії порядку $30+40 \text{ МеВ}$.

Важливо зазначити, що іонізуюча здатність зростає в ряду γ , β , α -випромінювання, а проникна здатність у зворотному ряду α , β , γ -випромінювання (див. рис. 9.13).

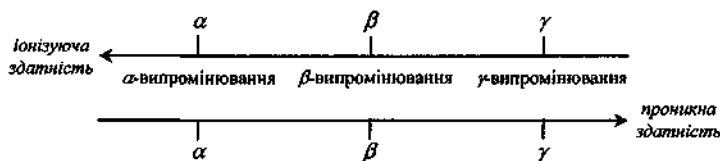


Рис. 9.13. Відносна іонізуюча та поглинаюча здатність радіоактивного випромінювання

Для більш детальної характеристики взаємодії радіоактивного випромінювання з речовиною вводять такі величини:

1) **питома іонізація** – число пар іонів, що утворюються на 1 см шляху частинки в речовині;

2) **іонізаційні втрати** – зміна енергії частинки на 1 см її шляху в речовині;

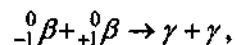
3) **повний пробіг** – відстань R , яку проходить частинка в речовині доти, доки її енергія не стає рівною тепловій енергії ($W \approx kT \approx 4 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} \approx 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ еВ}$ при кімнатній температурі).

Звичайно, ці величини не є постійними і залежать від типу випромінювання та його енергії. Так, для α -частинок з енергією 8 МеВ максимальне значення питомої іонізації в повітрі складає близько $8 \cdot 10^4$ пар іонів на 1 см шляху, причому це значення досягається не відразу при попаданні α -частинки в повітря, а після того, як вона пройшла шлях близько 6 см . За цих умов швидкість α -частинки зменшується настільки, що її іонізуюча

здатність стає максимальною, а іонізаційні втрати досягають значення $2,7 \text{ МеВ/см}$.

У рідинах типу води та в тілі людини і тварин типові значення повного пробігу α -частинок звичайно суттєво менші за їх значення в повітрі і складають приблизно $R \approx 0,1-0,01 \text{ мм}$. Пояснення цього факту пов'язане з тим, що біологічні рідини, як і вода, містять багато атомів водню, маса яких по порядку величини близька до маси α -частинок. Чим ближче маса частинок, які співударяються, тим ефективніше передається кінетична енергія від однієї частинки до іншої. В цьому випадку так званий коефіцієнт акомодатії, що визначає такий процес передачі енергії, прямує до одиниці. Саме цим визначається швидке сповільнення α -частинок в організмі людини і тварин, які на $70-80\%$ складаються з рідин, що за своєю консистенцією наближаються до води. Іншим прикладом є використання важкої води D_2O для сповільнення нейтронів в ядерному реакторі.

Що стосується β -частинок, то послаблення їх потоку в речовині відбувається наближено теж за законом Бугера $I_\beta = I_0 e^{-\mu_\beta d}$, причому внесок в лінійний коефіцієнт послаблення μ_β потоку β -випромінювання дають такі процеси, як іонізація і збудження атомів та молекул, гальмівне рентгенівське випромінювання, розсіяння на електронах атомів і молекул тощо. Слід зазначити, що у разі позитронного β -випромінювання зустріч електронів та позитронів, тобто частинок і античастинок, призводить до реакції анігіляції



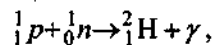
внаслідок якої з'являються 2 γ -кванти, які через закон збереження імпульсу розлітаються під кутом 180° один до одного. При середніх значеннях енергії $E_{\text{серед}} = E_{\text{max}} / 3$ β -частинкам в організмі людини і тварин (маються на увазі, звичайно, електрони) притаманні значно більші значення повного пробігу R_β , ніж α -частинкам, а саме: $R_\beta \approx 10-20 \text{ мм}$. Більша проникна здатність β -частинок пояснюється меншою їх масою ($m_\alpha / m_\beta \approx 7345$) та суттєво меншими іонізаційними втратами і питомою іонізацією (для релятивістських β -частинок, тобто електронів, які рухаються

зі швидкістю, що близька до швидкості світла, питома іонізація складає приблизно 50 пар іонів на 1 см шляху).

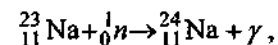
Питання про послаблення γ -випромінювання обговорювалося раніше у зв'язку з формулою (9.38). Додаткова увага буде приділена цьому питанню далі в лабораторній роботі "Визначення коефіцієнта лінійного послаблення γ -випромінювання".

До іонізуючого випромінювання відносять також протони і нейтрони. Швидкість і енергія протонів, що утворюються при ядерних реакціях, а також їх проникна та іонізуюча здатності близькі до відповідних величин альфа-частинок. Нейтрони, що викидаються при ядерних реакціях, мають початкову швидкість порядку $3 \cdot 10^7$ м/с і енергію до $4+5$ MeV. У зв'язку з відсутністю заряду первинна іонізуюча здатність у них низька, проникна відповідно досить висока.

Іонізуючий ефект від дії нейтронів на речовину є наслідком, головним чином, вторинних процесів. При взаємодії нейтронів з ядрами атомів можуть відбуватися пружне розсіяння, непружне розсіяння і захват нейтронів ядрами (радіаційне захоплення). При непружних взаємодіях, особливо з ядрами легких елементів, нейтрон передає ядру частину кінетичної енергії. За рахунок отриманої енергії ядро, що в даному випадку називається ядром віддачі, викликає вторинну іонізацію, яка через наявність у ядрі електричного заряду може бути досить інтенсивною. Оскільки тканини організму містять багато водню, то швидкі нейтрони легко втрачають в них свою енергію і, утворюючи ядра віддачі (протони), викликають значну іонізацію. При суттєвих передачах енергії при непружних взаємодіях ядер з нейтронами відбувається збудження ядра, внаслідок чого воно випромінює один або кілька γ -фотонів. Якщо нейтрон поглинається ядром, то відбувається ядерна реакція. Зазвичай це перетворення ядра в радіоактивний ізотоп з наступним β -розпадом та випромінюванням γ -фотонів. При цьому в біологічних тканинах часто утворюються дейтерій ${}^2_1\text{H}$ за реакцією



радіоактивні ізотопи натрію за реакцією



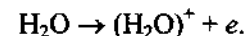
а також радіовуглець за реакцією (9.20) та ін.

При дії іонізуючих випромінювань може відбуватися також порушення структури молекул речовини. Зокрема, можна відзначити радіоліз води, який полягає в іонізації, а потім розпаді іонізованої молекули води з утворенням ненасичених радикалів H і OH , які не несуть електричних зарядів, але мають ненасичені валентності і тому мають виключно високу хімічну активність.

9.4.3. Фізико-хімічні механізми радіаційних пошкоджень

Згідно з загальноприйнятими концепціями радіаційного захисту (див. список літератури до розділу 9), існує кілька основних фізико-хімічних механізмів пошкоджень, що викликаються дією радіоактивних випромінювань на живі істоти.

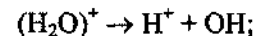
Первинна стадія (умовно її можна назвати *фізичною*), пов'язана з іонізацією молекул води (нагадаємо ще раз, що в тілі людини на воду припадає близько $3/4$ загальної ваги) відщеплюється електрон згідно з реакцією



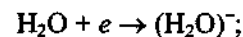
Цей процес в типових випадках триває дуже короткий час ($t \approx 10^{-16}$ с).

Наступна так звана *фізико-хімічна стадія*, яка триває приблизно протягом 1 мкс, характеризується декількома процесами (реакціями), а саме:

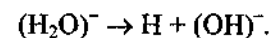
а) відщепленням протону від додатного іона H_2O^+



б) приєднанням електрона до нейтральної молекули води з утворенням від'ємно зарядженого іона $(\text{H}_2\text{O})^-$, тобто

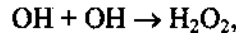


в) перетворення цього іона на атом водню і від'ємно заряджений іон $(\text{OH})^-$, тобто



Таким чином, продуктами цих реакцій є утворення як заряджених $(\text{OH})^-$ і H^+ , так і нейтральних H , OH частинок. Слід зауважити, що протон H^+ та іон $(\text{OH})^-$ не відіграють в наступному будь-якої значної ролі, бо внаслідок дисоціації їх є досить багато в звичайній воді, тоді як нейтральні утворення – молекула водню H і гідроксильна група OH є вільними радикалами. Вони мають неспарений електрон і тому хімічно є дуже активними.

На цій стадії виникає ще й водневий пероксид H_2O_2 за реакцією



який є дуже сильним окислювачем.

Після фізико-хімічної стадії настає стадія, яку можна умовно назвати *хімічною*. На цій стадії, яка триває типово кілька секунд, продукти реакцій, що отримані на попередній стадії, починають взаємодіяти з органічними молекулами в клітинах, можуть атакувати комплекси молекул в хромосомах тощо.

Таким чином, перші три стадії (фізична, фізико-хімічна та хімічна) по суті ще не викликають великих порушень в тканинах. Токсична дія випромінювання пов'язана з вторинними реакціями, при яких відбувається розрив зв'язку всередині складних органічних молекул. Вільні радикали та інші активні біохімічні продукти стають каталізаторами для вторинних реакцій вже біологічного порядку, що розвиваються лавиноподібно за типом ланцюгової реакції і можуть призвести організм до стану, який називають променевою хворобою.

Всі ці процеси відбуваються на останній *біологічній* стадії, тривалість якої може змінюватися в дуже широких межах – від кількох хвилин до десятків років. Радіаційні пошкодження на біологічній стадії звичайно поділяють на такі два класи:

- а) *соматичні*, що впливають лише на опромінену живу істоту (наприклад, людину);
- б) *спадкові*, що передаються на репродуктивні органи і переходять до наступних поколінь.

Біологічна стадія характеризується, таким чином, віддаленими впливами зазначених вище фізико-хімічних механізмів дії випромінювання на живі істоти, які пов'язані з сповільненням чи зупиненням процесів ділення клітин, що призводять до відпо-

відних змін в клітинах наступних поколінь та до передчасної загибелі клітинної популяції і організму в цілому.

Слід зазначити, що іонізуюче випромінювання діє на всі біоб'єкти, починаючи з найпростіших вірусів та бактерій і закінчуючи такими найскладнішими, як людина. Вивчення радіочутливості біоб'єкта, тобто його сприйнятливості до дії різних видів іонізуючого випромінювання, довело, що ця дія відбувається на всіх рівнях організації живих істот – молекулярному, клітинному та організменному.

Найважливіші біологічні макромолекули – білки, нуклеїнові кислоти, ферменти тощо – під дією іонізуючого випромінювання втрачають свою біологічну активність (гармональну, ферментативну та ін.), в них відбувається деполімеризація або, навпаки, виникають нові хімічні утворення. В клітинах навіть руйнується процес ділення, що може інколи відбуватися при $D_{\text{погл}} \geq 3-5 \text{ рад}$. Доведено, що найбільш радіочутливою частиною клітин є його ядро. Загибель клітин внаслідок опромінення ядра відбувається при дозах, які в десятки та сотні разів менші за ті дози, що призводять до загибелі цих клітин при опроміненні їх цитоплазми. Водночас було експериментально встановлено, що заміна цитоплазми опроміненої клітини на цитоплазму неопромінену відновлює властивість клітини до подальшого ділення.

Важливим результатом подібних радіаційних експериментів було встановлення того принципового факту, що загибель живих організмів відбувається внаслідок одночасного ураження багатьох клітин і тканин. Внаслідок цього ураження порушується загальна регуляція життєво важливих процесів, що відбуваються у кістковому мозку, лімфатичній системі, кишковому тракті, статевих залозах та інших системах організму людини і тварини.

На рис. 9.14 наведена так звана крива виживання, яка характеризує залеж-

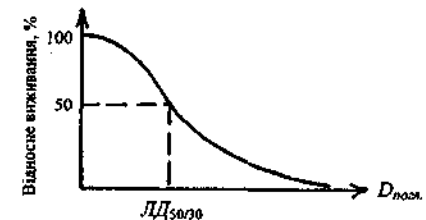


Рис. 9.14. Крива виживання

ність кількості осіб (людей, тварин), що виживають при опроміненні, від поглинутої дози.

Більш точно, віддалені впливи дії радіації поділяють на *ранні* та *пізні* ефекти. Для характеристики *ранніх радіаційних ефектів* часто вводять так звану “летальну дозу” $LD_{50/30}$. Це така доза, яка є летальною для 50% опромінених об’єктів певної популяції через 30 діб після опромінення. Для людської популяції летальна поглинута доза $LD_{50/30}$ становить від 3 до 8 Гр, або 300–800 рад при загальному опроміненні тіла рентгенівськими променями. При поглинутій дозі $D_{\text{погл}} < 1 \text{ Гр} = 100 \text{ рад}$ ймовірність смерті є дуже малою, тоді як при поглинутій дозі $D_{\text{погл}} > 8 \text{ Гр} = 800 \text{ рад}$ ймовірність вижити є вже дуже малою.

При поглинутих дозах порядку 10 Гр (1000 рад) смерть настає від пошкодження білих кров’яних клітин (в основному – лімфоцитів). Ці форменні елементи крові звичайно забезпечують захист від інфекцій. При їх загибелі під дією великих доз радіації опромінена людина не може протистояти будь-яким інфекціям, які стають смертельно небезпечними. Ризик смерті при $D_{\text{погл}} \approx 10 \text{ Гр}$ зменшується, якщо пацієнт утримується в стерильному приміщенні і йому робиться пересадка спинного мозку для стимуляції появи додаткових білих кров’яних клітин. Без подібних заходів смерть опроміненої людини настає через 3–5 діб, якщо $D_{\text{погл}} > 10 \text{ Гр} = 1000 \text{ рад}$.

При значно більших поглинутих дозах радіації ($D_{\text{погл}} \approx 100 \text{ Гр}$), відбувається катастрофічна загибель клітин шлунково-кишкового тракту, а при ще більших дозах гинуть клітини центральної нервової системи. Слід однак зазначити, що в експериментах на тваринах смерть не наступала миттєво навіть при 500 Гр.

Щодо *пізніх радіаційних ефектів*, то одним з найнебезпечніших проявів дії радіації є рак. Основний механізм появи цього смертельно небезпечного захворювання пов’язаний з руйнуванням системи контролю ділення клітин. Наслідком стає більш швидкий процес ділення опромінених клітин у порівнянні з швидкістю цього процесу в неопромінених (нормальних) клітинах. Такий процес прискореного ділення клітин називається, як відомо, проліферацією клітин. Ефект проліферації передається

у спадщину дочірнім клітинам, внаслідок чого можуть з’являтися злоякісні пухлини. Між часом опромінення людини і знаходженням у неї ракового захворювання може пройти досить великий (до 30 років) проміжок часу – так званий “латентний період”.

На жаль, не існує порогової дози, нижче якої немає ризику захворіти раком. Разом з тим немає прямих підтверджень того факту, що будь-які малі дози радіації здатні викликати рак. Це досить незвичайне, на перший погляд, протиріччя можна пояснити такими експериментальними даними, наведеними англійськими радіологами Торном і Веннартом.

Нехай є людська популяція, що включає в себе мільйон людей. Тоді виявляється, що при еквівалентній дозі радіаційного випромінювання в 1 мілізіверт ($D_{\text{екв}} = 1 \text{ мЗв}$), яку отримала кожна людина, загальна кількість випадків захворювання раком будь-яких органів і тканин складає: у чоловіків – 10,5 випадків, у жінок – 15,5 випадків. Різниця в п’ять випадків пов’язана з захворюваннями жінок на рак молочної залози (більш докладні дані в табл. 9.2). Цікавим є той факт, що добуток кількості людей N в групі на еквівалентну дозу $D_{\text{екв}}$ (це так звана *популяційна еквівалентна доза*) залишається величиною сталою, тобто $N \cdot D_{\text{екв}} = \text{const}$. Іншими словами, така ж кількість чоловіків (всього їх буде 10–11) або жінок (їх буде 15–16) захворіє на рак будь-якої форми за умови, що буде взята група не в мільйон, а в тисячу людей, якщо еквівалентна доза стане не 1 мЗв, а 1 Зв. Такий самий результат буде спостерігатися і для $N = 10^9$ людей при $D_{\text{екв}} = 10^{-6} \text{ Зв}$.

Таблиця 9.2. Кількість захворювань на рак внаслідок радіаційного випромінювання

Тип (локалізація) раку	Кількість випадків на 10^6 людей при $D_{\text{екв}} = 10^{-3} \text{ Зв}$	
	чоловіки	жінки
Саркома кісток	0,5	0,5
Рак щитовидної залози	1,0	1,0
Рак печінки	1,0	1,0
Рак легенів	2,0	2,0

Рак крові (лейкемія)	3,0	3,0
Рак грудної залози	—	5,0
Раки інших локалізацій	3,0	3,0
В С Ї О Г О	10,5	15,5

9.4.4. Ефект дії малих доз іонізуючого випромінювання

При дії різних типів іонізуючого випромінювання на біологічні середовища відбувається передача енергії малими кінцевими порціями (квантами) під час окремих актів взаємодії з речовиною. Для іонізації опромінюваного біологічного середовища необхідна мінімальна величина енергії, що визначається середнім потенціалом іонізації (табл. 9.3).

Під час дії іонізуючого випромінювання насамперед іонізуються молекули води – найбільш поширеного середовища будь-якого біологічного об'єкта, які перетворюються у вільні радикали Н і ОН. Як зазначалося, вільні радикали мають високу хімічну активність і вступають в реакції безпосередньо з біологічними молекулами. Починається ланцюгова реакція, коли в хімічні взаємодії вступає дедалі більше молекул. Викликані іонізуючим випромінюванням біохімічні реакції призводять до змін у ділянках кліткових структур (ДНК, мембрани, хроматиди тощо). При невеликих дозах опромінення захисні механізми організму відновлюють пошкодження в ДНК, виводять з організму пошкоджені клітини, нейтралізують їх системою імунного захисту. При великих дозах опромінення захисна система організму не в змозі ліквідувати наслідки іонізації, що призводить до порушення нормальної життєдіяльності клітин, тканин, органів і організму в цілому.

Таблиця 9.3. Середній потенціал іонізації для різних середовищ

Середовище	Середній потенціал іонізації, eВ
Вода	65
М'язи	66
Кістки	85
Повітря	34

Клітина, в якій іонізуючим випромінюванням викликані онкогенні зміни, тривалий час може залишатись в стані спокою. Для прояви її змінених властивостей необхідна дія на клітину активаторів (промоторів), які викличуть її прискорений поділ. В організмі всього налічується близько 10^{14} клітин. Завжди є в наявності певна кількість ініційованих клітин, із яких тільки одиниці утворюють клани злоякісних клітин. Із збільшенням числа опроміненень зростає кількість ініційованих клітин. Повторна радіаційна дія для цих клітин може служити промотором. Це пояснює кумулятивну дію іонізуючого випромінювання на біологічний об'єкт з погляду ризику віддалених ймовірних (стохастичних) наслідків.

Викликані зміни в генетичному апараті соматичних клітин можуть призвести до переродження клітин в злоякісні. Зміни в генетичному апараті статевих клітин в осіб дітонароджувального періоду життя можуть спонукати до спадкових змін у нащадків опроміненних.

Ведучими міжнародними організаціями (Міжнародна комісія з радіаційного захисту – МКРЗ, Міжнародне агентство з атомної енергії – МАГАТЕ, Науковий комітет з дії атомної радіації при ООН – НКДАР ООН) приймається модель безпорогової лінійної залежності між дозою опромінення і її ефектом. Це передбачає, що навіть мінімальна радіаційна дія має біологічний ефект, зокрема радіаційний канцерогенез. Такий підхід базується на ймовірнісній (стохастичній) природі канцерогенезу. За оцінками ризик смертності від раку, викликаного радіаційним фоном порядку 1 мЗв/рік , відповідно лінійній концепції складає близько 10 випадків на 1 млн. чоловік за рік. Це підтверджується даними, наведеними в табл. 9.2. До питання про лінійність залежності “доза-ефект” ми ще повернемося нижче.

На думку багатьох дослідників, найбільш чутливою до іонізуючого випромінювання структурою клітини є ДНК, в якій іонізація може викликати розрив зв'язку між атомами. Одиначні і подвійні розриви викликають хромосомні спотворення (аберації). Поява хромосомних аберацій передуює злоякісним пухлинам. Наявність хромосомних аберацій в лімфоцитах периферійної

крові є ознакою передлейкозного стану, відповідає початковому етапу реакції на променеве навантаження.

