МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Л. І. Турчанінова
О. В. Доля

ПРАКТИКУМ ІЗ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Київ
КОНДОР
2007

УДК 519.101+519.17
ББК 22.174
Т 86

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист МОНУ№ 1.4/18-Г-150 від 23.01.2007).

Рецензенти:
С.М.Краснитський, доктор фіз.-мат. наук, професор
В.М. Михайленко, доктор технічних наук, професор

Турчанінова Л.І., Доля О.В.
Т 86 Практикум з вищої математики. Навчальний посібник. – К.: Кондор, 2007. – 172 с.

ISBN 978-966-351-145-0

Пропонований навчальний посібник є результатом узагальнення досвіду викладання курсу вищої математики для студентів архітектурних спеціальностей. Мета посібника – навчити студентів самостійно розв'язувати проблеми архітектурного проектування сучасними методами. Тому збірник містить не тільки базовий матеріал програми з вищої математики, а і матеріал, пов'язаний з різноманітними ситуаціями в практичній діяльності архітектора.

Кожна тема супроводжується стислим викладом теоретичного матеріалу і докладно розв'язаними типовими задачами.

Посібник стане в нагоді і для студентів, аспірантів, слухачів мережі ФПК технічних спеціальностей денної і особливо заочної форм навчання.

ББК 22.174

ISBN 978-966-351-145-0

© Л.І. Турчанінова, О.В.Доля, 2006
© Кондор, 2006

Зміст

Передмова 4
Тема 1. Поняття числа 5
Задачі 11
Тема 2. Елементи комбінаторики 19
Задачі 22
Тема 3. Вступ до теорії графів 25
Задачі 32
Тема 4. Лінійна алгебра 37
Задачі 44
Тема 5. Векторна алгебра 47
Задачі 58
Тема 6. Аналітична геометрія 61
Задачі 78
Тема 7. Функція дійсної змінної, властивості і графічне зображення 83
Задачі 90
Тема 8. Границя функції 93
Задачі 98
Тема 9. Неперервність функції. Властивості неперервних функцій 102
Задача 106
Тема 10. Похідна та диференціал функції, їх застосування 109
Задачі 116
Тема 11. Первісна. Невизначений інтеграл 121
Задачі 125
Тема 12. Визначений інтеграл та його застосування 130
Задачі 134
Тема 13. Диференціальне числення функцій багатьох змінних 137
Задачі 144
Відповіді, вказівки 147
Список літератури 170

ПЕРЕДМОВА

Сучасний рівень і темпи розвитку архітектурного проектування висувають перед молодими спеціалістами важливу вимогу – не тільки мати науковий потенціал в обраній діяльності, але й ефективно застосовувати здобуті знання для розв'язку проблем, що виникають в їх практичній діяльності.

Останнім часом практики використовують методи математичного програмування і сіткового планування, що базуються на лінійній алгебрі, математичному аналізі функцій однієї і багатьох змінних, дискретній математиці та інших розділах вищої математики.

Навчальний посібник містить 13 розділів, що включають в себе основні питання навчальної програми з вищої математики для архітектурних спеціальностей вищих закладів освіти. Всі розділи супроводжуються основними відомостями з теорії, визначеннями, формулами і докладно розв'язаними типовими задачами. Це дає студентам широкі можливості для активної самостійної роботи і заощадження часу.

В основу книги покладено матеріал навчально-методичного видання Турчанінової Л.І. «Збірник завдань з математики для аудиторної та індивідуальної роботи для студентів архітектурних спеціальностей» 2001 року. Цей матеріал пройшов апробацію і був суттєво доповнений.

Автори сподіваються на широке використання видання студентами не тільки архітектурних спеціальностей, а і всіх інших технічних спеціальностей, як денної так і заочної форм навчання, зокрема студентами дистанційної форми навчання для самостійного вивчення матеріалу. Книга стане в нагоді викладачам для проведення практичних занять і слухачам мережі ФПК.

В посібник увійшли матеріали різних математичних видань, які включені в список використаної літератури.

Задачник розроблений викладачами КНУБА: к.т.н., доц. Турчаніновою Л.І. (теми 1-12), асистентом Доля О.В. (тема 13 та теоретичний матеріал до тем 4-9).

Автори виражають вдячність за цінні побажання щодо покращення змісту і структури посібника рецензентам: д.ф.-м.-н., професору С.М.Краснитському та д.т.н., професору В.М.Михайленку. Ми також вдячні Загайній Л.С. за допомогу у підготовці до видання задачника.