Говорячи про ефект малих доз іонізуючого випромінювання, слід брати до уваги ще один дуже важливий фактор – тривалість їх дії. Справді, одну і ту ж саму, скажімо, поглинену (або еквівалентну) дозу можна отримати при відносно малих потужностях доз за рахунок збільшення часу їх взаємодії з речовиною (біооб'єктом, зокрема). Сказане підтверджується формулою

$$D = P_1 \cdot t_1 = P_2 \cdot t_2 = \text{const.} \quad (9.39)$$

Звідси випливає досить очевидний факт: *одне і те ж саме дозове навантаження іонізаційного випромінювання спостерігається для випадків, коли відношення потужностей доз обернено пропорційне часовим інтервалам дії цих потужностей*, тобто

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{t_2}{t_1}. \quad (9.40)$$

Приклад. Нехай потужність еквівалентної дози є досить малою: $P_1 = 50$ мкбер/год (приблизно тільки втричі більшою за природне фонове значення). Тоді еквівалентна доза цього випромінювання буде такою ж, як і випромінювання з суттєво більшою потужністю еквівалентної дози $P_2 = 180000$ мкбер/год = $= 50$ мбер/с (потужність P_2 більш ніж в 10 тисяч разів перевищує природне значення) за умови, що тривалість дії випромінювання малої потужності t_1 складає 10 годин, тоді як тривалість дії випромінювання великої потужності t_2 складає лише 10 с. Для даного прикладу маємо $P_1 = P_2 / 3600$, $t_1 = 3600 t_2$, так що для обох випадків добуток потужності еквівалентної дози на час, тобто сумарна еквівалентна доза є величиною стала: $P_1 t_1 = P_2 t_2 = = 0,5$ мбер.

Ця ситуація значною мірою еквівалентна згаданій вище у параграфі 9.4.3 ситуації з популяційною дозою іонізуючого випромінювання, а саме: медико-біологічні ефекти (зокрема, кількість ракових захворювань) залишається сталою при одночасному пропорційному збільшенні еквівалентної дози $D_{\text{екв}}$ та зменшенні чисельності N людської популяції, що

опромінюється ($D_{\text{екв}} \cdot N = \text{const}$). Разом з тим слід зауважити, що для окремої людини отримання великого дозового навантаження за короткий проміжок часу є більш небезпечним і може привести до променевої хвороби і навіть смерті, тоді як у випадку менших доз такі наслідки відкладаються на значно довший термін за часом.

І останнє зауваження щодо дії малих доз випромінювання на біооб'єкти. Воно стосується досить суперечливого і не до кінця з'ясованого явища підсилення дії фізико-хімічних (та, мабуть, і медико-біологічних) факторів при прямуванні параметрів, які характеризують цей фактор (наприклад, концентрації речовини) до нуля. Іншими словами, йдеться про те, що не можна просто екстраполювати результати, які отримані при великих значеннях параметрів (концентрації, доз і т.п.) на малі значення цих параметрів, тобто сподівання на прямо пропорційне зменшення біологічного ефекту при зменшенні поглиненої дози не є апіорі вірним.

З математичної точки зору ефект підсилення часто описується такою формулою:

$$A(C) \sim \ln C, \quad (9.41)$$

де A – певна властивість (фактор); C – відповідна змінна (параметр). Прикладом може бути наведена в параграфі 5.4.2 залежність осмотичного внеску до хімічного (електро-хімічного) потенціалу від концентрації C , що подається виразом

$$\Delta\mu = RT \ln C. \quad (9.42)$$

З формул (9.41) і (9.42) безпосередньо випливає, що коли концентрація C прямує до нуля, то величина $|A|$ або $|\Delta\mu|$ прямують до нескінченності. Більш уважний аналіз досить тонких математичних нюансів отримання подібних логарифмічних особливостей $A(C)$ або $\Delta\mu(C)$ показує, що просто так прямувати змінну C до нуля не можна (через використання так званої формули Стірлінга, яка перестає бути вірною при $C \rightarrow 0$). Водночас тенденція до збільшення фактора A при зменшенні параметра C (хай не до нуля) залишається.

Подібні ефекти спостерігаються в фізико-хімічних дослідженнях деяких розчинів. Мабуть, саме вони лежать в основі дії

гомеопатичних препаратів, а також в дії іонізуючого випромінювання в малих дозах на біологічні об'єкти. Звичайно, вкрай необхідне з'ясування особливостей молекулярних механізмів дії малих доз випромінювання, що потребує подальших теоретичних і експериментальних досліджень з боку фахівців різних галузей знань.

9.5. ЗАСТОСУВАННЯ РЕНТГЕНІВСЬКОГО ВИПРОМІВАННЯ В МЕДИЦИНІ

Перше практичне застосування рентгенівські промені знайшли в області медичної діагностики і терапії. В січні 1896 р. рентгенівськими променями займався винахідник радіо О.С. Попов, який виготовив в Кронштадті апарат для одержання рентгенівських променів. Цей апарат був ним побудований уже через два тижні після публікації першого повідомлення Рентгена. Попов застосував свій апарат для виявлення рушничного дроби, що застряв у тілі пораненого. Такі апарати були виготовлені ним і доставлені на деякі кораблі флоту. Лікар крейсера "Аврора" В.С. Кравченко вперше застосував рентгенівські промені для діагностики 40 поранених в боях при Цусімі в російсько-японську війну (1905 р).

Як вже згадувалося у параграфі 9.1.2, П.М. Лебедев демонстрував під час лекцій рентгенівські знімки частин свого тіла, починаючи з січня 1896 р.

У наступні роки застосування рентгенівських променів у медицині удосконалювалось як для діагностичних, так і терапевтичних цілей.

9.5.1. Методи рентгенодіагностики

Під *рентгенодіагностикою* розуміють розпізнавання захворювання за допомогою просвічування тіла рентгенівськими променями.

Тіло людини складається із тканин і органів, що мають різний елементний склад і різну густину, отже, і різну здатність поглинати рентгенівське випромінювання. Тому під час просвічування тіла тканини з більшою густиною поглинають рентге-

нівські промені сильніше і виділяються як темні на фоні світлих, мало поглинаючих, тканин. Схема установки для рентгенодіагностичного обстеження включає три обов'язкові компоненти (рис. 9.15):

1 – джерело випромінювання (рентгенівська трубка);

2 – об'єкт обстеження;

3 – пристрій для реєстрації рентгенівського випромінювання, яке пройшло через об'єкт.

Залежно від виду реєструючого пристрою розрізняють кілька методів рентгенодіагностики: рентгеноскопія, флюорографія, рентгенографія, електро-рентгенографія, рентгенотелебачення, рентгеномографія (детально про останній метод див. параграф 9.6.1).

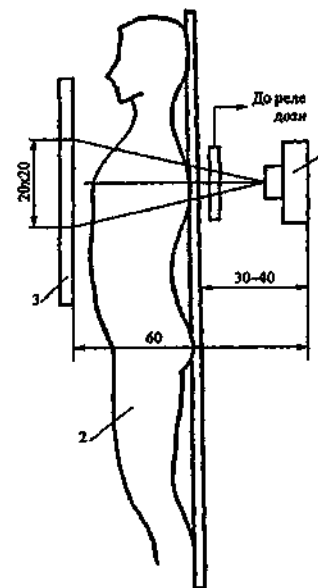


Рис. 9.15. Схема установки для рентгенодіагностичного обстеження

Рентгеноскопія

У цьому методі реєструючим пристроєм є екран, який світиться під дією рентгенівського випромінювання (флуоресцентний екран). Світлотіньове зображення досліджуваної частини тіла на цьому екрані розглядає (спостерігає) лікар-рентгенолог, який здійснює візуальний контроль). Між екраном і оком рентгенолога ставиться свинцеве скло, щоб захистити лікаря від рентгенівського випромінювання, яке проходить через пацієнта.

Рентгеноскопія дає уявлення про функціональний (рентгенофункціональний) стан органу. Недоліки рентгеноскопії: низька яскравість флуоресцентного екрана, недостатня контрастність зображення на звичайному рентгенівському екрані, робота проводиться в затемненому приміщенні, спостереження про-

дить одна особа. Лікар і хворий знаходяться близько до рентгенівської трубки, що призводить до значного їх опромінення. Останнє обмежує можливість практичного застосування рентгеноскопії, особливо під час тривалих рентгенологічних обстежень.

Флюорографія (рентгенофлюорографія)

Флюорографія – рентгенологічне дослідження, при якому рентгенівське зображення об'єкта фотографується з флуоресцентного екрана на фотоплівку. Розрізняють дрібнокадрову (24×24 або 35×35 мм) і крупнокадрову (70×70 або 100×100 мм). Остання за діагностичними можливостями наближається до рентгенографії.

Щоб захистити рентгенолога в процесі рентгенівського обстеження хворого, був запропонований метод рентгенографії.

Рентгенографія

Рентгенографія – метод рентгенологічного дослідження, при якому в ролі пристрою для реєстрації використовується рентгенівська плівка. Зображення предмета дістають на фотоплівці. Рентгенівську зйомку будь-якого органа проводять не менш ніж в двох взаємно перпендикулярних проєкціях. Технічні умови зйомки автоматично задаються спеціальними приладами, що входять до комплексу рентгенівської установки. На рентгенограмах виявляється більше деталей зображення, ніж при рентгеноскопії.

Рентгенографічний метод характеризується значно більшою інформативністю, ніж рентгеноскопічний. Для аналізу рентгенограми можна залучити інших, більш досвідчених спеціалістів, і це є документ, який можна порівняти з наступними аналогічними знімками.

При рентгенографії сумарна експозиція в багато разів менша, ніж при рентгеноскопії (при рентгеноскопії, як видно з рис. 9.15, відстань між фокусами рентгенівської трубки і поверхнею тіла мінімальна – до 30–40 см, а час включення високої напруги на рентгенівській трубці є великим). За експозицією одне рентгенівське обстеження еквівалентне 5–9 рентгенограмам. Пропорційно експозиції змінюється величина тканинних доз. Для підвищення роздільної здатності і зменшення променевих

навантажень використовують підсилювачі рентгенівського зображення (ПРЗ). Застосування ПРЗ створює менші дозові навантаження, ніж при використанні звичайного екрана для рентгеноскопії. Проте і в цьому випадку при більшій тривалості обстеження можливі достатньо великі дозові навантаження. У табл. 9.4 наведені тканинні дози, отримані під час рентгеноскопічного і рентгенографічного обстежень.

Таблиця 9.4. Тканинні дози, отримані під час рентгенологічних обстежень

	$D_{\text{горт}}$	$D_{\text{л}}$	$D_{\text{щ}}$	$D_{\text{сє}}$	$D_{\text{к}}$	$D_{\text{с}}$	$D_{\text{мз}}$	$D_{\text{мт}}$	$D_{\text{ш}}$	$D_{\text{жз}}$
Обстеження органів дихання ($U_a = 80 \text{ кВ}, I = 3 \text{ мА}, t = 120 \text{ с}$) ¹										
Рентгеноскопія без ПРЗ ³	18,5 (1850)	12,6 (1260)	1,4 (149)	2,6 (260)	3,6 (1220)	12,2 (290)	2,9 (290)	2,6 (260)	0,1 (10)	0,15 (15)
Рентгенографія ³	1,2	1,1	0,13	0,24	0,31	1,0	0,26	0,24	0,07	0,014
$(U_a = 70 \text{ кВ}, I = 1 \text{ мА}, t = 180 \text{ с})$										
Рентгеноскопія з ПРЗ ¹	3,9	4,7	0,5	0,8	1,3	4,5	0,9	0,8	0,04	0,05
Рентгенографія ¹	Тканинні дози в 3–4 рази менші, ніж при рентгеноскопії									
Катетеризація серця ($U_a = 70 \text{ кВ}, I = 1,5 \text{ мА}, t = 620 \text{ с}$)										
Рентгеноскопія з ПРЗ ¹	15,8	24,2	2,8	4,7	6,5	23	4,8	4,7	0,2	0,3
Рентгенографія з ПРЗ ¹	6,7	0,8	1,4	1,8	5,8	1,7	1,4	1,9	0,05	0,08
Обстеження шлунка ($U_a = 90 \text{ кВ}, I = 2 \text{ мА}, t = 540 \text{ с}$)										
Рентгеноскопія без ПРЗ ²	14,04	0,76	9,72	4,32	4,32	1,84	0,76	0,11	35,64	41,04
Рентгенографія ²	6	0,36	4	1,6	1,6	0,8	0,32	0,08	16	18,4
Рентгенографія з ПРЗ ¹	2,1	0,12	1,4	0,6	0,6	0,24	0,12	0,02	5	6

Індексми зверху позначені:

¹ – тканинні дози в мГр, в дужках – в мілірадах. Із табл. 9.4 видно, що при прицільній рентгенографії (три прицільні знімки) дози майже в 10 разів нижчі, ніж при рентгеноскопії;

² – тканинні дози без ПРЗ;

³ – тканинні дози в режимі обстеження.

Умовні позначення тканинних доз різних органів:

$D_{акт}$ – активний кістковий мозок; $D_л$ – легені; $D_ш$ – шлунок; $D_{пг}$ – печінка; $D_н$ – нирки; $D_с$ – селезінка; $D_{мл}$ – молочні залози; $D_{щз}$ – щитовидна залоза; $D_{чг}$ – чоловічі гонади; $D_{жг}$ – жіночі гонади.

Тканинні дози визначаються за такою формулою:

$$D = pI\tau,$$

де p – питоме значення тканинної дози ($мкГр/мА\cdot с$); I – сила струму в рентгенівській трубці; τ – середній час дослідження.

З метою зниження доз опромінення рекомендується повна заміна рентгеноскопії на рентгенографію. Рентгеноскопичне дослідження, що проводиться за допомогою звичайного екрана без підсилювача рентгенівського зображення, повинно застосовуватись тільки у виключних випадках.

Електрорентгенографія

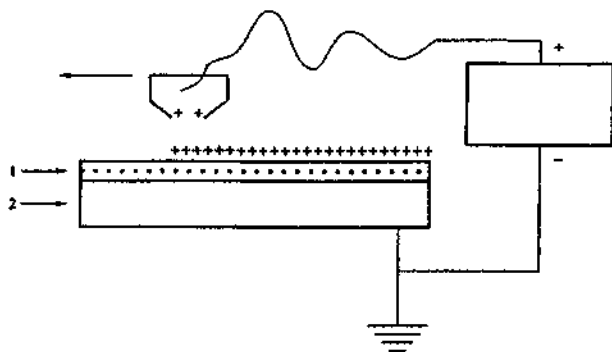


Рис. 9.16, а. Зарядка селенової пластини:

1 – шар напівпровідника; 2 – електропровідна пластина

У цьому методі реєстрація випромінювання, що пройшло через пацієнта, здійснюється фотопровідним шаром високоомного напівпровідника (селену, окису цинку тощо). Напівпровідник наноситься на провідну основу – підложку. Перед одержанням зображення шар напівпровідника – селенову пластину – “збуджують”, заряджаючи її іонами звичайно із коронного розряду в повітрі, а підложку заземлюють (рис. 9.16, а). У результаті на протилежних поверхнях селенової пластини з’являються заряди протилежних знаків (зверху +, знизу –), всередині пластини створюється електричне поле.

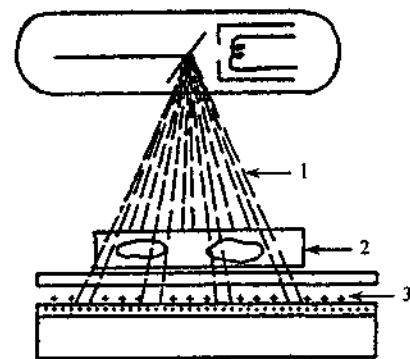


Рис. 9.16, б. Експонування: 1 – рентгенівські промені; 2 – об’єкт обстежень; 3 – ділянки селенового шару, де збереглася поляризація

При опроміненні такої пластини рентгенівськими променями в результаті фотопровідності селену зменшується опір шару, що спонукає до стікання нанесених на поверхню шару зарядів пропорційно освітленості. Заряди, що залишилися після експонування, утворюють приховане електричне зображення (рис. 9.16, б). Його можна візуалізувати двома способами:

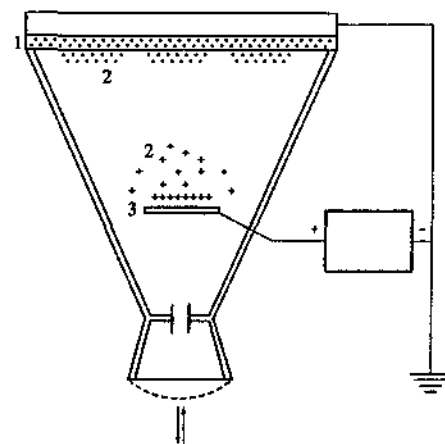


Рис. 9.16, в. Утворення електростатичного зображення: 1 – пластина селену; 2 – порошинки проявлюючої речовини; 3 – електрод

1 – такий: а) проявлення електрично зарядженим порошком (в сухому вигляді або у виді суспензії, див. рис. 9.16, в);

б) закріплення безпосередньо на шарі або переносу на папір і закріплення (рис. 9.16, з);

2 – шляхом безпосереднього електронного зчитування.

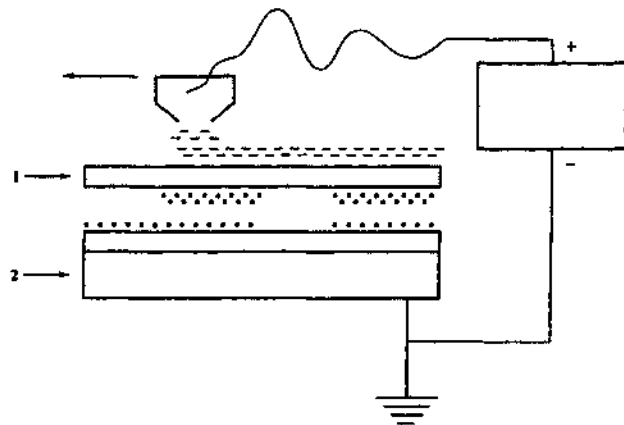


Рис. 9.16, з. Перенос зображення: 1 – папір, на який переноситься зображення; 2 – пластина селену

Метод відрізняється високою економічністю (використовується звичайний папір замість дорогої рентгенівської плівки), швидкістю отримання готового знімка (2–2,5 хв), зручністю роботи на світлі без спеціальної фотолабораторії. При використанні цього методу 1 м^2 селенових пластин заміняє понад 3000 м^2 рентгенівської плівки і тим самим звільняється для інших цілей 40–50 кг срібла і 60–90 кг дефіцитної фотографічної желатини.

Променеве навантаження на хворого при електрорентгенографії із застосуванням пластин СЕРП-100-150 таке ж, як і при звичайній рентгенографії. Розробка більш чутливих до рентгенівського випромінювання напівпровідникових матеріалів є дуже актуальною проблемою, яка дасть змогу знизити променеві навантаження.

Підсилювачі рентгенівського зображення

Рентгенівський електронно-оптичний підсилювач становить різновидність електронно-оптичного перетворювача (ЕОП). ЕОП – пристрій для перетворення зображення із однієї області спектра в іншу через побудову проміжного електронного зображення. В

рентгенівському ЕОП рентгенівське зображення перетворюється в електронне з наступним його перетворенням у світлове.

Схема пристрою найпростішого ЕОП для рентгенівського випромінювання зображена на рис. 10.17.

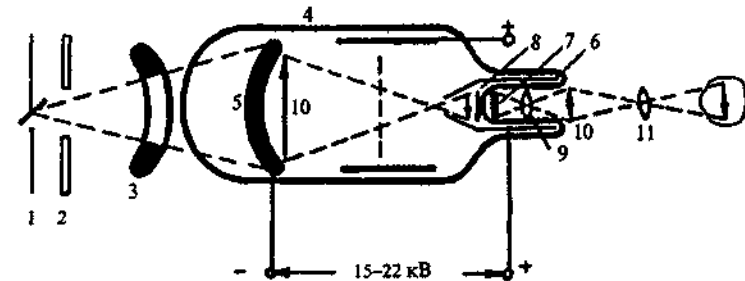


Рис. 9.17. Схема будови найпростішого ЕОП для рентгенівського випромінювання: 1 – рентгенівська трубка; 2 – діафрагма; 3 – об'єкт; 4 – скляний вакуумний балон; 5 – фотокатод; 6 – анод; 7 – захисне свинцеве скло; 8 – флуоресцентний екран; 9 – об'єктив; 10 – зображення; 11 – окуляр.