Київ, січень 2007 р.

Тема 1

Поняття числа

Інтуїтивне визначення множини за Кантором: множина S є будь-яке зібрання визначених і різних між собою об'єктів нашої інтуїції або інтелекту, яке розуміється як єдине ціле. Ці об'єкти називаються **елементами** або **членами** множини S.

Кантор ввів поняття **потужності** (або об'єму) **множини**: дві множини мають однакову потужність, якщо члени будь-якої з них можна зіставити членам іншої, утворивши пари відповідних членів.

Зліченною множиною називається будь-яка множина, елементи якої можна бієктивно (взаємно-однозначно) зіставити з усіма натуральними числами.

Кажуть, що зліченна множина має потужність N_0 («алеф-нуль»), а будь-яка множина, що рівнопотужна з множиною усіх підмножин довільної зліченної множини, має потужність 2^{N_0} (або має потужність **континуума**).

Дві множини називаються **еквівалентними**, якщо між їх елементами можна встановити взаємно-однозначну відповідність.

Класична теорема Кантора формулюється таким чином: дійсний континуум є незліченим. Іншими словами, множину дійсних чисел не можна розташувати у послідовність, так як між двома дійсними числами завжди знайдеться третє.

Інтуїтивний принцип об'ємності: дві множини **рівні** в тому і тільки в тому випадку, коли вони містять одні і ті ж елементи.

Твердження, що множина A складається з різних елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (і тільки з них), умовно записуємо:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Зокрема, $\{x\}$ – так звана **одинична множина** – є одноелементна множина, єдиним елементом якої являється x. **Порожня множина** не містить жодного елемента і позначається символом $\varnothing$.

Під **формою від** x будемо розуміти скінченну послідовність зі слів і символу x таку, що якщо кожний символ x з цієї послідовності замінити одним і тим же іменем деякого предмета відповідного роду, то в результаті отримаємо вислів.

З точки зору граматики форму від x можна визначати і по іншому – як речення, в якому щось стверджується про x.

Опис множини за допомогою форми базується на **інтуїтивному принципі абстракції:** будь-яка форма $P(x)$ визначає деяку множину A за умови, що елементами множини A є тільки ті предмети a, що роблять $P(a)$ справжнім вислівом.

Форму $P(x)$, що використовується для побудови деякої множини, називають **властивістю, що визначає множину:** $\{x | P(x)\}$.

Якщо A і B дві множини, то кажуть, що A **включена** в B (символічний запис: $A \subseteq B$), якщо кожен елемент множини A являється одночасно елементом множини B. В цьому випадку кажуть також, що множина A є **підмножиною** множини B. Множина A **строго включена** в B (символічно: $A \subset B$), або B строго включає A, або A є **справжня підмножина** B, якщо $A \subset B$ і $A \neq B$.

Кожна множина $A \neq \varnothing$ має принаймні дві різні підмножини: саме A і $\varnothing$. Крім того, кожний елемент a множини A визначає деяку підмножину множини A:

$$\{a\} \subseteq A.$$

Підмножини A і $\varnothing$ називаються **невласними**, а всі інші підмножини множини A називаються **власними** (або справжніми). Множина, елементами якої являються всі підмножини множини A, називається множиною підмножин A або множиною ступенем A і позначається $P(A)$.

Прийнято позначати **множину натуральних чисел** через N:

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}. \tag{1.1}$$

Система **цілих чисел** позначається через Z:

$$Z = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}. \tag{1.2}$$

Множина раціональних чисел позначається:

$$Q = \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{m}{n},\ m \in Z,\ n \in Z, n \neq 0 \right\}. \tag{1.3}$$

Числа, які представляють собою довжини відрізків, що неспільномірні з одиницею масштабу (тобто їх довжину не можна виразити цілим або дробовим числом) в сучасній математиці називаються **ірраціональними. Раціональне**

число є нескінченним десятковим періодичним дробом, а ірраціональне число – нескінченним десятковим неперіодичним дробом.

Сукупність раціональних і ірраціональних чисел утворює **множину дійсних чисел,** яку прийнято позначати R.

Відстань від дійсного числа a до нуля називається його **абсолютною величиною** або **модулем** і позначається $|a|$.