Рентгенівські промені від джерела 1 крізь діафрагму 2 проходять через об'єкт 3 і потрапляють на фотокатод 5. Фотокатод під дією цього випромінювання емітує (випускає) електрони. Кількість електронів, що випускає ця ділянка катода, пропорційна “засвічуванню” цієї ділянки рентгенівськими променями. Інтенсивніше засвічування – більше електронів. Таким чином, через фотокатод зображення об'єкта в рентгенівських променях перетворюється в електронне зображення. Електрони, що вилетіли з фотокатада, прискорюються електричним полем між катодом і анодом і проєктуються на флуоресцентний екран 8, де електронне зображення знову перетворюється на світлове. Останнє і спостерігається за допомогою оптичної збільшуваної системи 9, 11. Сучасні ЕОП мають три вихідних вікна: з дзеркальною оптикою, з телевізійною камерою і кінокамерою. ЕОП мають роздільну здатність 1–2 штрихи на 1 мм, їх використання при рентгеноскопії знижує дозу опромінення в 10–12 разів.

Рентгенотелебачення

Зображення з екрана ЕОП проєктується об'єктивом на фоточутливу поверхню передавальної телевізійної трубки, де воно перетворюється в електричні імпульси (відеосигнали).

Відеосигнали по провідниках (коаксіальних кабелях) подаються на вхід телевізора, на екрані якого видно зображення досліджуваної частини тіла або органа. Схема принципу рентгено-телевізійної установки наведена на рис. 10.18.

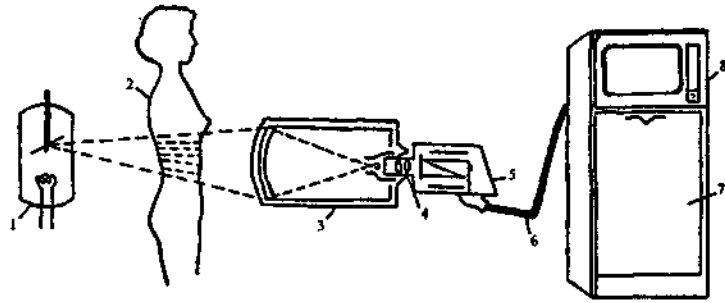


Рис. 9.18. Схема рентгено-телевізійної установки

Основними компонентами рентгено-телевізійної установки є: 1 – джерело рентгеновського випромінювання; 2 – об'єкт; 3 – ЕОП; 4 – проектуюча оптика; 5 – передавальна телекамера; 6 – кабель; 7 – приймальний пристрій; 8 – екран.

Застосування рентгено-телебачення зменшує дозу опромінення пацієнта в 15 разів порівняно з тією, яку дістають при проведенні звичайного просвічування, і в 3–5 разів менше порівняно з дозою, отриманою при просвічуванні за допомогою ЕОП. Час обстеження скорочується приблизно на чверть порівняно з часом звичайного дослідження завдяки достатньо високій яскравості та контрастності зображення.

Якщо до того ж врахувати, що при рентгено-телевізійному дослідженні зменшується кількість рентгеновських знімків, то сумарна доза опромінення при такому дослідженні зменшується в 25–30 разів порівняно із звичайною рентгеноскопією. Рентгено-телевізійне зображення можна сфотографувати, зняти на кіноплівку, записати на відеокасету.

9.5.2. Рентгенотерапія

Рентгеновське випромінювання здатне порушувати життєдіяльність клітин, особливо молодих і тих, що швидко розмножуються. Це робить опромінення найбільш небезпечним

для дітей і вагітних жінок. На цьому ж ґрунтується використання рентгеновського випромінювання для лікувальних цілей – рентгенотерапія. Рентгенотерапію проводять переважно для лікування поверхнево розміщених пухлин і при деяких інших захворюваннях. Ракова тканина гине при дозах опромінення, які менше пошкоджують навколишні нормальні тканини. При рентгенотерапії рентгеновські промені генеруються при напрузі на рентгеновській трубці 20–60 кВ і шкірно-фокусній відстані 3–7 см (короткодистанційна рентгенотерапія) або при напрузі 180–400 кВ і шкірно-фокусній відстані 30–150 см (дистанційна рентгенотерапія).

9.5.3. Рентгеновський структурний аналіз в медико-біологічних дослідженнях

Рентгеновський структурний аналіз – це метод дослідження атомної будови речовини шляхом експериментального вивчення дифракції рентгеновських променів в цій речовині.

Як відомо, рентгеновські промені – це електромагнітні хвилі довжиною порядку 10^{-10} м. Атоми в кристалах розміщені один від одного приблизно на такій же відстані, та й розмір (діаметр) атома того ж порядку. Падаючи на кристал, рентгеновські промені розсіюються атомами (вузлами) кристалічної решітки. Розсіяні рентгеновські промені інтерферують між собою так, що в одних напрямках виникають максимуми інтенсивності розсіяних хвиль, а в інших – спостерігається їх повне погашення. Це явище, що об'єднує розсіяння і наступну інтерференцію хвиль, називають дифракцією рентгеновських променів.

Як згадувалося в параграфі 9.4.1, Вульф і Брегг в 1913 р. запропонували розглядати явище дифракції як відбивання рентгеновських променів від атомних площин кристалу. Така інтерпретація дифракції чисто умовна і не пояснює природи явища, але вона спрощує його тлумачення. Розглядаючи дифракцію рентгеновських променів, як відбивання від атомних площин, Вульф і Брегг вивели формулу (9.33) – одне з основних співвідношень, що описують положення дифракційних максимумів.

Формула Вульфа-Брегга вказує на селективність (вибірковість) появи відбитих рентгенівських променів. Якщо для оптичних променів неперервно змінювати кут між дзеркалом і первинним променем, то відбитий промінь буде дуже мало змінювати свою інтенсивність. Для рентгенівських променів відбиті промені будуть поширюватися тільки при певних кутах ковзання θ (див. рис. 9.10). У цьому полягає різниця між відбиванням рентгенівських променів від атомних площин кристалу і відбиванням оптичних променів від дзеркала.

Після з'ясування просторової будови білка міоглобіну були отримані рентгенівські знімки кристалічних білків. Лауреат Нобелівської премії Д. Ходжкін провела рентгеноструктурний аналіз пеніциліну. Під її керівництвом була також визначена дуже складна просторова атомна структура білкового гормону – інсуліну. Рентгеноструктурні дослідження будови складних біологічно активних молекул кристалів дають змогу встановити зв'язок між біологічною функцією молекули і її будовою.

9.5.4. Променеві навантаження на медичний персонал при рентгенодіагностичних дослідженнях

Опромінення при рентгенологічних дослідженнях є одним з найбільш активних джерел променевого навантаження на людину. Біологічні зміни, що відбуваються в організмі людини при дії іонізуючого випромінювання, знаходяться в прямій залежності від кількості поглинутої енергії. Додаткове опромінення за рахунок рентгенологічних досліджень складає близько 70–90% фонового опромінення. Доведені генетичні наслідки, пов'язані з таким надфоновим опроміненням. Це заставляє шукати способи зниження рівня опромінення хворих і медичного персоналу, який проводить рентгенівські обслідування.

Перспективнішими способами рентгенологічного дослідження, при яких хворий і медичний персонал одержують порівняно невелику дозу іонізуючого випромінювання, є електронно-оптичне підсилення рентгенівського зображення і рентгено-телебачення. Це показали вимірювання потужності доз розсіяного випромінювання під час роботи на звичайних рентгенодіагностичних установках (УРДд-110), палатних

апаратах (РУ-725, "Хіракс"), а також на стаціонарних установках фірм "Філіпс", "Хірана", "Шеносо" і палатному пересувному апараті фірми "Філіпс", обладнаних ЕОП з різними коефіцієнтами підсилення яскравості свічення екрана, рентгено-телебаченням, рентгенокінокамерами.

Під час роботи в рентгенодіагностичних кабінетах лікар-рентгенолог і допоміжний персонал можуть піддатись дії двох основних видів опромінення – невикористаного випромінювання, що пройшло через тіло пацієнта, і розсіяного випромінювання, що утворюється в тілі хворого і на різних частинах апарата. Невикористане випромінювання – це така частина робочого пучка, яка не піддавалась в тілі досліджуваного ні істинному поглинанию, ні розсіянню. При рентгеноскопії на звичайній рентгенодіагностичній установці, коли хворий стоїть, рентгенолога досить добре захищає свинцеве захисне скло. Потужність дози на робочому місці лікаря-рентгенолога в цьому випадку складає 5 мР/год, тобто менше гранично допустимої дози 7 мР/год.

Розсіяне випромінювання поширюється в основному в бік. Допоміжний персонал, що знаходиться в кабінеті, може піддатися значному опроміненню розсіяним випромінюванням, так як воно проходить поза захисне скло. З усіх боків від хворого, де нерідко знаходиться допоміжний персонал, потужність дози становить 1000–1500 мР/год. Потужність дози в тому місці, де звичайно розміщуються лікарі і студенти, присутні при обстеженні хворого (за спиною лікаря-рентгенолога) складає 50–100 мР/год.

Під час роботи на рентгенодіагностичній установці, обладнаній ЕОП, потужність дози на робочому місці лікаря-рентгенолога при вертикальному положенні штатива зменшується в 10 разів. Відповідно знижується і потужність дози навколо хворого, однак вона все ж більша допустимої. При рентгеноскопії за допомогою ЕОП в горизонтальному положенні хворого потужність дози на робочих місцях лікаря і допоміжного персоналу становить 20–50 мР/год. Обов'язкове носіння захисних фартухів з еквівалентом

0,3 мм свинцю знижує потужність дози в 10 разів, тобто дозові навантаження стають допустимими і становлять 2–5 мР/год.

Променеві навантаження на персонал під час проведення рентгенотелевізійного просвічування залежать від того, який орган обстежується і від положення хворого (вертикальне, горизонтальне). Так, при дослідженні органів грудної клітини у вертикальному положенні хворого потужність дози на робочому місці лікаря-рентгенолога складає 1 мР/год, а біля хворого – 20 мР/год. При рентгенотелевізійному просвічуванні органів грудної клітки в горизонтальному положенні хворого потужність дози на робочому місці рентгенолога становить 7–50 мР/год. При дослідженні шлунку у вертикальному положенні хворого потужність дози на робочому місці рентгенолога 2–5 мР/год, при горизонтальному положенні хворого – 20–100 мР/год.

Значно збільшується потужність дози під час рентгенокінозйомки шлунку (напруга 75 кВ, сила струму 12 мА). На робочому місці рентгенолога при вертикальному положенні хворого вона рівна 100 мР/год, а навколо хворого – до 200 мР/год, при горизонтальному положенні хворого потужності доз на робочих місцях 500–2000 мР/год. Це викликано тим, що під час кінозйомки з ЕОП режим роботи рентгенівської трубки треба підсилити в кілька разів порівняно з режимом просвічування на електронно-оптичному підсилювачі.

З метою зниження дози опромінення рекомендується проводити кінозйомку безпосередньо з телеекрана і відеомагнітофонну реєстрацію. Під час роботи з ЕОП і рентгенотелебаченням необхідно використовувати захисні засоби із врахуванням характеру дослідження та вимагається спеціальний інструктаж медичного персоналу щодо дотримання вимог радіаційної безпеки.

Результати індивідуального дозиметричного контролю показали, що експозиційна доза коливається від 20 до 100 мР за місяць для (працівників) персоналу рентгенівських кабінетів. В поодиноких випадках вона досягає 200 мР за місяць. Індивідуальна дозиметрія дає змогу скласти повну радіаційну картину в рентгенкабінетах і розробити оптимальні захисні заходи.

Нині не оцінені належним чином фактори нерадіаційної природи: температурно-вологий режим, хімічний склад (пари ацетону, толуолу, вуглекислоти), іонізація повітря сучасних рентгенодіагностичних кабінетів, що можуть здійснювати суттєвий вплив на здоров'я персоналу при комбінованій дії з рентгенівським випромінюванням.

Ефективність радіаційного захисту персоналу підтверджується результатами дослідження тривалості життя медичного персоналу США і Великобританії. В США середня тривалість життя рентгенологів на п'ять років менша, ніж лікарів, що не піддавались професійному опроміненню. За даними, отриманими в 50–60 роки минулого століття, середній вік радіологів був 60,5 років, тоді як лікарів, що не піддавались щоденному опроміненню – 65,7 року, при проміжному ступені опромінення – 63,7 року.

Вивчення смертності радіологів Великобританії не виявило скорочення життя. Ця невідповідність між даними США і Великобританії пояснюється тим, що у Великобританії на 20 років раніше, ніж у США, почали застосовувати ретельно розроблені стандарти радіаційного захисту. Вважається, що сучасні методи радіаційного захисту зменшують до мінімуму небезпеку, яку несе професійне опромінення.

9.5.5. Деякі факти реакції крові на опромінення

При певних рентгенологічних дослідженнях (стравохід, шлунок, кишечник, органи грудної клітки і тазу) відбувається опромінення значної частини активного кісткового мозку. Розподіл активного кісткового мозку в скелеті дорослої людини наведено в табл. 9.5.

Експерименти на тваринах. В цих експериментах проводили одноразове опромінення експозиційною поверхневою дозою 5 Р, дворазове і триразове опромінення – по 5 Р і чотириразове опромінення – 5 + 5 + 5 + 25 Р. Повторне опромінення проводилось через місяць після попереднього. При експозиційних поверхневих дозах 5, 10, 15 і 40 Р поглинуті кістково-мозкові дози становили відповідно 9, 18, 27 і 72 Р.

Таблиця 9.5. Розподіл активного кісткового мозку

Частина скелету	Кістки	Кількість активного кісткового мозку, г	% загальної кількості активного мозку
Череп	Нижня щелепа	140,0	13,0
Плечовий пояс	Лопатки, ключиці верх і середина плечової кістки	85,0	8,0
	Шийні хребці	35,0	3,5
Грудна клітка	Грудина	25,0	2,5
	1–12 ребра	85,5	8,5
	Грудні хребці	150,0	14,0
Тазовий пояс	Поясничні хребці	115,0	11,0
	Хрестові хребці	150,0	14,0
	Кістки тазу, кобчик, верх і середина кістки стегна	270	26,0
Всього		1055,0	100,0

У результаті цитогенетичного аналізу клітин кісткового мозку встановлено, що починаючи з разової кістково-мозкової дози 9 *P* і більше при дрібному опроміненні відбувається стійка вірогідна зміна числа хромосомних аберацій, що може бути передвісником розвитку лейкозу. Тому не є випадковим вибір допустимої дози 2 *P/рік* (2 *бер/рік*) для осіб, які працюють з джерелами іонізуючих випромінювань.

Рентгенологічні обстеження людей. Діти проходили рентгенологічне обстеження з приводу природженого пороку серця (катетеризація серця), причому поверхнева експозиційна доза опромінення в області грудної клітки становила 30–40 *P*. Проводився аналіз клітин лімфоцитів периферійної крові цих дітей до і після рентгенологічного дослідження. До рентгенологічних обстежень тільки в окремих випадках були виявлені спонтанні хромосомні аберації. Після обстежень в усіх випадках з'явилися одноударні хромосомні зміни. Збільшення поглинутої

дози спонукає до збільшення хромосомних аберацій в лімфоцитах периферійної крові дітей: при опроміненні лімфоцитів периферійної крові в дозі 5 і 6 *рад* було помічено 0,16 % аберацій. При дозі 12 *рад* – 0,5 %, при дозі 24 *рад* 0,62 % аберацій.

Аналіз хромосомних аберацій в периферійній крові у дорослих, що проходили рентгенологічні обстеження органів грудної клітки, стравоходу і шлунку, показав, що при поверхневих експозиційних дозах 0,7 *P* і більше надлишок над контролем хромосомних аберацій складав відповідно від 3 до 11% при дослідженні стравоходу і шлунку. Таким чином, навіть при відносно малих дозах опромінення (0,7 *P*) під час рентгенологічних обстежень внутрішніх органів відбувається помітне збільшення числа хромосомних аберацій. Зв'язок між поверхневою експозиційною дозою D_0 і числом хромосомних аберацій x через 72 години після опромінення описується лінійним рівнянням такого типу:

$$x = 4,91 + 0,19 D_0 \text{ – для органів грудної клітки,}$$

$$x = 24 + 0,33 D_0 \text{ – для шлунку.}$$

Хромосомні аберації утворюються і в результаті дії інших, крім рентгенівських, іонізуючих випромінювань.

9.5.6. Опромінення малими дозами великих груп людей

Було проведено експериментальне вивчення хромосомних аберацій в лімфоцитах периферичної крові, викликаних опроміненням великих груп людей. Опромінення здійснювалось малими дозами – нижче 10 *рад*. Доведено наявність так званого плато (“насичення”) в залежності “доза-ефект” при дозах 3–300 *мГр* (рис. 9.19). Криві 1 і 2 на рис. 9.19 одержані незалежно різними авторами.

Таким чином, доведено наявність залишкового ефекту радіаційної дії у вигляді цитогенетичних змін в опроміненіх клітинах організму людини навіть при дуже малих дозах (0,1 *P* і менше). Це означає, що необхідно уважно відноситись до будь-якого додаткового опромінення людей.

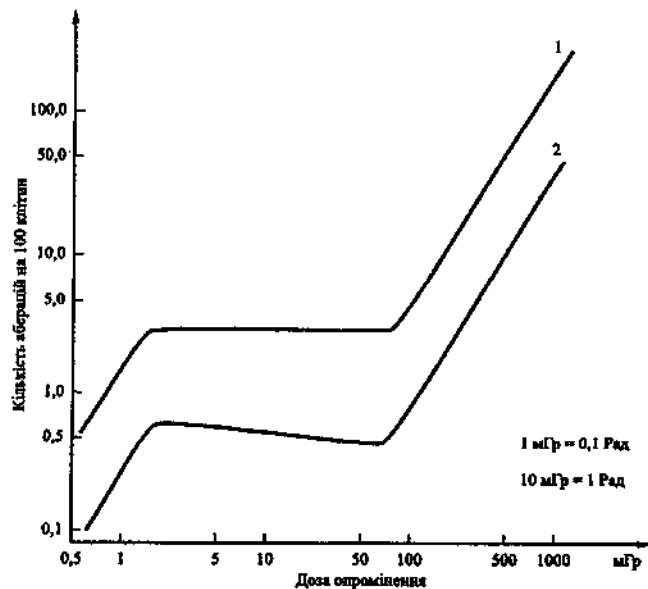


Рис. 9.19. Залежність кількості хромосомних аберацій у лімфоцитах периферичної крові людей від дози опромінення

Рентгенологічні дослідження пов'язані з ризиком виникнення додаткових випадків раку, тому передусім необхідно відмовитись від непотрібних обстежень, обирати такі умови й засоби обстежень, які спонукають до можливого мінімуму опромінення пацієнтів. Чим більше число обстежень припадає на осіб молодших 30 років, тим більша небезпека генетичних пошкоджень.

9.5.7. Латентний період – час виявлення в організмі порушень, викликаних радіацією

Період подвоєння числа клітин твердих пухлин становить 60–100 діб, тому для розвитку пухлини, що нараховує приблизно 10^9 клітин (нижча межа сучасних методів виявлення пухлини), потрібно 7–8 років. Якщо відсутні високочутливі методи виявлення пухлин, латентний період виявляється вищим від вказаного значення. В табл. 9.6 наведені наближені значення латентних періодів злоякісних пухлин деяких органів і тканин.

Таблиця 9.6. Середні латентні періоди злоякісних пухлин органів і тканин

Назва органа	T_d , роки
Активний кістковий мозок	12,5
Щитовидна залоза	10–20,5
Молочна залоза	15,5–22,5
Легені	24
Печінка	21,5

9.5.8. Проблеми ризику, пов'язаного із радіаційною дією

Практично всі види людської діяльності, включаючи використання іонізуючих випромінювань, пов'язані з певним ризиком. Допустимість ризику порівнюють з користю від відповідного виду діяльності. Від усіх видів злоякісних захворювань гине близько 13% населення. Смертність від злоякісних захворювань, викликаних всіма видами радіаційної дії, включаючи природний радіаційний фон і опромінення під час медичної діагностики, становить 0,15% загальної смертності. В масштабах країни це дає достатньо велику абсолютну величину ризику смертності.

Медичні рентгенологічні обстеження створюють близько 50% радіаційної дії на людину, включаючи природний радіаційний фон і штучні джерела радіації (без врахування радіаційного забруднення внаслідок аварії на Чорнобильській АЕС). Опромінення населення за рахунок медичної рентгенології в даний час пов'язане з великим ризиком появи віддалених наслідків опромінення. З цієї причини необхідно знижувати дозові навантаження на осіб, що проходять рентгенологічні дослідження. А ще краще розробляти і впроваджувати в життя методи діагностики, які дають ту ж саму інформацію, що і рентгенівські методи, але не іонізують тканини організму (наприклад, ультразвукові дослідження, ультразвукова голографія тощо).

Застосування рентгенівської діагностики дає змогу, на думку багатьох дослідників, щорічно врятувати коло 100 000 людських життів. Водночас внаслідок невиправданого опромінення збіль-

шується кількість злоякісних захворювань і генетичних пошкоджень, що призводить до втрати близько 30 000 життів щорічно. І поки не освоєні більш безпечні методи діагностики, що дають таку саму або більшу інформацію, використання рентгенівського випромінювання і іонізуючої радіації взагалі виправдане там, де користь від його застосування більша, ніж нанесена шкода.

9.6. КОМП'ЮТЕРНА ТОМОГРАФІЯ

Великим досягненням сучасної медицини є впровадження в практику методу комп'ютерної томографії. *Томографія* (від грецького *tomos* – шар і *графія*) – методика дослідження, під час якої можна робити пошарові знімки певної частини досліджуваного об'єкта (зокрема, певної частини тіла людини).

До найрозповсюдженіших методів комп'ютерної томографії слід віднести:

1. Рентгенівську томографію.
2. ЯМР-томографію, що спирається на явище ядерного магнітного резонансу.
3. Позитронну емісійну томографію (ПЕТ).

9.6.1. Рентгенівська томографія

Отримання пошарового знімку в методі рентгенівської томографії ґрунтується на переміщенні двох із трьох компонентів (рентгенівська трубка, рентгенівська плівка, об'єкт дослідження). Поширення дістала методика, при якій об'єкт нерухомий, а рентгенівська трубка і касета з плівкою узгоджено переміщуються в протилежних напрямках.

У рентгенівських томографах пацієнта “використовують” в ролі вісі, навколо якої обертають рентгенівську трубку і високочутливий детектор (приймач) рентгенівського випромінювання. Принцип одержання рентгенограм різних шарів показаний на рис. 9.20.

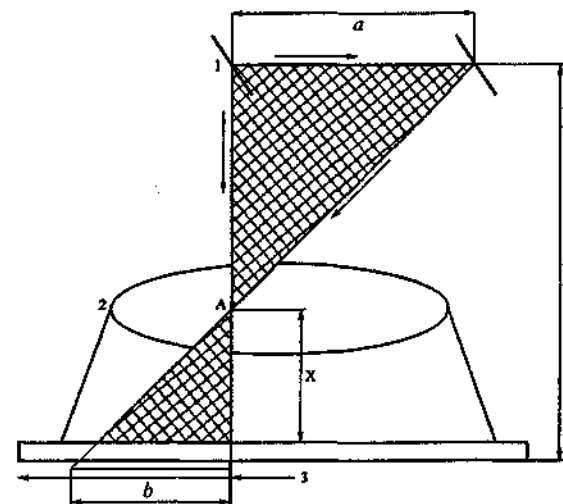


Рис. 9.20. Принцип рентгенографії

Рентгенівську трубку 1 і плівку (детектор) 3 зміщують в протилежні сторони так, щоб тінь шару, де знаходиться точка *A*, весь час падала на одне і те саме місце плівки. За час, поки трубка пройде відстань *a*, плівка повинна пройти відстань *b*. За цієї умови на плівці з'являється чітке зображення шару *A*. Тіні шарів, розміщених вище і нижче шару *A*, будуть рухатися швидше або повільніше плівки і тому “змажуться”. Глибину *x* залягання шару *A* визначають із подібності заштрихованих трикутників $a/b = (F - x)/x$, звідки $x = Fb/(a + b)$, де *F* – величина стала. Вимірюючи *a* і *b*, знаходимо *x*. Для отримання рентгенограми другого шару треба змінити відстань між трубкою, шаром і плівкою.

Якщо розмістити рентгенівську трубку і детектор на протилежних кінцях діаметра “бублика”, а в центрі (на осі “бублика”) розмістити певну частину тіла пацієнта, то при зміщенні “бублика” вздовж тіла можна дістати зображення поперечного перерізу тіла пацієнта. Використовуючи в ролі детектора рентгенотелебачення, “зрізи” тіла можна бачити на телевізійному екрані. Програмування роботи томографа за допомогою ЕОМ називають *комп'ютерною томографією*.

Комбінація рухомих рентгенівських трубок і детекторів-приймачів випромінювання дає змогу реєструвати за допомогою запису на магнітну плівку дуже велику інформацію, що характеризує поглинання (інакше кажучи, абсорбцію) рентгенівського випромінювання. Обробка цих результатів на ЕОМ дає можливість виявити таку різницю в густинах досліджуваного об'єкта (організму людини), яка недосяжна звичайному рентгенівському обстеженню.

Вперше технічну ідею методу комп'ютерної томографії запропонував нейрорентгенолог В. Олендорф (1961 р.). Він дав методику визначення рентгенологічної густини складних об'єктів з використанням рухомої рентгенівської трубки. Але перші експерименти пройшли без успіху. Честь розробки нового методу дослідження належить англійському інженеру Г. Хаунсфілду, який, очолюючи групу дослідників, створив в 1968 р. "прототип" комп'ютерного томографа, який одержав назву ЕМІ-сканер. Клінічну апробацію його провів з 1968 р. по 1972 р. Дж. Амброз у шпиталі Аткинсон Морлі (США). Перше офіційне повідомлення про застосування нового методу рентгенологічного дослідження було зроблено Хаунсфілдом і Амброзом 19 квітня 1972 р. на щорічному конгресі Британського інституту радіології. Вони отримали перше в світі чітке зображення пухлини, схованої глибоко всередині незайманого людського мозку.

Рентгенівський томограф зробив революцію в діагностиці і лікуванні різних захворювань. За допомогою томографії досліджують трахею, бронхи, судини, виявляють запалення в легенях, камені нирок, жовчного міхура, жовчних протоків, пухлини мозку, надниркових залоз і органів сечостатевої системи тощо.

Доза опромінення при рентгенівській комп'ютерній томографії тіла не більша, ніж при звичайному рентгенівському дослідженні. Одноразове обстеження за допомогою комп'ютерної томографії дає на тіло людини дозу близько 2 рад, тоді як рентгеноскопія шлунку – дає одномоментно 30–40 рад. При цьому у обстежених не відзначалося підвищення частоти ракових захворювань.

У 1978 році Хаунсфілд і Маккормік отримали Нобелівську премію за впровадження рентгенівського томографа в медицину.

Технічні основи роботи рентгенівського комп'ютерного томографа. Суть рентгенівської комп'ютерної томографії можна сформулювати таким чином: на спеціальній круговій рамі закріплені рентгенівська трубка і два чутливих сцинтиляційних детектори з кристалічного натрію, направлені в бік трубки. Поміж трубкою і детекторами знаходиться об'єкт дослідження. Колімований (тобто паралельний) пучок рентгенівських променів типово перерізом 3×13 мм проходить через нерухомий об'єкт дослідження. При лінійному переміщенні трубки вздовж скануючої (досліджуваної) площини 160 разів проводиться реєстрація фотонів рентгенівського випромінювання, які пройшли через об'єкт. Потім система трубка-детектори повертається на 1° і знову проводиться сканування і так доти, доки не пройдуть всі 180° . При цьому з кожного детектора реєструється 28800 (180×160) показів, які фіксуються або на магнітній стрічці, або на магнітному диску і обробляються комп'ютером. Ширина досліджуваного шару в даній системі становить 13 мм.

Реконструкція рентгенологічної картини здійснюється на підставі оцінки інтенсивності рентгенівського випромінювання, яке реєструється кожним детектором. А величина реєструючої інтенсивності визначається поглинанням рентгенівських променів тими матеріалами, через які вони проходять.

Зображення відображається у формі матриці, що має 80×80 полів розміром 3×3 мм. Кожне із 6400 полів характеризує величину випромінювання, поглинутого ділянкою тканини розміром $3 \times 3 \times 13$ мм (117 мм³). Назвемо його як елемент тканини. Кожний такий елемент має свій номер і свій коефіцієнт поглинання. Останній обчислюється цифровим комп'ютером з точністю до 0,5% і відтворюється спеціальним друкуючим пристроєм.

Поряд з вивченням коефіцієнта поглинання в чисельному вигляді є й інші методи обробки одержаної інформації:

1) одержують безпосереднє зображення об'єкта на екрані електронно-променевої трубки. При цьому аналоговий комп'ютер видає на екран осцилоскопа величину поглинання рентгенівського випромінювання кожною точкою досліджуваного шару, перетворену у відповідну градацію яскравості. Найчастіше

відтворюються 16–20 градацій сірого зображення об'єкта, яке розрізняє око людини.

2) для фіксації досліджуваної ділянки об'єкта використовується рентгенографія зображення апаратом типу "Поляр-ройд".

Комплекс рентгенівського комп'ютерного томографа, що призначений для досліджень як головного мозку, так і інших органів тіла людини, включає сім основних блоків:

1 – стіл для хворого, пульт керування і кругова рамка з рентгенівською трубкою і детекторами; 2 – центральний пульт управління; 3 – генератор рентгенівського випромінювання; 4 – пристрій для обробки інформації; 5 – пристрій для відтворення зображення; 6 – система охолодження (кондиціонер); 7 – високовольтний трансформатор.

В апаратах типу *Delta* для дослідження як черепа, так і інших органів тіла людини, що випускаються з 1975 року у США, використовується інший принцип сканування – пучок променів рентгенівської трубки розділяється коліматором на кілька пучків, які реєструються більшою кількістю (до 30) детекторів. Зміщення такої системи при кожному скануванні становить 10–18°, що скорочує час дослідження до 18 с, і таким чином робить можливою затримку дихання лише на даний період. Таке доступне більшості досліджуваних хворих. Такі апарати відносяться до другого покоління комп'ютерних томографів.

У комп'ютерних томографах третього покоління використано новий принцип. Широкий пучок рентгенівського випромінювання охоплює весь об'єкт і реєструється комплексною системою ксенонових детекторів (до 256) з використанням лише обертового руху трубки. У деяких випадках використовують принцип паралельного обертання трубки і детекторів, що скорочує час обстеження до 5–6 с (апарати *General Electric CT/T, CT/M, Varian*).

Оскільки при дослідженні черепа необхідне високе контрастне і хороше просторове розділення, то для цього краще використати комп'ютерні томографи перших двох поколінь. Під час дослідження всього тіла ще необхідно і малий час процедури, тому в такому випадку використовують комп'ютерні томографи третього покоління.

Для удосконалення наявних комп'ютерних томографів впроваджують матриці розміром 160×160 мм, що дає змогу реєструвати дозу опромінення, яка поглинається значно меншим об'ємом тканини. Прагнуть одержати кольорове зображення, поліпшити його якість. Збільшують кількість показів, що знімають з детекторів – вона зросла з 28800 на перших моделях до 80000–324000 на сучасних апаратах. Розробляються і впроваджуються принципово нові типи комп'ютерних томографів, зокрема надшвидкі моделі, та моделі, в яких застосовано принцип позитронно-емісійного сканування (див. нижче), а також апарати, де поєднується принцип комп'ютерного томографа з вимірюванням концентрації радіоактивних ізотопів в організмі.

Можливості методу рентгенівської комп'ютерної діагностики. Метод рентгенівської комп'ютерної томографії має високу роздільну здатність для м'яких тканин, що дає змогу виявити патологічні зміни м'яких тканин, які не реєструються іншими методами рентгенодіагностики.

Рентгенівське зображення при комп'ютерній томографії одержують завдяки тому, що різні тканини тіла людини мають неоднаковий коефіцієнт поглинання рентгенівських променів. Під час дослідження будь-якого органа або тканини їх патологічні зміни можуть проявитися або ділянками з великим коефіцієнтом поглинання (пухлини, кальцинати), або з малим коефіцієнтом поглинання (зони деструкції), або чергуванням зон більшої і меншої густини. Деякі захворювання можуть не супроводжуватись суттєвими змінами густини порівняно зі здоровою тканиною, але виявляються шляхом збільшення органа, його деформацією, зміщенням прилеглих структур тощо.

У нормальних умовах коефіцієнт поглинання різних тканин головного мозку коливається в межах до 4 %. Оскільки точність вимірювання апаратом становить 0,5 %, то в середині зони 4 % утворюється вісім рівнів інтенсивності, які характеризують варіанти сірого зображення. Дослідження коефіцієнта поглинання головного мозку показали, що для кори головного мозку він дорівнює 19–20 умовних одиниць, білої речовини – 13–17, церебрально-спинальної рідини – 0–7, циркулюючої крові – 13–23, кальцію – 20–200. Завдяки цьому на різних рівнях зрізів добре

видно різні ділянки головного мозку і ліквормістких просторів. Для аналізу цієї картини необхідно добре знати рентгеноанатомію головного мозку.

Для збільшення контрастності – “підсилення” зображення при комп’ютерній томографії у вену вводять 20–40 мл *sodium iothalamate* і повторно сканують через 5, 10, 15, 20 хвилин. При цьому спостерігається значне збільшення густини багатьох патологічних утворень і, як наслідок, збільшення роздільних можливостей методу. Методику “підсилення” в даний час використовують більш ніж у 60% хворих. Кількість інших типів контрастної речовини, яку вводять людям під час обстеження, змінюється від 50–100 мл 60%-го ренографіну до 300–600 мл метилглюкатуіну або гіпаку.

Чому поява в організмі контрастної речовини “підсилює” зображення? Методами радіоізотопного дослідження було показано, що контрастна речовина зосереджується в зонах пошкоджень. Контрастна речовина утворює із протеїнами плазми великі комплексні молекули. Теоретично можливі кілька механізмів входження їх у тканину мозку: пасивна дифузія, активний транспорт та ін.

Щодо променевих навантажень хворих при рентгенівській комп’ютерній томографії, то слід зазначити таке. Уже в 1973 р. рентгенівська комп’ютерна томографія проводилась при режимі рентгенівської трубки: $U_a = 120\text{--}140\text{ кВ}$, $I_a = 28\text{--}33\text{ мА}$. Поглинута доза при обстеженні головного мозку коливалася в межах 1–2,5 рад, тобто менша, ніж при звичайному знімку черепа. Так, Коллард показав, що інтегральна доза для двох комп’ютерних томограм у три рази менша, ніж для звичайної рентгенограми черепа. При комп’ютерній томограмі всього тіла Сагел із співробітниками показали, що поверхнева поглинута доза була 3 рад, а глибока 1–3 рад. Маршалл із співробітниками виявили, що поверхнева доза на шкірі не перевищувала 3–8 рад.

9.6.2. ЯМР-томографія

В основі ядерно-магніто-резонансної томографії (ЯМР-томографії) лежить явище ядерного магнітного резонансу (ЯМР), яке було описане в розділі 8. Як виявляється, система протонів ядра, які знаходяться у зовнішньому магнітному полі з індукцією B , може резонансно поглинати енергію високочастотного електромагнітного поля з частотою ν_p , що лежить в радіодіапазоні (частіше за все в НВЧ-діапазоні).

За умовою резонансу (8.26) резонансна частота ν_p прямо пропорційна індукції B магнітного поля і може змінюватися в досить широких межах. Це явище дає дуже цінну інформацію щодо просторового розподілу ядер в певному об’ємі, що знаходиться у магнітному полі.

На рис. 9.21 наведена блок-схема магнітно-резонансного томографа.

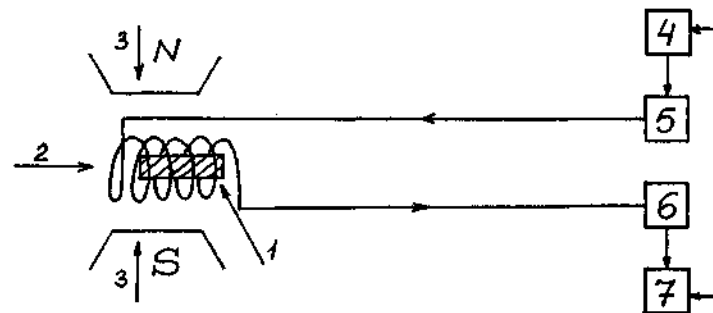


Рис. 9.21. Блок-схема ЯМР-томографа: 1 – досліджуваний об’єкт; 2 – котушка (соленоїд); 3 – магніт; 4 – імпульсний генератор; 5 – радіочастотний передавач; 6 – приймач; 7 – комп’ютер

Спрощений принцип роботи ЯМР-томографа можна пояснити так: на біооб’єкт 1, вміщений в котушку 2 і в магнітне поле 3, діють імпульсами від генератора 4. Ці імпульси через радіочастотний передавач 5 діють на біооб’єкт, в якому внаслідок явища магнітного резонансу протони відгукуються відповідним сигналом, поглинаючи енергію радіочастотного електромагнітного поля. Цей сигнал протонного магнітного резонансу (ПМР), який є частинним випадком ЯМР, вимірюється прий-

мачем 6 і подається на комп'ютер 7, який обробляє сигнал і одночасно визначає режим роботи генератора радіоімпульсів 4.

Важливими завданнями, пов'язаними з практичною реалізацією метода ЯМР-томографії є: 1) створення необхідної конфігурації магнітного поля; 2) відновлення (візуалізація) зображення досліджуваного біооб'єкта.

Для вирішення першого завдання досліджуваній об'єкт вміщується в магнітне поле, індукція якого лінійно змінюється в якомусь (одному, двох, а частіше за все – в трьох взаємно перпендикулярних напрямках. В такому випадку говорять про лінійний градієнт магнітного поля, для якого зміна індукції B з координатою x відбувається за законом

$$B(x) = B_0 + ax, \quad (9.43)$$

де $a = dB/dx = const$ – стала величина, яка характеризує градієнт магнітного поля; B_0 – певне значення індукції, що досягається всередині досліджуваного об'єкта (рис. 9.22). Вертикальні лінії умовно зображують витки котушки, через яку пропускається струм, що створює магнітне поле.

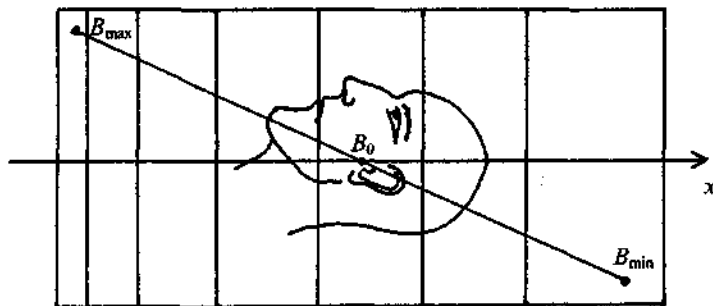


Рис 9.22. Конфігурація магнітного поля в методі ЯМР-томографії

Як відомо (див. розділ 3), добуток сили струму I на кількість витків n , що припадають на одиницю довжини котушки, визначає індукцію B на осі такого соленоїда ($B \sim I \cdot n$). Зрозуміло, що можна накрутити металевий дріт таким чином, щоб кількість витків n і відповідно індукція B змінювались лінійно вздовж осі x , забезпечуючи тим самим виконання залежності (9.43). Оскільки магнітне поле змінюється в напрямку x , то на підставі умови

резонансу (8.26) буде в цьому напрямку змінюватися і резонансна частота ν_p . Далі, враховуючи той факт, що площа під кривою поглинання в спектрі ПМР визначає кількість протонів, що входять до складу ядер певних хімічних елементів, можна отримати просторовий розподіл густини протонів (тобто атомних ядер) вздовж осі x . Таким способом отримують одновимірну проекцію біооб'єкта.

Вирішення другого завдання – відновлення об'ємного зображення – стало можливим завдяки роботам П.Лаутербурга та інших вчених, які використали для цього так званий метод відновлення за проекціями. Суть цього методу полягає в отриманні багатьох одновимірних проекцій досліджуваного об'єкта. Це досягається зміною напрямку градієнта індукції магнітного поля за рахунок зміни сили струму в трьох взаємно перпендикулярних котушках (соленоїдах). На відміну від рентгенівської томографії такий метод дає змогу виключити механічні переміщення досліджуваного біооб'єкта або апаратурних частин томографа.

Ще одна особливість методу комп'ютерної томографії полягає у можливості отримання інформації (зображень) від тонких шарів тривимірного біооб'єкта. В методі ЯМР-томографії це досягається двома способами:

1) за рахунок використання спеціальної математичної обробки зображень (зокрема, так званого перетворення Родона і тривимірних Фур'є-перетворень);

2) за рахунок вибіркового (селективного) збудження тонкого шару біооб'єкта.

Слід зазначити, що на сигнал (точніше кажучи, на співвідношення сигнал-шум) в ЯМР-томограмах впливає не тільки густина протонів, а й ціла низка внутрішніх та зовнішніх факторів (температура, склад тканин, діаманітні, парамагнітні та феромагнітні домішки, параметри апаратури, специфічні особливості комп'ютерних програм тощо). Змінюючи ці фактори (наприклад, параметри послідовності радіочастотних імпульсів), можна досягти суттєвого покращання контрасту зображення в методі ЯМР-томографії. Цей метод знаходить дедалі ширше застосування в медицині завдяки таким його перевагам, як

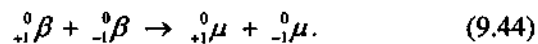
відсутність дозових навантажень (порівняно з рентгенівськими томографами) та можливість отримання контрастних зображень з метою ефективності діагностики різних патологій.

9.6.3. Позитронна емісійна томографія

Принцип позитронної емісійної томографії (ПЕТ) базується на явищі анігіляції електрона і позитрона, тобто частинки та античастинки. Реакція, що характеризує це явище, вже згадувалася раніше і має такий вигляд: ${}_{-1}^0\beta + {}_{+1}^0\beta \rightarrow \gamma + \gamma$. Схематично ця реакція зображена на рис. 9.23.

Реакція анігіляції пари електрон-позитрон була відкрита в 1933 р., вже через рік після експериментального відкриття позитрона в космічних променях. Сам термін “анігіляція” в перекладі з латинської мови означає “зникнення, перетворення в ніщо”. Звичайно, цей термін в буквальному його розумінні є невірним, оскільки при взаємодії частинки та античастинки, зокрема електрона ${}_{-1}^0\beta$ і позитрона ${}_{+1}^0\beta$, виконуються всі фундаментальні закони природи – закони збереження енергії, імпульсу, електричного заряду, спіна тощо. При цьому матерія не зникає і лише перетворюється в інші її види, а саме – у фотони електромагнітного випромінювання γ -діапазону або γ -кванти. Слід зазначити, що через закон збереження так званої зарядової парності при зникненні (анігіляції) електрона і позитрона, які мають нульовий сумарний спін, може виникнути лише парне число γ -квантів (частіше за все їх буде два).

При відносно низьких енергіях пари частинка-античастинка процес анігіляції супроводжується народженням більш легких частинок. Прикладом такої реакції анігіляції є саме реакція з утворенням двох γ -квантів, оскільки маса спокою γ -кванта дорівнює нулю. У протилежному випадку, тобто при значних енергіях, легкі частинка-античастинка можуть анігілювати з утворенням пари більш важких частинки-античастинки. Прикладом подібної реакції є наступна реакція утворення з електрона і позитрона двох мезонів:



Мезони (цей термін означає “проміжний, середній”) мають маси спокою, які знаходяться між масою спокою електрона ($m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг або в енергетичних одиницях $E_0 = m_0 c^2 \approx 0,51$ MeV) та масами спокою протона і нейтрона ($m_0 \text{ прот} \approx m_0 \text{ нейтр} \approx 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг, $E_0 \text{ прот} = 938,2$ MeV, $E_0 \text{ нейтр} = 939,5$ MeV). Так, для π -мезонів маса спокою (в енергетичних одиницях) становить $E_0 = m_0 c^2 \approx 140$ MeV, тобто приблизно в 275 разів більша за масу спокою електрона і в 6,7 раза менша за масу спокою протона. Складні процеси перетворення частинок, подібні до реакції (9.44), вивчає сучасна теорія сильних ядерних взаємодій – квантова хромодинаміка.

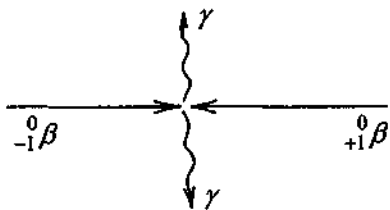
Суть методу ПЕТ можна сформулювати таким чином: насамперед, на спеціальних пристроях виробляються радіоактивні ізотопи, які мають досить короткий період напіврозпаду $T_{1/2}$ (типово $T_{1/2} \approx$ кілька годин). Частіше за все це є ізотопи так званих “автентичних елементів” (кисню, азоту, вуглецю) – тих елементів, що містяться в тілі людини. Так, наприклад, у відділенні медичної фізики Університету Вісконсін-Медісон (США) для реалізації методу ПЕТ використовують ізотопи ${}^{15}_8\text{O}$ та інші, які виробляються на циклотроні¹. Як згадувалось раніше, для радіоактивних ізотопів подібних легких ядер, де кількість протонів і нейтронів в ядрі приблизно однакова, є притаманним позитронний β -розпад, внаслідок якого з атомного ядра випромінюється позитрон.

Наступний етап методу ПЕТ полягає в тому, що короткоживучі ізотопи, нароблені на циклотроні або іншій спеціальній апаратурі, дуже швидко переправляються у шпиталі (як правило, до відділень радіаційної онкології). Тут ці препарати вводяться в пухлину, де позитрони анігілюють з електронами. Внаслідок реакції анігіляції народжуються два фотони (γ -кванти) з енергією 511 keV кожний. Згідно з законом збереження імпульсу, обидва γ -кванти розлітаються під кутом 180° стосовно один до одного

¹ Один з авторів (О.В. Чалий) вдячний колективу відділення медичної фізики Університету Вісконсін-Медісон на чолі з професором П. Делука за гостинність під час виконання дослідницького проекту за Міжнародною програмою академічних обмінів імені Фулбрайта.

(див. рис. 9.23). Саме ця обставина використовується для їх виявлення (детектування) за допомогою електротехнічної схеми збіжності та подальшої візуалізації об'єкта дослідження, де відбулися акти анігіляції пар електрон-позитрон, за допомогою спеціальних комп'ютерних програм.

Рис. 9.23. Реакція анігіляції електрона і позитрона: дві прями зустрічні лінії позначають зіткнення пари електрон ${}_{-1}^0\beta$ і позитрон ${}_{+1}^0\beta$, а дві хвилясті лінії – два γ -кванти, що розлітаються під кутом 180°



Метод ПЕТ дає змогу отримувати дуже корисну і точну інформацію щодо процесів, що відбуваються в головному мозку людини та в інших органах при діагностиці нейропсихічних порушень, під час вивчення досить тонких особливостей діяльності центральної нервової системи тощо. Сучасні модифікації методу ПЕТ використовують нові радіоактивні ізотопи (наприклад, позитронно-активний ізотоп фтору ${}_{9}^{18}\text{F}$ з періодом напіврозпаду $T_{1/2} \approx 107$ хвилин). За його допомогою в Університеті Вісконсін-Медісон було отримано, зокрема, ПЕТ-зображення розподілу флуоридіоксіглюкози [${}_{9}^{18}\text{F}$] ФДГ у головному мозку людини. Цей розподіл дає змогу зробити висновки щодо процесів засвоєння глюкози і є чудовим індикатором необхідних енергетичних потреб головного мозку людини. На рис. 9.24 наведені два зображення головного мозку, що накладені одне на друге. Вони отримані у відділенні медичної фізики Університету Вісконсін-Медісон за допомогою кореляції методів ПЕТ і ЯМР-томографії. При цьому ПЕТ дає кращу інформацію щодо процесів метаболізму, тоді як ЯМР-томографія дає змогу детально вивчати анатомічні особливості досліджуваного біооб'єкта.

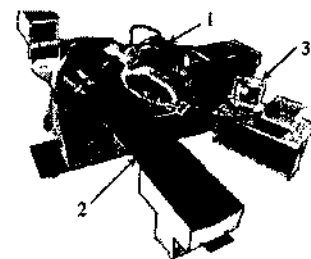


Рис. 9.24. Зображення головного мозку людини, отримане за допомогою методів ПЕТ і ЯМР-томографії

Слід підкреслити, що Нобелівську премію з медицини у 2003 році отримали П.Лотербург (США) та П.Менсфілд (Велика Британія) за досягнення в галузі магнітно-резонансної томографії. Як зазначається в рішенні Нобелівського комітету, цей метод дозволяє неінвазивно вивчати внутрішні органи людини і, на відміну від рентгенівських променів, які використовуються у звичайній комп'ютерній томографії, є абсолютно безпечним для людини. Магнітно-резонансна томографія базується на властивості атомів водню в різних хімічних з'єднаннях по-різному реагувати на магнітне поле. Лотербург і Менсфілд розробили методи перетворення цієї "реакції" у 2-вимірне зображення, аналізуючи електромагнітне випромінювання ядер водню. Лотербург став першим, хто виявив можливість створення 2-вимірних зображень на основі такого випромінювання, а Менсфілд розробив методи математичного перетворення, завдяки яким стало можливим отримувати зображення гарної якості в короткі проміжки часу. На сьогоднішній день у світі використовується близько 20 тисяч магнітно-резонансних томографів, за допомогою яких проведено більше 60 млн обстежень. Особливо корисним є застосування магнітно-резонансної томографії для обстежень суглобів, мозку та ракових пухлин.

У закінченні цього параграфа зазначимо, що в Україні завдяки спільним зусиллям вчених та інженерів Національного медичного університету імені О.О. Богомольця, Інституту монокристалів НАН України (м. Харків) та Спеціального конструкторського бюро СКТЬ-Оризон (м. Суми) розроблені та вже

втілені в медичну практику оригінальні вітчизняні емісійні комп'ютерні томографи типу ГКС-301Т (рис. 9.25).

Цей емісійний комп'ютерний томограф складається з таких основних частин: 1 – позитронно-чутливий детектор μ -квантів; 2 – ліжка пацієнта, переміщення апаратури стосовно якого керується спеціальною комп'ютерною програмою; 3 – система для отримання, обробки та візуалізації радіологічної інформації. Об'єктивні характеристики комп'ютерного томографа ГКС-301Т демонструють той факт, що цей вітчизняний томограф не поступається, а по деяких параметрах переважає подібні закордонні зразки томографів, що виготовлені відомими фірмами Siemens, Picket, Trionix та ін.

9.7. ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ “РЕНТГЕНІВСЬКЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ, ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ”

Мета заняття: Вивчити природу, механізм і засоби отримання рентгенівських променів, взаємодію рентгенівського випромінювання з речовиною, використання рентгенівського випромінювання в медицині.

Контрольні питання для підготовки до заняття

1. Поняття і властивості рентгенівського випромінювання.
2. Отримання рентгенівського випромінювання. Рентгенівська трубка.
3. Гальмівне випромінювання. Спектр гальмівного випромінювання, його короткохвильова границя.
4. Потік рентгенівського випромінювання.
5. Характеристичне рентгенівське випромінювання. Серії характеристичного спектра.
6. Взаємодія рентгенівського випромінювання з речовиною.
7. Закон послаблення потоку рентгенівського випромінювання.
8. Використання рентгенівського випромінювання в медицині.

Приклади задач та їх розв'язки

Задача №1

Електрон рухається зі швидкістю $v = 10^6$ м/с. В результаті гальмування електрона в електричному полі атома він зупиняється і випускає один фотон. Визначити енергію електрона (в еВ) та довжину хвилі світлового кванта.

<p>Дано:</p> $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг $v = 10^6$ м/с $\lambda = ?$ W – ?	<p>Розв'язок</p> $\frac{m^2 v}{2} = \frac{hc}{\lambda}, \lambda = \frac{2hc}{m v^2};$ $\lambda = \frac{2 \cdot 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{12}} = 4,4 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 440 \text{ нм};$
---	---

$$W = m v^2 / 2 = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{12}}{2} = 4,5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = \frac{4,5 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,8 \text{ еВ}.$$

Задача №2

Знайти короткохвильову границю гальмівного рентгенівського випромінювання (частоту і довжину хвилі) для напруги $U = 2$ кВ. У скільки разів енергія фотонів цього випромінювання більша за енергію фотона, що відповідає $\lambda = 760$ нм (червоне світло)?

<p>Дано:</p> $U = 2$ кВ $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с $\lambda_{\min} = ?$ $\frac{W}{W_{\phi}} = ?$	<p>Розв'язок</p> $\lambda_{\min} = hc/eU = \frac{1,24}{U(\text{кВ})} \text{ нм} = 0,62 \text{ нм};$ $\lambda_{\min} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^3} = 6,2 \cdot 10^{-10} \text{ м};$ $W = eU = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 3,2 \cdot 10^{-16} \text{ Дж} = 2 \text{ кеВ};$
--	--

$$W_{\phi} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{760 \cdot 10^9} = 2,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,63 \text{ еВ};$$

$$\frac{W}{W_{\phi}} = \frac{2 \cdot 10^3}{1,63} = 1227.$$

Задача №3

Знайти потік рентгенівського випромінювання при $U = 10$ кВ, $I = 1$ мА. Анод виготовлений з вольфраму. Скільки фотонів в секунду відповідає цей потік, якщо припустити, що випромінюється електромагнітна хвиля, довжина якої дорівнює 3/2 довжини хвилі, що відповідає короткохвильовій границі спектра гальмівного рентгенівського випромінювання?

<p><i>Дано:</i> $U = 10^4 \text{ В} = 10 \text{ кВ}$ $I = 10^{-3} \text{ А}$ $Z = 74$</p>	<p><i>Розв'язок</i> Потік рентгенівського випромінювання $\Phi = \kappa U^2 I \cdot Z$, де $\kappa = 10^{-9} \text{ Вт/В}^2 \text{ А}$.</p> <p>$\Phi = 10^{-9} \cdot 10^8 \cdot 10^{-3} \cdot 74 = 74 \cdot 10^{-4} \text{ Вт}$.</p>
---	---

Короткохвильова границя спектра гальмівного рентгенівського випромінювання

$$\lambda_{\min} = \frac{1,24}{U(\text{кВ})} \text{ (нм)}$$

$$\lambda = \frac{3}{2} \lambda_{\min} = \frac{3}{2} \frac{1,24}{U(\text{кВ})} \text{ (нм)} = 0,186 \text{ нм}$$

Потужність (потік) випромінювання одного рентгенівського фотона

$$\Phi_1 = \frac{hc}{\lambda t} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,186 \cdot 10^{-9}} = 10,7 \cdot 10^{-16} \text{ Вт}$$

Загальна кількість фотонів

$$N = \frac{\Phi}{\Phi_1} = \frac{74 \cdot 10^{-4}}{10,7 \cdot 10^{-16}} = 6,9 \cdot 10^{12} \frac{\text{фотонів}}{\text{с}}$$

Контрольні запитання та завдання для самостійної роботи

- Що являють собою рентгенівські промені?
- Який спектр має рентгенівське випромінювання?
- Як визначити короткохвильову границю гальмівного рентгенівського випромінювання при заданій напрузі $U = 10^2 \text{ кВ}$?
- Як визначити потік рентгенівського випромінювання? Чому дорівнює цей потік, якщо анод (дзеркальце антикатада) виготовлене з молібдену, а $U_1 = 75 \text{ кВ}$, $I = 0,5 \text{ А}$?
- Які первинні механізми взаємодії рентгенівського випромінювання з речовиною?
- За яким законом можна визначити послаблення рентгенівського випромінювання?

- Знайти товщину шару половинного послаблення алюмінію для рентгенівських променів деякої довжини хвилі, якщо відомо, що масовий коефіцієнт поглинання алюмінію для цієї довжини хвилі дорівнює $5,3 \text{ м}^2/\text{кг}$. Густина алюмінію $2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

9.8. ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ “РАДІОАКТИВНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ ТА ЙОГО ДІЯ НА БІООБ’ЄКТИ”

Мета заняття: вивчити природу радіоактивного випромінювання та механізми його дії на біооб’єкти.

Контрольні питання для підготовки до заняття

- Види і властивості радіоактивного випромінювання.
- Основний закон радіоактивного розпаду, постійна розпаду, період напіврозпаду.
- Первинні механізми взаємодії радіоактивного випромінювання з речовиною.
- Фізико-хімічні механізми радіаційних пошкоджень та біологічна дія іонізуючого випромінювання.
- Застосування радіоактивного випромінювання в медицині

Приклади задач та їх розв’язки

Задача №1

Тіло, що має масу $m = 60 \text{ кг}$, протягом $t = 6 \text{ год}$ поглинуло енергію $W = 1 \text{ Дж}$. Знайти поглинену дозу і потужність поглиненої дози в одиницях СІ і у позасистемних одиницях.

<p><i>Дано:</i> $W = 1 \text{ Дж}$ $m = 60 \text{ кг}$ $t = 6 \text{ год}$</p>	<p><i>Розв'язок</i></p> <p>$D_{\text{п}} = \frac{W}{m} = 1 \text{ Дж} / 60 \text{ кг} = 0,0167 \text{ Гр} = 1,67 \text{ рад}$.</p> <p>$P_{\text{п}} = \frac{D_{\text{п}}}{t} = \frac{0,0167}{6 \cdot 3600} = 0,77 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/кг} =$ $= 0,77 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с}$.</p>
--	--

Задача №2

В 10 г маси тканини поглинається 10^9 α -частинок з енергією $W_1 = 5$ MeV. Знайти поглинену і еквівалентну дози. Коефіцієнт якості (відносну біологічну ефективність) для α -частинок прийняти рівним $\kappa = 20$.

<p>Дано:</p> <p>$m = 10$ г</p> <p>$n = 10^9$</p> <p>$W_1 = 5$ MeV</p> <p>$\kappa = 20$</p> <hr/> <p>$D_n - ?$</p> <p>$D_{екв} - ?$</p>	<p style="text-align: center;">Розв'язок</p> $D_n = \frac{nW_1}{m} = \frac{10^9 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}}{10^{-2} \text{ кг}} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ Гр} = 8 \text{ рад.}$ $D_{екв} = 20 \cdot 8 = 160 \text{ бер.}$
--	--

Задача №3

Повітря, що знаходиться при нормальних умовах в іонізаційній камері об'ємом 6 см³, опромінюється рентгенівськими променями. Потужність дози рентгенівських променів дорівнює 0,48 мР/год. Густина повітря $\rho = 1,3$ кг/м³. Знайти іонізаційний струм.

<p>Дано:</p> <p>$V = 6 \cdot 10^{-6}$ м³</p> <p>$P_0 = 0,48$ мР/ч</p> <p>$\rho = 1,3$ кг/м³</p> <hr/> <p>$I - ?$</p>	<p style="text-align: center;">Розв'язок</p> $P_0 = \frac{q}{m\Delta t} = \frac{I}{m} = \frac{I}{V\rho}; \quad I = P_0 V\rho,$ $P_0 = 0,48 \text{ мР/год} = 0,48 \frac{10^{-3} \text{ Р}}{3600 \text{ с}}$ $= 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ Р/с} = 1,3 \cdot 10^{-7} \cdot 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг} \cdot \text{с} = 3,44 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/кг} \cdot \text{с.}$ $I = 3,44 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/кг} \cdot \text{с} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 \cdot 1,3 \text{ кг/м}^3 = 2,7 \cdot 10^{-16} \text{ А.}$
--	--

Задача №4

Рентгенівська трубка створює на деякій відстані потужність експозиційної дози $2,58 \cdot 10^5$ А/кг. Яке число пар іонів за одну секунду створює ця трубка за рахунок іонізацій в одному грамі повітря на даній відстані?

<p>Дано:</p> <p>$P_0 = 2,53 \cdot 10^5$ А/кг</p> <p>$t = 1$ с</p> <p>$m = 10^{-3}$ кг</p> <p>$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл</p> <hr/> <p>$N - ?$</p>	<p style="text-align: center;">Розв'язок</p> $P_0 = \frac{q}{m \cdot t} = \frac{eN}{m \cdot t};$ $N = \frac{P_0 m t}{e} = 1,6 \cdot 10^{11} \text{ пар іонів.}$
--	---

Контрольні запитання та завдання для самостійної роботи

- При якому виді радіоактивного розпаду випромінюються позитрони?
 - при α -розпаді;
 - при β -розпаді;
 - при γ -розпаді;
 - при діленні ядер?
- Вказати схему ділення ядра урану:
 - ${}_{92}^{238}\text{U} + {}_0^1\text{n} \rightarrow$ лантаніди + $3{}_0^1\text{n} + W$;
 - ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-1}^AY + {}_{+1}^0e$;
 - ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z+1}^AY + {}_{-1}^0e$;
 - ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_2^4\text{He}$.
- Які частинки, що супроводжують радіоактивний розпад, спричиняють найбільш сильний вплив на біологічні тканини?
 - α -частинки;
 - β -частинки;
 - γ -частинки;
 - нейтрони?
- Який енергетичний спектр має α -випромінювання?
 - суцільний;
 - лінійчатий?
- Якому випромінюванню притаманна найбільша проникна здатність?
 - α -випромінюванню;
 - β -випромінюванню;
 - нейтронам?
- Який енергетичний спектр має γ -випромінювання?
 - суцільний;
 - лінійчатий?

9.9. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА “ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЕНТА ЛІНІЙНОГО ПОСЛАБЛЕННЯ ГАММА-ВИПРОМІНЮВАННЯ”

Мета роботи: вивчити метод реєстрації іонізуючого випромінювання за допомогою радіометра, який містить газорозрядний лічильник; визначити коефіцієнт лінійного послаблення γ -випромінювання для свинцю, заліза та алюмінію.

Питання для підготовки до лабораторної роботи

1. Радіоактивність. Основні характеристики радіоактивного розпаду.
2. Активність, одиниці активності.
3. Взаємодія корпускулярного іонізуючого випромінювання (альфа-, бета-, протонного, нейтронного тощо) з речовиною.
4. Взаємодія рентгенівського та гамма-випромінювань з речовиною.
5. Характеристики іонізуючого випромінювання (іонізуюча та проникаюча здатності).
6. Закон послаблення іонізуючого випромінювання. Захист від іонізуючого випромінювання.

Додаткова література

1. Ливенцев Н.М. Курс фізики. – М.: Высшая школа, 1978. – Ч. 2.
2. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996.

Додаткові теоретичні відомості

Гамма-промені – короткохвильове електромагнітне випромінювання з надзвичайно малою довжиною хвилі ($\lambda < 10^{-10}$ м). Вони становлять потік γ -квантів (фотонів) з енергією $h\nu$ та імпульсом $h\nu/c$. Гамма-випромінювання є одним із видів радіоактивного випромінювання та, як правило, супроводжує α - і β -розпади. На дослідях встановлено, що γ -промені випускаються не материнським, а дочірніми ядрами, які в момент свого утворення збуджені та мають надлишкову енергію порівняно із звичайним, нормальним енергетичним станом незбудженого ядра. За дуже короткий час (10^{-13} – 10^{-14} с) дочірнє ядро переходить у нормальний або менш збуджений стан, при цьому випускаючи γ -промені, що мають дискретний спектр.

При проходженні через речовину внаслідок поглинання та розсіяння інтенсивність γ -випромінювання зменшується. Під час

проходження через речовину γ -квант може взаємодіяти як з електронною оболонкою атомів (молекул) речовини, так і з їх ядрами. Фізичні процеси, що зумовлюють зменшення інтенсивності γ -променів під час проходження через речовину є: *утворення пар електрон-позитрон, Комптон-ефект, фотоефект і когерентне розсіяння*. Можливість виникнення певного процесу залежить від енергії γ -фотонів і фізичних властивостей речовини, яка поглинає ці фотони.

При великих енергіях γ -квантів, що перевищують подвійну енергію спокою електрона ($h\nu > 2m_0c^2 = 1,022$ MeV), переважно виникає поглинання променів, пов'язане з утворенням електрон-позитронних пар.

Зі зменшенням енергії фотона збільшується можливість виникнення Комптон-ефекту. В 1925 році А. Комптон, досліджуючи розсіяння рентгенівських променів, визначив, що в розсіяному випромінюванні присутні як коливання з частотою падаючого випромінювання ν_0 , так і коливання з частотою ν_1 , меншою ніж ν_0 . Ефект зменшення частоти розсіяного випромінювання одержав назву ефекту Комптона. При цьому ефекті енергія падаючого фотона $h\nu_0$ частково витрачається на відрив електрона від атома, тобто на роботу виходу A_e , та надання електрону кінетичної енергії W_k . Цей електрон називають електроном віддачі, або комптонівським електроном. За законом збереження енергії $h\nu_0 = h\nu_1 + A_e + W_k$ енергія розсіяного фотона $h\nu_1$ (і отже частота випромінювання) буде меншою від енергії падаючого фотона. Ефект Комптона частіше за все спостерігається для енергій гамма-випромінювань, менших за енергію подвійної маси спокою електрона та більших від енергії зв'язку електрона з атомом. Його також називають некогерентним розсіянням гамма-випромінювання, так як відбувається зміна частоти фотона, який поглинається.

Із зменшенням енергії гамма-фотонів збільшується можливість взаємодії кванта з електронами атомів. Виникає фотоефект, при якому електрони вириваються із внутрішніх шарів електронної оболонки. Цей процес називають ще фотоелектричним поглинанням γ -променів. Коефіцієнт фотоелектричного

поглинання $\mu_{\text{фот}}$ залежить від атомного номера Z речовини і довжини хвилі гамма-випромінювання:

$$\mu_{\text{фот}} \sim Z^m \lambda^n.$$

Сталі m і n , залежно від енергії квантів, змінюють свої значення в межах $m = 2,9+4,4$, $n \approx 3$.

При невисоких енергіях фотона гамма-випромінювання при взаємодії його з речовиною (подібно рентгенівському) може виникати і когерентне розсіяння, при якому змінюється лише напрямок поширення випромінювання без зміни його енергії (частоти).

Враховуючи всі ці процеси, що характеризують взаємодію гамма-випромінювання з речовиною, можна записати закон Бугера для послаблення інтенсивності I_L цього випромінювання або потоку частинок N_L по мірі проходження шару речовини товщиною L :

$$I_L = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot L}, \quad N_L = N_0 \cdot e^{-\mu \cdot L}.$$

Коефіцієнт μ – це *лінійний коефіцієнт послаблення*, величина якого обернено пропорційна такій товщині поглинаючої речовини, на якій інтенсивність випромінювання зменшується в e разів. Його значення можна знайти, скориставшись такою формулою:

$$\mu = (1/L) \cdot \ln(N_0/N_L).$$

Однією з характеристик захисних властивостей речовини від іонізуючого випромінювання є *товщина шару половинного послаблення* $L_{1/2}$, на якому інтенсивність випромінювання зменшується вдвічі. Враховуючи закон Бугера, можна знайти значення $L_{1/2}$, а саме: $0,5I_0 = I_0 e^{-\mu L_{1/2}}$, звідки $L_{1/2} = \ln 2 / \mu = 0,693 / \mu$.

Лабораторна установка для визначення коефіцієнта лінійного послаблення гамма-випромінювання

Лабораторна установка складається із лічильника (детектора) та лічильного пристрою ПС-100 (рис. 9.26). Лічильник являє собою циліндричну посудину, заповнену газом з тиском до 100–200 мм рт. ст. та містить два електроди – нитковидний анод і циліндричний катод. Робоча напруга на лічильнику кілька сотень

вольт. При попаданні в об'єм лічильника будь-якої іонізуючої частинки (електрони β -випромінювання, вторинні фотоелектрони, комптон-електрони або електрон-позитронні пари при γ -випромінюванні) в ньому виникає самостійний розряд із швидким самопогашенням. Розряд переривається вмиканням великого опору $R = 10^8$ – 10^9 Ом, а також введенням домішок (парів спирту, галогенів тощо) у склад газової суміші лічильника. Час погашення близько 10^{-6} с. Час відновлення чутливості лічильника визначається дрейфом іонів до катода та становить близько 10^{-4} с. Отже, *лічильна характеристика*, або *ефективність* лічильника, яка визначається числом зареєстрованих частинок за одиницю часу, становить величину порядку десяти тисяч за секунду.

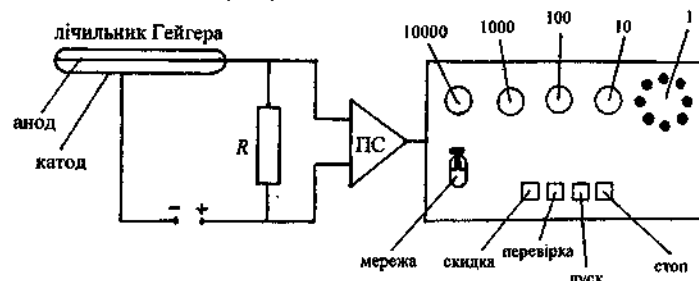


Рис. 9.26. Схема лабораторної установки

Електричні імпульси, що виникають в лічильнику, посилюються на підсилювачі (Пс) та поступають в лічильний пристрій. На зовнішній панелі цього пристрою знаходяться індикатори розрядів, які фіксують число зареєстрованих частинок, і клавіші для встановлення різних режимів роботи (*мережа, скидка, перевірка, пуск, стоп*).

Порядок виконання роботи

Під час виконання цієї роботи треба жорстко дотримуватися правил безпеки, зокрема не торкатися струмонесучих частин, тому що на лічильник подається напруга близько 400 В. Джерело радіоактивного випромінювання має знаходитися в контейнері. Час роботи з ним повинен бути зведений до

мінімуму, з цієї причини всю підготовчу роботу (пункти 1–3, підготовка таблиці) треба виконати заздалегідь.

1. Підготувати установку до роботи. Закріпити лічильник в штативі, дотримуючи полярність під'єднання електродів згідно з маркіруванням. Увімкніть тумблер “мережа” і дайте прогрітися приладу кілька хвилин.

2. Перевірити роботу установки. Для перевірки роботи пристрою на вхід подаються імпульси від мережі змінного струму. Натисніть клавішу “скидка” – показання індикаторів “обнуляються”. Натисніть клавішу “50 Гц” або “перевірка” та через одну хвилину – клавішу “стоп”. При правильній роботі індикатори лічильника покажуть значення 3000.

3. Виміряти фон іонізуючого випромінювання N_{ϕ} . В нормальних умовах цей фон зумовлений космічним випромінюванням, розпадом ядер радіоактивних елементів, які містяться в оточуючих нас матеріалах тощо. Виміряйте не менше 3–5 разів число актів іонізації в об'ємі лічильника за одну хвилину. Послідовність операцій: клавіша “скидка”, одночасно із запуском секундоміра – клавіша “пуск”, через одну хвилину – клавіша “стоп”. Дані з індикаторів занесіть в таблицю.

4. Виміряти число N зареєстрованих частинок, які випромінюються радіоактивним препаратом. Капсулу з радіоактивним препаратом помістіть під лічильник і проведіть вимірювання, аналогічно вказаним в пункті 3. Вимірне число частинок N' складається з суми числа частинок N_{ϕ} , що визначають фон іонізуючого випромінювання, а також числа частинок N , які випромінюються препаратом і потрапили в об'єм лічильника. Отже, величина N визначається як різниця $N = N' - N_{\phi}$. Вимірювання провести 3–5 разів, дані занести в таблицю.

5. Виміряти число зареєстрованих частинок, які випромінюються радіоактивним препаратом, поглинаються шаром металу і потрапляють в об'єм лічильника разом з фоном іонізуючого випромінювання. Не змінюючи положення капсули, екрануйте її від лічильника пластиною із заліза та виміряйте 3–5 разів число актів іонізації в об'ємі лічильника N'_{Fe} . Дані занесіть в таблицю. Аналогічні вимірювання зробіть також для інших

металів – алюмінію N'_{Al} та свинцю N'_{Pb} . Товщина L вказана на металевих пластинах.

Таблиця. Результати вимірювань та обчислень μ і $L_{1/2}$

№	N_{ϕ}	N'	залізо		алюміній		свинець	
			N'_{Fe} 1/хв	L_{Fe} мм	N'_{Al} 1/хв	L_{Al} мм	N'_{Pb} 1/хв	L_{Pb} мм
1				–		–		–
2				–		–		–
3				–		–		–
4				–		–		–
5				–		–		–
середнє								
		$N =$	$N_{Fe} =$		$N_{Al} =$		$N_{Pb} =$	
			$\mu_{Fe} = \dots$ (мм ⁻¹)		$\mu_{Al} = \dots$ (мм ⁻¹)		$\mu_{Pb} = \dots$ (мм ⁻¹)	
			$L_{1/2} = \dots$ (мм)		$L_{1/2} = \dots$ (мм)		$L_{1/2} = \dots$ (мм)	

6. Знайти середні значення N_{ϕ} , N' , N'_{Fe} , N'_{Al} , N'_{Pb} .

7. За знайденими середніми значеннями визначити числа зареєстрованих частинок тільки від радіоактивного препарату (без фону), що послаблені за рахунок поглинання в металевих шарах:

$$N = N' - N_{\phi}, N_{Fe} = N'_{Fe} - N_{\phi}, N_{Al} = N'_{Al} - N_{\phi}, N_{Pb} = N'_{Pb} - N_{\phi}.$$

8. Визначити коефіцієнти послаблення μ і $L_{1/2}$ та товщини шарів половинного послаблення $L_{1/2}$ для вказаних металів за формулами

$$\mu \text{ і } L_{1/2 Fe} = (1 / L_{Fe}) \cdot \ln(N / N_{Fe}), L_{1/2}^{Fe} = 0,693 / \mu_{Fe};$$

$$\mu \text{ і } L_{1/2 Al} = (1 / L_{Al}) \cdot \ln(N / N_{Al}), L_{1/2}^{Al} = 0,693 / \mu_{Al};$$

$$\mu \text{ і } L_{1/2 Pb} = (1 / L_{Pb}) \cdot \ln(N / N_{Pb}), L_{1/2}^{Pb} = 0,693 / \mu_{Pb}.$$

Отримані дані занесіть в таблицю.

9. Порівняти отримані результати для різних металів та зробити висновки.

Оформлення роботи. У звіті має бути: а) стислі теоретичні відомості про природу гамма-випромінювання та механізми його поглинання; б) схема установки; в) таблиця з результатами вимірювань та обчислень; г) висновки.

Завдання для самостійної роботи та самоконтролю

1. Як пояснити випромінювання з атомного ядра електронів та позитронів при β -розпаді, якщо в ядрі знаходяться лише протони та нейтрони?
2. Чим визначається активність радіонуклідів?
3. Що таке когерентне розсіяння?
4. Пояснити фізичну суть ефекту Комптона.
5. В чому полягає суть фотоэффекту?
6. Пояснити явище утворення електронно-позитронних пар. За яких умов можуть утворитися електронно-позитронні пари з γ -квантів?
7. Що таке лінійний коефіцієнт послаблення? Яка його розмірність?
8. Який фізичний зміст товщини шару половинного поглинання?
9. Бетонна плита товщиною 20 см зменшує інтенсивність пучка γ -частинок кобальту в 16,5 разів. Визначити коефіцієнт лінійного послаблення і товщину шару половинного послаблення бетону.
10. Активність радіоактивного препарату, що містить $^{238}_{92}\text{U}$ з періодом напіврозпаду $T_{1/2} = 4,5$ мільярдів років складає 9 *мкКі*. Знайти кількість радіоактивних ядер в цей момент часу.
11. Визначити постійну розпаду радіоактивного елемента, якщо за місяць число радіоактивних ядер зменшиться в $e = 2,718$ разів.

9.10. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА “РОБОТА З ДОЗИМЕТРОМ ДРГЗ-04”

Мета роботи: вивчити поняття доз та потужностей доз іонізуючого випромінювання, набути навички роботи з дозиметром.

Питання для підготовки до лабораторної роботи

1. Експозиційна доза і потужність експозиційної дози, їх одиниці.
2. Поглинена доза і потужність поглиненої дози, їх одиниці.
3. Еквівалентна доза і потужність еквівалентної дози, їх одиниці.
4. Дозиметри іонізуючого випромінювання, їх призначення, характеристики і принципи роботи.

Додаткова література

1. Ливенцев Н.М. Курс фізики. – М.: Высшая школа, 1978. – Ч. 2.
2. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996.

Додаткові теоретичні відомості**1. Призначення дозиметра ДРГЗ-04**

Дозиметр ДРГЗ-04 призначений для вимірювання експозиційної дози (її потужності або середньої потужності), безперервного та імпульсного рентгенівського і гамма-випромінювань в діапазоні ефективних енергій квантів від $4,8 \text{ фДж} = 4,8 \cdot 10^{-15} \text{ Дж}$ до $0,48 \text{ нДж} = 0,48 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}$ (від 30 кеВ до 3 МеВ), максимальної поглинутої дози в тканині (її середньої потужності) неперервного та імпульсного високоенергетичного гальмівного рентгенівського і гамма-випромінювань в діапазоні від $0,16 \text{ нДж}$ до 4 нДж (від 1 МеВ до 25 МеВ), в тому числі експозиційної і максимальної поглинутої доз одиничних імпульсів.

Дозиметр застосовується для визначення радіаційного стану, пов'язаного з дією джерел гальмівного рентгенівського та гамма-випромінювань.

2. Склад приладу

Дозиметр ДРГЗ-04 складається з таких частин (рис. 9.27): 1 – пульту управління; 2 – з'єднувального кабелю між пультом і блоком детектування; 3 – блоку детектування; 4 – контейнеру з контрольним джерелом; 5 – стакана-насадки, що використовується для вимірювання поглинутої дози.

3. Характеристики дозиметра ДРГЗ-04

Дозиметр може працювати як від мережі змінного струму напругою 220 В , так і від блоку батарей (12 окиснортутних елементів типу РЦ-85 з напругою $1,25 \text{ В}$ кожний). Батарейний блок живлення постачається в комплекті з приладом, при потребі він розташовується в пульті замість блоку стабілізації. Органи управління розташовані на верхній кришці дозиметра.

У комплект дозиметра входить контейнер з контрольним бета-джерелом, що виготовлений з препарату стронцію та інших радіоактивних елементів і який має активність не більше $2,7 \cdot 10^5 \text{ Бк}$. Товщина стінок контейнера забезпечує відсутність випромінювання на поверхні контейнера (пробіг бета-частинок максимальної енергії в стінці контейнера 5 мм). Забороняється

порушувати захисну фольгу джерела, зберігати джерело зі знятою верхньою кришкою, підносити його близько до очей.

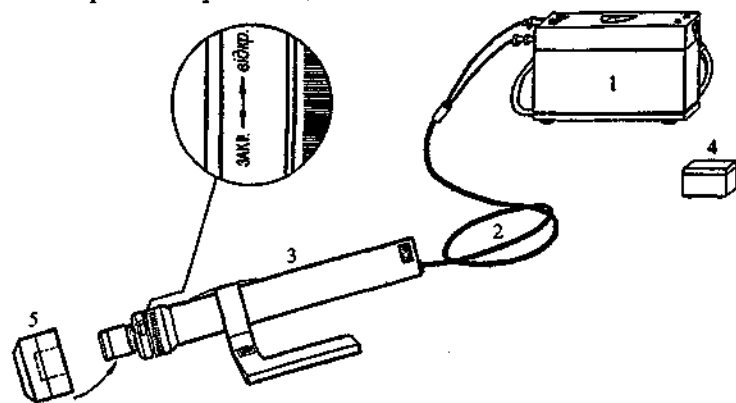


Рис. 9.27. Схематичний вигляд дозиметра ДРГЗ-04

4. Управління роботою дозиметра ДРГЗ-04

Дозиметр управляється за допомогою 2-х перемикачів В1 і В2, кнопки скидання показників В3, тумблера вмикання живлення дозиметра В4 і ручки резистора КОМП. СТРУМУ, розташованій на лицевій стороні панелі дозиметра (рис. 9.28).

У нижній частині дозиметра під кришкою знаходяться резистори: для регулювання чутливості дозиметра (ЧУТЛ), для встановлення нуля вимірювального приладу (НУЛЬ УПТ), а також тумблер (БАТ, МЕРЕЖА).

В блоці детектування знаходяться металеві заглушки, які закривають отвори, проти яких розташовані конденсатори для точного регулювання високовольтної напруги і перемикач режимів роботи дозиметра.

5. Порядок виконання роботи

5.1. Ознайомитися з додатковими теоретичними відомостями, що наведені вище.

5.2. Підготувати прилад до роботи, для чого потрібно виконати такі робочі операції:

5.2.1. Підключити блок детектування до пульта дозиметра (як правило, вже підключений).

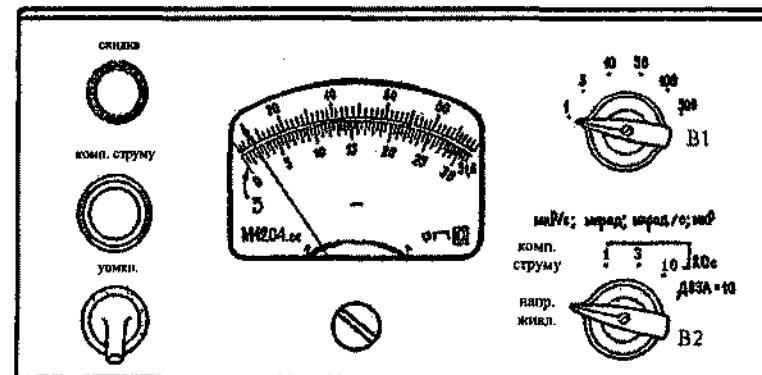


Рис. 9.28. Передня панель дозиметра ДРГЗ-04

5.2.2. Початкове положення органів управління: тумблер МЕРЕЖА – в нижньому; перемикач В1 – в положенні 1; перемикач В2 – в положенні НАПР. ЖИВЛІ; світловий затвор – закритий.

5.2.3. Увімкнути вилку кабелю в мережу 220 В, 50 Гц, увімкнути тумблер МЕРЕЖА. Показники вимірювального приладу повинні складати 1,2–1,5 за шкалою 3.

5.2.4. Через 10 хвилин з моменту вмикання дозиметра встановити перемикач В2 в положення КОМП. СТРУМУ. Стрілка вимірювального приладу повинна знаходитися на нульовій позначці або в діапазоні 0–0,1 за шкалою 3.

5.2.5. Встановити перемикач В2 в положення 1. Стрілка вимірювального приладу повинна переміститися вправо.

5.2.6. Перевірити нуль вимірювального приладу натисканням кнопки СКИДКА. Якщо спостерігається відхилення показників вимірювального приладу від нульової позначки більш ніж на 2% відносно кінцевого значення шкали, резистором НУЛЬ УПТ встановити нульовий показник при натиснутій кнопці СКИДКА (виконує лаборант). Відпустити кнопку СКИДКА. Повільно повертаючи ручку КОМП. СТРУМУ проти годинникової стрілки, встановити стрілку вимірювального приладу на нульову позначку

шкали (допускаються рідкі коливання вправо від нульової позначки).

5.2.7. Встановити перемикач В2 в положення КОМП. СТРУМУ. Стрілка вимірювального приладу повинна знаходитися в діапазоні 0–0,1 за шкалою 3. Якщо стрілка вимірювального приладу знаходиться в границях шкали, що перевищують вказані значення або через 1–5 с спостерігається її повільне відхилення вправо від нульової позначки, необхідно ручку КОМП. СТРУМУ повернути за годинниковою стрілкою до кінця, натиснути і через 5–10 с відпустити кнопку СКИДКА, встановити перемикач В2 в положення 1 і знову повторити операції за пп. 5.2.6 і 5.2.7.

Примітки:

1. Операції за пп. 5.2.6 і 5.2.7 необхідно виконувати за відсутності випромінювання у місці розташування блока детектування.

2. Дозиметр має два режими роботи, що розрізняються в 10 разів за чутливістю і максимальною потужністю експозиційної і поглинутої доз у імпульсі.

3. Перший режим роботи забезпечується при положенні 1 перемикача В2. Положення 1, 3, 10 перемикача В2 визначають час встановлення показників, що не перевищує 5 с (при положенні 1), 15 с (при положенні 3), 50 с при положенні 10).

Верхні границі шести піддіапазонів, на які розбиті діапазони вимірювання експозиційної дози (її потужності), а також поглинутої дози в тканині (її потужності) для першого режиму вказані в таблиці, що наведена нижче.

Позначення піддіапазону	Потужність експозиційної дози нА/кг (мкР/с)	Експозиційна доза нКл/кг (мкР)	Потужність поглинутої дози мкВт/кг (мкрад/с)	Поглинута доза мкДж/кг (мкрад)
1	0,258(1)	2,58(10)	0,01(1)	0,1(10)
3	0,774(3)	7,74(30)	0,03(3)	0,3(30)
10	2,58	25,8(100)	0,1(10)	1(100)
30	7,74	77,4(300)	0,3(30)	3(300)
100	25,8	258(1000)	1(100)	10(1000)
300	77,4	774	–	–

Для другого режиму (В2 в положенні “Доза x 10³”) чутливість дозиметра в 10 разів нижча, а максимальна величина дози і потужності дози відповідно в 10 разів вища, ніж для першого режиму.

5.3. Встановити перемикач В2 в положення 1, а перемикач В1 в положення 10.

5.4. Відкрити світловий затвор і визначити показники дозиметра від контрольного джерела (джерело випромінювання надається лаборантом). Для цього потрібно: відкрити кришку захисного (чохла) джерела, встановити блок детектування без насадки торцем на контрольне джерело. Стрілка дозиметра повинна відхилитися на 72–74 поділки верхньої шкали. При перемиканні тумблера В1 в положення 10 таке відхилення стрілки відповідає потужності випромінювання 7,2 мкР/с.

5.5. Виміряти потужність дози, що випромінюється радіоактивним джерелом, який використовується в роботі з лічильником Гейзера: а) при вимірюванні поглинутої дози (або її потужності) на світлозахисний стакан блоку детектування накручується тканинно-еквівалентна насадка; б) при вимірюванні експозиційної дози (її потужності), а також при визначенні показників дозиметра від контрольного джерела насадка не використовується.

Оформлення роботи. У звіті повинно бути: а) стислі теоретичні відомості про основи дозиметрії іонізуючого випромінювання; б) блок-схема дозиметра; в) результати вимірювання експозиційної дози та потужності експозиційної дози від контрольного радіоактивного джерела; г) висновки.

Завдання для самостійної роботи та самоконтролю

1. Як визначаються дози та потужності доз? Записати зв'язок між різними дозами. Який існує зв'язок між одиницями різних доз?
2. Які існують дозиметри іонізуючого випромінювання? Вкажіть фізичні принципи роботи дозиметрів.
3. Деякий радіоактивний препарат має постійну розпаду $\lambda = 1,44 \cdot 10^{-3} \text{ год}^{-1}$. Через який час розпадеться 75% початкової кількості атомів?
4. Кінетична енергія α -частинки, що виплітає з ядра атома радію при радіоактивному розпаді, дорівнює 4,78 MeV. Знайти швидкість α -частинки.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

РОЗДІЛ 1

1. Гнеденко В.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1982.
2. Гроссман С., Тернер Дж. Математика для биологов. – М.: Высшая школа, 1983.
3. Давидов М.О. Курс математического анализа. – К.: Вища школа, 1990.
4. Демидович В.П. Задачи и упражнения по математическому анализу. – М., 1972.
5. Жалдак М.І. Початки теорії ймовірностей. – К.: Радянська школа, 1978.
6. Зельдович Я.В. Высшая математика для начинающих и её приложения к физике. – М.: Наука, 1968.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971.
8. Марион Дж. Общая физика с биологическими примерами. – М.: Мир, 1989.
9. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. – М.: Мир, 1983.
10. Минцер О.П., Угаров В.Н., Власов В.В. Методы обработки медицинской информации. – К.: Вища школа, 1982.
11. Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962.
12. Уилкс С. Математическая статистика. – М.: Мир, 1976.
13. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматгиз, 1962. – Т. 1, 2.
14. Феллер С. Введение в теорию вероятностей. – М.: Мир, 1984.
15. Чалий О.В., Стучинська Н.В., Цехмістер Я.В. Математична обробка медикобіологічної інформації. – К.: УДМУ, 1995.
16. Чалий О.В., Стучинська Н.В., Меленевська А.В. Вища математика. – К.: Техніка, 2001.

РОЗДІЛ 2

1. Березовский В.А., Колотилов Н.Н. Биофизические характеристики тканей человека. Справочник. – К.: Наукова думка, 1982.
2. Владимиров Ю.А., Рошупкин Д.И., Патаненко А.Я., Девя А.И. Биофизика. – М.: Медицина, 1983.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1965.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.
5. Левтов В.А., Регирер С.А., Шадрин Н.Х. Реология крови. – М.: Медицина, 1982.
6. Ливенцев Н.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1974.
7. Медицинская физика. / Под ред. В.О. Самойлова. – Л.: Воен. мед. акад., 1986.
8. Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. – М.: Мир, 1981.
9. Проблемы прочности в биомеханике. / Под ред. И.Ф. Образцова. – М.: Высшая школа, 1988.
10. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996.
11. Рубин А.Б. Биофизика. – М.: Высшая школа, 1987.

12. Фейман Р., Лейтон Р., Сендс Р. Фейнмановские лекции по физике. – М.: Мир, 1967. – Т. 1, 4, 7.
13. Физический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1983.
14. Чалий А.В. Неравновесные процессы в физике и биологии. – К.: Наукова думка, 1977.

РОЗДІЛ 3

1. Ахизер А.И. Общая физика. Электрические и магнитные явления. – К.: Наукова думка, 1981.
2. Вонсовский С.В. Магнетизм. – М., 1971.
3. Горбачук І.Т. Загальна фізика. – К.: Техніка, 1999.
4. Горелик Г.С. Колебания и волны. – М.: Наука, 1959.
5. Электрические измерения. / Под ред. Фремке А.В., Душина Е.М. – Л., 1980.
6. Калашников С.Г. Электричество. – М.: Наука, 1977.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М., 1973.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982.
9. Ливенцев Н.М. Курс физики для медвузов. – Часть 2. – М.: Высшая школа, 1978.
10. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996.
11. Рубин А.Б. Биофизика. – М.: Высшая школа, 1987.
12. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1987.
13. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976.
14. Титомир Л.И. Электрический генератор сердца. – М.: Наука, 1980.
15. Фейман Р., Лейтон Р., Сендс Р. Фейнмановские лекции по физике. – М.: Мир, 1967. – Т. 6.
16. Физический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1983.

РОЗДІЛ 4

1. Абакумов В.Г., Геранин В.О., Рибін О.І., Сватош Й., Синекон Ю.С. Біомедичні сигнали та їх обробка. – К.: ТОО “Век+”, 1997.
2. Абакумов В.Г., Рибін О.І., Сватош Й., Синекон Ю.С. Системи відображення в медицині. – К.: ТОО “Век+”, 1999.
3. Жуковский В.Д. Медицинские электронные системы. – М.: Медицина, 1976.
4. Клиническая реография. / Под ред. В.Г. Шершнева. – К.: Здоров'я, 1977.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982.
6. Ливенцев Н.М. Курс физики для медвузов. – Часть 2. – М.: Высшая школа, 1978.
7. Ливенцев Н.М., Ливенсон А.Р. Электромедицинская аппаратура. – М., 1974.
8. Ливенсон А.Р. Электробезопасность медицинской техники. – М.: Медицина, 1982.
9. Ремизов О.М. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996.
10. Титомир Л.И. Электрический генератор сердца. – М.: Наука, 1980.
11. Физический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1983.

Розділ 5

1. *Владимиров Ю.А., Роцупкин Д.И., Потапенко А.Я., Деев А.И.* Биофизика. – М.: Медицина, 1983.
2. *Волькенштейн М.В.* Биофизика. – М.: Наука, 1981.
3. *Волькенштейн М.В.* Физика и биология. – М.: Наука, 1980.
4. *Губський Ю.І.* Біологічна хімія. – Київ-Тернопіль: Укрмедкнига, 2000.
5. *Давыдов А.С.* Биология и квантовая механика. – К.: Наукова думка, 1979.
6. *Иванюк Г.Р., Крицкий В.И., Сальков Е.Е.* Математическая биофизика клетки. – М.: Наука, 1978.
7. *Кагава Я.* Биомембраны. – М.: Высшая школа, 1985.
8. *Кату В.* Нерв, мышца и синапс. – М.: Мир, 1968.
9. *Келлен С.Р., Эссинг Э.* Биоэнергетика и линейная термодинамика необратимых процессов. – М.: Мир, 1986.
10. *Костюк П.Г., Гродзинский Д.М., Зима В.Л., Мозура И.С., Сидорик Е.П., Шуба М.Ф.* Биофизика. – К.: Вища школа, 1988.
11. *Костюк П.Г., Крышталь О.А.* Механизмы электрической возбудимости нервной клетки. – М.: Наука, 1981.
12. *Лишко В.К., Шевченко М.И.* Мембраны и жизнь клетки. – К.: Наукова думка, 1987.
13. *Ремизов А.Н.* Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1987.
14. *Романовский Ю.М., Степанов Н.В., Чернавский Д.С.* Математическая биофизика. – М.: Наука, 1984.
15. *Сергеев Ю.В.* Моделирование взаимодействий биологических молекул. – М.: Знание, 1987.
16. *Рубин А.Б.* Биофизика. – М.: Высшая школа, 1987. – Т. 1, 2.
17. *Чалый А.В.* Неравновесные процессы в физике и биологии. – К.: Наукова думка, 1997.

Розділ 6

1. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. – М.: Наука, 1990.
2. *Владимиров Ю.А., Роцупкин Д.И., Потапенко А.Я., Деев А.И.* Биофизика. – М.: Медицина, 1983.
3. *Волькенштейн М.В.* Биофизика. – М.: Наука, 1981.
4. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. – М.: Мир, 1964.
5. *Костюк П.Г., Гродзинский Д.М., Зима В.Л. и др.* Биофизика. – К.: Вища школа, 1988.
6. *Крицкий В.И., Михайлов А.С.* Автоволны. – М.: Знание, 1984.
7. *Курдюмов С.П., Меленцкий Г.С.* Синергетика – теория самоорганизации. – М.: Знание, 1983.
8. *Николис С., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979.
9. *Лостон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и её приложения. – М.: Мир, 1980.
10. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. – М.: Прогресс, 1986.
11. *Романовский Ю.М., Степанов Н.В., Чернавский Д.С.* Математическая биофизика. – М.: Наука, 1984.

12. *Рубин А.Б.* Биофизика. – М.: Высшая школа, 1987. – В 2-х томах.
13. *Сугаков В.И.* Основы синергетики. – К.: Оберіг, 2001.
14. *Хакен Г.* Синергетика. – М.: Мир, 1980.
15. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – М.: Мир, 1985.
16. *Чалый А.В.* Методы физики фазовых переходов в проблеме структурообразования // Теоретические и математические аспекты морфогенеза. – М.: Наука, 1987.
17. *Чалый А.В., Цехмистер Я.В.* Флуктуационные модели процессов самоорганизации. – К.: Изд-во "Тираж", 1994.
18. *Чалый А.В.* Неравновесные процессы в физике и биологии. – К.: Наукова думка, 1997.
19. *Чалый О.В.* Синергетичні принципи освіти та науки. – К.: Віпол, 2000.
20. *Эйген М.* Самоорганизация материи и эволюция биологических макромолекул. – М.: Мир, 1973.
21. *Эйген М., Шустер П.* Гиперцикл. Принципы самоорганизации макромолекул. – М.: Мир, 1982.

Розділ 7

1. *Борн М., Вольф Е.* Принципы оптики. – М.: Наука, 1970.
2. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика. – М.: ИЛ, 1966.
3. *Горбачь І.С., Олійник О.І., Халимонова І.М.* Основы хвильової та променевої оптики. – К.: Київський університет, 1999.
4. *Дитчберн Р.* Физическая оптика. – М.: Наука, 1965.
5. *Зоммерфельд А.* Оптика. – М.: ИЛ, 1966.
6. *Кучерук І.М., Горбачук І.Т.* Курс фізики. Оптика, квантова фізика. – К.: Техніка, 1999.
7. *Ливенцев Н.М.* Курс фізики. – М.: Высшая школа, 1978.
8. *Ремизов А.Н.* Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1978.
9. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Оптика. – М.: Наука, 1980.
10. *Савельев И.В.* Курс общей физики. – М.: Наука, 1971. – Т. 3.

Розділ 8

1. *Ажита Я.И.* Медико-биологические аспекты применения метода электронного парамагнитного резонанса. – М.: Наука, 1983.
2. *Бови Ф.* ЯМР высокого разрешения макромолекул. – М.: Химия, 1977.
3. *Владимиров Ю.А., Роцупкин Д.И., Потапенко А.Я., Деев А.И.* Биофизика. – М.: Медицина, 1983.
4. *Давыдов А.С.* Биология и квантовая механика. – К.: Наукова думка, 1979.
5. *Дэвид Р.* Введение в биофизику. – М.: Мир, 1982.
6. *Кучерук І.М., Горбачук І.Т.* Загальний курс фізики. – К.: Техніка, 1999. – Т. 3.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. – М.: Наука, 1972.
8. *Ливенцев Н.М.* Курс физики для медвузов. – М.: Высшая школа, 1978.
9. *Маршлелл Э.* Биофизическая химия. – М.: Мир, 1981.
10. *Ремизов А.Н.* Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996.

11. Рубин А.Б. Биофизика. – М.: Высшая школа, 1987.
12. Свободные радикалы в биологии. – Ред. У. Прайор. – М.: Мир, 1979.
13. Фрайфелдер Д. Физическая химия. – М.: Мир, 1981.
14. Хедвиг П. Прикладная квантовая химия. – М.: Мир, 1977.
15. Хунд Р. История квантовой механики. – М.: Наука, 1980.
16. Чанг Р. Биологическая химия с приложениями к биологическим системам. – М.: Мир, 1980.
17. Юхновський І.Р. Основи квантової механіки. – К.: Либідь, 1995.

Розділ 9

1. Загальна гігієна (пропедевтика гігієни) / За ред. академіка Є.Г. Гончарука – К.: Вища школа, 1996.
2. Влох О.Г., Гайда Р.П., Пляцко Р.М. Иван Пулюй та становлення рентгенології // Нариси з історії природознавства і техніки. – 1994. – П. 41. – С. 64–65.
3. Воробьёв Е.И. и др. Облучение населения СССР за счёт медицинских диагностических процедур. – Атомная энергия. – 1984. – Т. 56. – Вып. 4.
4. Карцев В.П. Вечно молодая физика. – М.: Советская Россия, 1983.
5. Коггл Дж. Биологические эффекты радиации. М.: – Энергоатомиздат, 1986. – 184 с.
6. Коновалов А.Н., Корниенко В.Н. Компьютерная томография в нейрохирургической клинике. – М.: Медицина, 1985.
7. Кучерук І.М., Горбачук І.Т. Загальний курс фізики. – К.: Техніка, 1999. – Т. 3.
8. Мурашко М.І. Рентгенівські промені (промені Івана Пулюя). – К.: Поліпром, 2000.
9. Рабин И.Х., Ставицкий Р.В., Блинов Н.Н., Васильев Ю.Д. Тканевые дозы при рентгенологических исследованиях. – М.: Медицина, 1985. – 220 с.
10. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1996.
11. Свєргун Д.И., Фейгин Л.А. Рентгеновское и нейтронное малоугловое рассеяние. – М.: Наука, 1986. – 278 с.
12. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Атомная и ядерная физика. – М.: Наука, 1986.
13. Физический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1983.
14. Шендеровський В. Він належав до тих, хто формував світ. – Вісник НАН України. – 1995. – П. 1–2. – С. 56–60.
15. Cameron I.R., Skofronick I.G. Medical Physics. – John Wiley Sons, New York, 1978.
16. Graduate Studies in Medical Physics. – University of Wisconsin. – Madison, School of Medicine, Wisconsin, 1996.
17. Martin A., Harbison S.A. An Introduction to Radiation Protection. – London, Chapman and Hall, 1979.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	3
РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА МЕДИКО-БІОЛОГІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ.....	7
1.1. ЕЛЕМЕНТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ.....	8
1.1.1. Похідна та диференціал функції.....	8
1.1.2. Основні правила диференціювання.....	11
1.1.3. Таблиця похідних основних елементарних функцій.....	11
1.1.4. Правило диференціювання складної функції.....	12
1.1.5. Похідні вищого порядку.....	13
1.1.6. Дослідження функцій на монотонність. Екстремуми функцій.....	15
1.1.7. Опуклість та угнутість графіка функції. Точки перегину.....	16
1.1.8. Асимптоти кривої.....	17
1.1.9. Дослідження функцій і побудова графіків.....	19
1.2. ФУНКЦІ БАГАТОХ ЗМІННИХ.....	29
1.2.1. Частинні похідні і частинні диференціали функції багатох змінних.....	29
1.2.2. Повний диференціал.....	31
1.2.3. Застосування диференціалу функції для обчислення похибок.....	31
1.3. ЕЛЕМЕНТИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ.....	37
1.3.1. Первісна. Невизначений інтеграл.....	37
1.3.2. Властивості невизначеного інтеграла.....	38
1.3.3. Таблиця найпростіших інтегралів.....	38
1.3.4. Основні методи інтегрування.....	39
1.3.5. Визначений інтеграл.....	40
1.3.6. Властивості визначеного інтеграла.....	41
1.3.7. Формула Ньютона–Лейбніца.....	42
1.3.8. Деякі фізичні, біофізичні та геометричні застосування визначеного інтеграла.....	43
1.4. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.....	53
1.4.1. Поняття про диференціальні рівняння.....	53
1.4.2. Лінійні диференціальні рівняння.....	54
1.4.3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.....	55
1.4.4. Диференціальні рівняння в біології та медицині.....	58
1.4.5. Звичайні лінійні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.....	65
1.5. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ.....	73

1.5.1. Частота та ймовірність події.....	73
1.5.2. Об'єднання випадкових подій.....	75
1.5.3. Перетин випадкових подій.....	76
1.5.4. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.....	78
1.5.5. Основні формули комбінаторики.....	79
1.5.6. Повторні випробування. Формула Бернуллі.....	80
1.5.7. Випадкова величина. Дискретні та неперервні випадкові величини.....	81
1.5.8. Інтегральна та диференціальна функції розподілу.....	82
1.5.9. Основні числові характеристики розподілу випадкових величин.....	84
1.5.10. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин.....	87
1.5.11. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин.....	88
1.5.12. Ймовірність попадання значень нормально розподіленої випадкової величини в заданий інтервал. Функція Лапласа.....	92
1.5.13. Деякі інші розподіли випадкових величин.....	94
1.5.14. Центральна гранична теорема.....	95
1.5.15. Локальна та інтегральна теореми Лапласа.....	96
1.5.16. Закон великих чисел Чебишова.....	97

РОЗДІЛ 2. БІОМЕХАНІКА, БІОРЕОЛОГІЯ ТА ГЕМОДИНАМІКА..... 112

2.1. МЕХАНІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ БІОЛОГІЧНИХ ТКАНИН.....	115
2.1.1. Пружні властивості тіл. Деформації.....	115
2.1.2. Деформація біологічних тканин.....	121
2.2. Плин в'язких рідин у біологічних системах.....	124
2.2.1. В'язкість рідини.....	124
2.2.2. В'язкість крові.....	127
2.2.3. В'язко-пружні властивості біологічних тканин.....	128
2.2.4. Основні рівняння руху рідини.....	132
2.2.5. Критерії механічної подібності рідин, що рухаються....	140
2.2.6. Пульсові хвилі.....	143
2.3. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ.....	146
2.3.1. Гармонічні коливання та їх основні параметри.....	147
2.3.2. Затухаючі коливання і аперіодичний рух.....	151
2.3.3. Вимушені коливання.....	154
2.3.4. Явище резонансу і автоколивання.....	156
2.3.5. Додавання гармонічних коливань.....	157
2.4. МЕХАНІЧНІ ХВИЛІ.....	161

2.4.1. Хвильове рівняння. Поздовжні і поперечні хвилі.....	161
2.4.2. Потік енергії хвилі. Вектор Умова.....	163
2.5. АКУСТИКА. ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ СЛУХУ. ОСНОВИ АУДИОМЕТРІЇ.....	165
2.5.1. Природа звуку, його основні характеристики (об'єктивні і суб'єктивні).....	165
2.5.2. Закон Вебера-Фехнера.....	171
2.5.3. Ультразвук.....	175
2.5.4. Інфразвук.....	177
2.6. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ.....	178
2.6.1. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1 “Дослідження пружних властивостей біологічних тканин”.....	178
2.6.2. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2 “Визначення коефіцієнта в'язкості”.....	184
2.6.3. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3 “Визначення порога чутності аудіометричним методом”.....	190

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕКТРОДИНАМІКА МЕДИКО-БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ..... 199

3.1. ЕЛЕКТРОСТАТИКА.....	199
3.1.1. Основні характеристики електричного поля.....	199
3.1.2. Електричний диполь.....	203
3.1.3. Діелектрики, поляризація діелектриків.....	206
3.1.4. Діелектричні властивості біологічних тканин.....	210
3.1.5. П'єзоелектричний ефект.....	213
3.2. ПОСТІЙНИЙ СТРУМ. ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЬ БІОЛОГІЧНИХ ТКАНИН.....	214
3.2.1. Характеристики електричного струму.....	214
3.2.2. Електропровідність біологічних тканин і рідин.....	216
3.2.3. Електрографія. Фізичні основи електрокардіографії.....	219
3.2.4. Дія електричного струму на біологічні тканини.....	228
3.3. МАГНІТНЕ ПОЛЕ.....	234
3.3.1. Магнітне поле у вакуумі і його характеристики.....	234
3.3.2. Закон Біо-Савара-Лапласа.....	236
3.3.3. Дія магнітного поля на елемент провідника зі струмом і рухомий електричний заряд. Сила Ампера і сила Лоренца.....	238
3.3.4. Магнітні властивості речовини.....	241
3.3.5. Магнітні властивості тканин організму, фізичні основи магнітобіології.....	247
3.4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ.....	249
3.4.1. Рівняння електричних коливань.....	249
3.4.2. Вимушені електричні коливання, змінний струм.....	251

3.4.3. Повний опір кола змінного струму (імпеданс). Закон Ома для кола змінного струму.....	255
43.4.4. Імпеданс біологічних тканин.....	256
3.5. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ.....	260
3.5.1. Струм зміщення.....	260
3.5.2. Рівняння Максвелла.....	263
3.5.3. Плоскі електромагнітні хвилі. Вектор Умова-Пойнтінга.....	265
3.5.4. Шкала електромагнітних хвиль.....	267
3.5.5. Дія електромагнітного поля на біологічні тканини.....	269
3.6. СЕМІНАР “Взаємодія електромагнітного поля з біологічними тканинами”.....	279
3.7. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ.....	281
3.7.1. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1 “Визначення величини артеріального тиску за допомогою ємнісного датчика”.....	281
3.7.2. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2 “Напівпровідниковий діод”.....	286
3.7.3. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3 “Вивчення роботи транзистора”.....	290
3.7.4. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4 “Електрофоретичний метод визначення рухливості іонів”.....	295
РОЗДІЛ 4. ЕЛЕКТРОННА МЕДИЧНА АПАРАТУРА.....	299
4.1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ЕЛЕКТРОННУ МЕДИЧНУ АПАРАТУРУ (ЕМА).....	301
4.1.1. Класифікація електронної медичної апаратури.....	301
4.1.2. Техніка безпеки.....	302
4.1.3. Правила безпеки.....	304
4.1.4. Технічні характеристики ЕМА.....	305
4.2. СЕМІНАР “МЕТОДИКА ОДЕРЖАННЯ, РЕЄСТРАЦІЇ ТА ПЕРЕДАЧІ МЕДИКО-БІОЛОГІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ”.....	308
4.2.1. Прилади для вимірювання електричних параметрів та їх класифікація.....	311
4.2.2. Вимірювання сили струму, напруги, ЕРС, опору в електричному колі.....	313
4.2.3. Осцилографи, генератори, підсилювачі, датчики.....	316
4.3. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1 “РОБОТА З ФІЗИОТЕРАПЕВТИЧНОЮ АПАРАТУРОЮ”.....	324
4.3.1. Робота з УВЧ-апаратом.....	325
4.3.2. Ультразвуковий терапевтичний апарат.....	330
4.3.3. Апарат для дарсонвалізації “Іскра-1”.....	335

4.4. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2 “РОБОТА З ЕЛЕКТРОКАРДІОГРАФОМ ЕКСПЧТ-4”.....	337
4.5. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3 “РОБОТА З РЕОГРАФОМ РГЧ-01”.....	345
4.5.1. Додаткові теоретичні відомості.....	346
4.5.2. Стислі технічні характеристики та інструкція з експлуатації реографа РГЧ-01.....	350

РОЗДІЛ 5. ЕЛЕМЕНТИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ БІОФІЗИКИ ТА БІОФІЗИКИ МЕМБРАННИХ ПРОЦЕСІВ У КЛІТИНАХ.....	356
5.1. Міжмолекулярні взаємодії у біополімерах.....	358
5.1.1. Класифікація взаємодій у біополімерах.....	358
5.2. СТРУКТУРНА ОРГАНІЗАЦІЯ БЛІКІВ ТА НУКЛЕЙНОВИХ КИСЛОТ.....	371
5.2.1. Первинна структура.....	372
5.2.2. Вторинна структура.....	377
5.2.3. Третинна структура.....	380
5.2.4. Четвертинна структура.....	382
5.3. БУДОВА І ВЛАСТИВОСТІ БІОЛОГІЧНИХ МЕМБРАН.....	384
5.4. ПАСИВНИЙ ТА АКТИВНИЙ ТРАНСПОРТ РЕЧОВИН КРИЗЬ МЕМБРАННІ СТРУКТУРИ КЛІТИН.....	390
5.4.1. Пасивний транспорт незаряджених молекул.....	391
5.4.2. Пасивний транспорт іонів.....	394
5.4.3. Активний транспорт.....	399
5.5. Біологічні потенціали.....	402
5.5.1. Рівноважний мембранний потенціал Нервста.....	403
5.5.2. Дифузійний потенціал.....	405
5.5.3. Потенціал Доннана. Доннанівська рівновага.....	408
5.5.4. Стаціонарний потенціал Гольдмана-Ходжкіна-Катца.....	411
5.5.5. Потенціал дії. Механізм виникнення та поширення нервового імпульсу.....	414
5.6. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ.....	423
5.6.1. Лабораторна робота “Дослідження нелінійних властивостей провідності шкіри жаби”.....	423
5.6.2. Лабораторна робота “Дослідження дисперсії електричного імпедансу біологічних тканин”.....	428
5.6.3. Лабораторна робота “Вимірювання концентраційного потенціалу компенсаційним методом”.....	434
5.6.4. Практичне заняття “Вивчення біофізики мембран за допомогою комп’ютерних програм”.....	440

РОЗДІЛ 6. ТЕРМОДИНАМІЧНІ ТА СИНЕРГЕТИЧНІ ПРИНЦИПИ БІОФІЗИКИ СКЛАДНИХ СИСТЕМ..... 444

6.1. Відкриті біологічні системи, закони термодинаміки і термодинамічні потенціали.....	445
6.2. Основи термодинаміки незворотних процесів.....	449
6.2.1. Лінійний закон.....	449
6.2.2. Принцип симетрії кінетичних коефіцієнтів і виробництво ентропії.....	452
6.2.3. Спряження потоків у біологічних системах.....	454
6.2.4. Стационарний стан відкритих систем і теорема Пригожина щодо мінімуму виробництва ентропії.....	458
6.3. Відкриті медико-біологічні системи, що знаходяться далеко від рівноваги (елементи синергетики).....	460
6.4. Моделювання процесів у складних медико-біологічних системах.....	481
6.5. Практичне заняття “Термодинаміка відкритих біологічних систем”.....	489

РОЗДІЛ 7. ОПТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕДИКО-БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ..... 493

7.1. Інтерференція світла.....	495
7.1.1. Інтерференція від двох когерентних світлових джерел.....	497
7.1.2. Історія відкриття явища просвітлення оптики, праці О. Смакули.....	501
7.1.3. Інші застосування явища інтерференції світла.....	503
7.2. Дифракція світла.....	505
7.2.1. Дифракція на щілині в паралельних променях.....	507
7.2.2. Дифракційна решітка.....	508
7.2.3. Голографія та її застосування в медицині.....	511
7.3. Геометрична оптика.....	513
7.3.1. Ідеальна центрована оптична система.....	514
7.3.2. Похибки оптичних систем.....	517
7.3.3. Оптична мікроскопія.....	520
7.4. Поляризація світла.....	523
7.4.1. Поляризація світла при відбиванні та заломленні.....	525
7.4.2. Поляризація при подвійному променезаломленні в кристалах.....	526
7.4.3. Поляризація світла при проходженні крізь поглинаючі анізотропні речовини.....	528

7.4.4. Обертання площини поляризації оптично активними речовинами.....	529
7.5. Взаємодія світла з речовиною.....	531
7.5.1. Дисперсія світла.....	531
7.5.2. Поглинання світла.....	534
7.5.3. Розсіяння світла.....	537
7.6. Фізичні основи термографії, закони теплового випромінювання.....	539
7.6.1. Закон Кірхгофа.....	542
7.6.2. Закон випромінювання Планка.....	543
7.6.3. Закон Стефана–Больцмана.....	545
7.6.4. Закон зміщення Віна.....	546
7.6.5. Випромінювання Сонця.....	548
7.6.6. Інфрачервоне випромінювання.....	549
7.6.7. Ультрафіолетове випромінювання.....	549
7.7. Біофізичні основи зорової рецепції.....	550
7.8. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ.....	558
7.8.1. Лабораторна робота “Вивчення мікроскопа та вимірювання мікрооб’єктів”.....	558
7.8.2. Лабораторна робота “Визначення концентрації розчинів рефрактометричним методом”.....	562
7.8.3. Лабораторна робота “Визначення концентрації розчину поляриметричним методом”.....	566

РОЗДІЛ 8. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ..... 574

8.1. Основні уявлення квантової механіки.....	575
8.1.1. Місце квантової механіки в системі наук про рух тіл.....	575
8.1.2. Гіпотеза де Бройля.....	577
8.1.3. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга.....	581
8.1.4. Основне рівняння квантової механіки – рівняння Шредінгера.....	583
8.1.5. Рівняння Шредінгера для атома водню.....	585
8.1.6. Багатоелектронні атоми.....	587
8.2. ВИПРОМІНЮВАННЯ ТА ПОГЛИНАННЯ ЕНЕРГІЇ АТОМАМИ ТА МОЛЕКУЛАМИ.....	589
8.2.1. Атомні спектри.....	589
8.2.2. Молекулярні спектри.....	591
8.3. ЛЮМІНЕСЦЕНЦІЯ.....	595
8.3.1. Види люмінесценції.....	596
8.3.2. Фотолюмінесценція, закон Стокса.....	597
8.3.3. Механізми люмінесценції.....	599
8.4. ІНДУКОВАНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ.....	602
8.4.1. Рівноважна та інверсна заселеність.....	603

8.4.2. Будова та принцип дії лазера	604
8.5. ЕЛЕКТРОННИЙ ПАРАМАГНІТНИЙ РЕЗОНАНС, ЯДЕРНИЙ МАГНІТНИЙ РЕЗОНАНС ТА ЇХ МЕДИКО-БІОЛОГІЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ.....	606
8.5.1. Метод електронного парамагнітного резонансу.....	606
8.5.2. Метод спінових міток (спінових зондів)	611
8.5.3. Спів-імунологічний метод	613
8.5.4. Метод ядерного магнітного резонансу	614
8.6. ПРАКТИКУМ З КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ	619
8.6.1. Практичне заняття “Основні уявлення квантової механіки”	619
8.6.2. Лабораторна робота “Застосування фотоелемента для виміру освітленості та визначення його чутливості”	626
8.6.3. Лабораторна робота “Вивчення роботи оптичного квантового генератора”	631
РОЗДІЛ 9. ІОНІЗУЮЧЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ ТА ЙОГО ДІЯ НА МЕДИКО-БІОЛОГІЧНІ ОБ’ЄКТИ.....	636
9.1. РЕНТГЕНІВСЬКІ ПРОМЕНІ	637
9.1.1. Історія відкриття рентгенівських променів, праці І. Пулюя.....	637
9.1.2. Природа рентгенівських променів і методи їх отримання.....	638
9.1.3. Гальмівне рентгенівське випромінювання	640
9.1.4. Характеристичне рентгенівське випромінювання, його природа. Закон Мозлі.....	642
9.2. РАДІОАКТИВНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ	645
9.2.1. Радіоактивність, її властивості	645
9.2.2. Основний закон радіоактивного розпаду, період напіврозпаду, активність	649
9.2.3. Правила зміщення, особливості спектрів при радіоактивному розпаді	654
9.3. ОСНОВИ ДОЗИМЕТРІЇ ІОНІЗУЮЧОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ.....	659
9.3.1. Експозиційна доза, її потужність, одиниці.....	659
9.3.2. Поглинена доза, її потужність, одиниці.....	661
9.3.3. Еквівалентна доза, її потужність, одиниці	663
9.3.4. Дозиметри іонізуючого випромінювання.....	666
9.4. ВЗАЄМОДІЯ ІОНІЗУЮЧОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ З РЕЧОВИНОЮ.....	669
9.4.1. Первинні фізичні механізми взаємодії рентгенівського випромінювання з речовиною.....	669
9.4.2. Первинні механізми дії радіоактивного випромінювання і потоків частинок на речовину.....	675
9.4.3. Фізико-хімічні механізми радіаційних пошкоджень.....	679
9.4.4. Ефект дії малих доз іонізуючого випромінювання	684

9.5. ЗАСТОСУВАННЯ РЕНТГЕНІВСЬКОГО ВИПРОМІВАННЯ В МЕДИЦИНІ	688
9.5.1. Методи рентгенодіагностики	688
9.5.2. Рентгенотерапія	696
9.5.3. Рентгенівський структурний аналіз в медико-біологічних дослідженнях	697
9.5.4. Променеві навантаження на медичний персонал при рентгенодіагностичних дослідженнях	698
9.5.5. Деякі факти реакції крові на опромінення	701
9.5.6. Опромінення малими дозами великих груп людей	703
9.5.7. Латентний період – час виявлення в організмі порушень, викликаних радіацією	704
9.5.8. Проблеми ризику, пов’язаного із радіаційною дією	705
9.6. КОМП’ЮТЕРНА ТОМОГРАФІЯ.....	706
9.6.1. Рентгенівська томографія.....	706
9.6.2. ЯМР-томографія.....	713
9.6.3. Позитронна емісійна томографія.....	716
9.7. ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ “РЕНТГЕНІВСЬКЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ, ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ”	720
9.8. ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ “РАДІОАКТИВНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ ТА ЙОГО ДІЯ НА БІОБ’ЄКТИ”	723
9.9. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА “ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЕНТА ЛІНІЙНОГО ПОСЛАБЛЕННЯ ГАММА-ВИПРОМІНЮВАННЯ”	726
9.10. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА “РОБОТА З ДОЗИМЕТРОМ ДРГЗ-04”	732

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

**О.В. Чалий, Я.В. Цехмістер, Б.Т. Агапов, А.В. Меленевська, М.І. Мурашко,
Н.Ф. Рядченко, Н.В. Стучинська**

МЕДИЧНА І БІОЛОГІЧНА ФІЗИКА

Підписано до друку 10.03.05. Формат 60x84\16. Папір офсет.
Друк офсет. Ум. друк. арк. 44,175. Обл.-вид. арк. 40,3. Наклад 200 прим.
Замов. № 5-92.
Видавництво "Книга плюс", 01001, м. Київ-1, Головна пошта, а/с 222.
Свідоцтво ДК№ 1280 від 18.03.2003.

Чалий О.В., Агапов Б.Т., Цехмістер Я. В. та ін.

414 Медична і біологічна фізика: Підручник для студентів вищих медичних закладів освіти III-IV рівнів акредитації. - К.: Книга плюс, 2004. - 760 с.
ISBN 966-7619-60-5

У підручнику викладені найважливіші аспекти медичної і біологічної фізики, медичної апаратури, математичної обробки медико-біологічної інформації. Містить лабораторні і практичні роботи, приклади розв'язків основних типів задач. Структура і зміст підручника повністю адаптовані до вимог нової програми з медичної та біологічної фізики, що затверджена Міністерством охорони здоров'я України.

Книга призначається передусім для студентів вищих медичних закладів освіти III-IV рівнів акредитації, а також викладачів, науковців і всіх, хто цікавиться сучасною медичною та біологічною фізикою.

З питань придбання книги просимо звертатися за тел. (044) 246 80 54
E-mail: bookplus@gu.kiev.ua, <http://www.bookplus.com.ua>

Друк відповідає якості плівок наданих замовником.

Виготовлено у друкарні ТОВ "Четверта хвиля".

МЕДИЧНА І БІОЛОГІЧНА
ФІЗИКА

За редакцією проф. О.В. Чалого