Нехай числа a і b дійсні і задовольняють нерівності: $a < b$. Наведемо ще приклади множин дійсних чисел:

- **відрізок** або **сегмент** $[a,b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$;
- **інтервал** або **відкритий відрізок** $(a,b) =]a,b[= \{x \in R | a < x < b\}$;
- **півінтервал** $(a,b] =]a,b] = \{x \in R | a < x \le b\}$;
  $[a,b) = [a,b[= \{x \in R | a \le x < b\}$;
- **нескінченні інтервали** або **півінтервали** $(-\infty,\infty) = R$,
  $[-\infty,a] = \{x \in R | -\infty < x \le a\}$;
  $[-\infty,a] = \{x \in R | -\infty < x < a\}$;
  $[a,\infty) = \{x \in R | a \le x < \infty\}$; ;
- **ε – окіл точки** C $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) = \{x \in R \mid c-\varepsilon < x < c+\varepsilon\}$.

Об'єднанням двох множин A і B називається множина всіх елементів, що належать або множині A, або множині B, або їм обом відразу:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Перетином двох множин A і B називається множина всіх елементів, що належать одночасно і множині A, і множині B:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Розбиттям множини A називається така система V власних підмножин, що не перетинаються, множини A, в якій кожний елемент множини A є водночас і елементом деякої (а, внаслідок, точно однієї) підмножини з системи V.

Абсолютним доповненням множини A називається множина елементів універсальної множини U, які не належать множині A:

$$\overline{A} = \{x | x \in U \text{ і } x \notin A\}.$$

Відносним доповненням або різницею двох множин A і B називається множина тих елементів множини A, які водночас не належать множині B:

$$A - B = \{x | x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

Симетричною різницею або сумою множин A і B називається множина елементів множин A і B, що не належать водночас обом множинам:

$$A + B = \{x | x \in A \text{ або } x \in B \text{ і } x \notin (A \cap B)\}.$$

Основні властивості операцій над множинами представлені в таблиці 1.1, в якій U – універсальна множина, а A, B, C – її підмножини.

Таблиця 1.1

1. Комутативні закони: $A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$.
2. Асоціативні закони: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
3. Дистрибутивні закони: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. Закони доповнення: $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
5. Закони тотожності: $A \cup \varnothing = A,\ A \cap U = A$. $A \cup U = U,\ A \cap \varnothing = \varnothing$.
6. Закони ідемпотентності: $A \cup A = A,\ A \cap A = A$.
7. Закони поглинання: $A \cup (A \cap B) = A,\ A \cap (A \cup B) = A$.
8. Закони де Моргана: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
9. Властивості $\varnothing$ і U: $\overline{\varnothing} = U,\ \overline{U} = \varnothing$.
Властивості доповнення, різниці, симетричної різниці, включення і рівності:
10. Якщо $A \cup B = U$ і $A \cap B = \varnothing$, то $B = \overline{A}$.
11. $\overline{A} = U - A$.
12. $\varnothing = A - U$.
13. $A - B = A \cap \overline{B}$.
14. $A + B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
15. $A + B = B + A$.

16. $(A+B)+C = A+(B+C)$.
17. $A+\varnothing = \varnothing + A = A$.
18. $A \subset B$ тоді і тільки тоді, коли $A \cap B = A$ або $A \cup B = B$, або $A \cup \overline{B} = \varnothing$.
19. $A = B$ тоді і тільки тоді, коли $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \varnothing$).

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.
Довести, що {1, 2, 3, 4} = {1, 2, 4, 4, 1, 3, 1}.
Доведення.
Обидві множини містять лише чотири різних елементи, а саме 1, 2, 3, 4. Тому вони складаються з одних і тих же елементів. На практиці не слід записувати множину так, як записано праворуч. Елементи, що повторюються, не грають ролі в операціях над множинами і тому немає потреби їх записувати.

До речі, дані множини не еквівалентні, так як множина зліва складається з чотирьох елементів, а праворуч – з восьми. *

Приклад 2.
Довести, що $\{\{1,2\}\} \neq \{1,2\}$.
Доведення.
Множини не містять одні й ті ж елементи, так як ліворуч – одноелементна множина, що містить єдиний елемент $\{1,2\}$, а множина праворуч має два елементи, а саме 1 і 2. *

Приклад 3.
Для множини $A = \{a,b,c\}$ побудувати $P(A)$.
Розв'язання.
Виходячи зі сказаного вище, маємо:

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}. \ *$$

Приклад 4.
Зобразити на діаграмі Венна множини: $P = \{a,b,c,d\}$, $Q = \{a,c\}$, $R = \{d,f\}$.
Розв'язання.
Виходячи з визначення, діаграма Венна для заданих множин представлена на рис. 1.1.

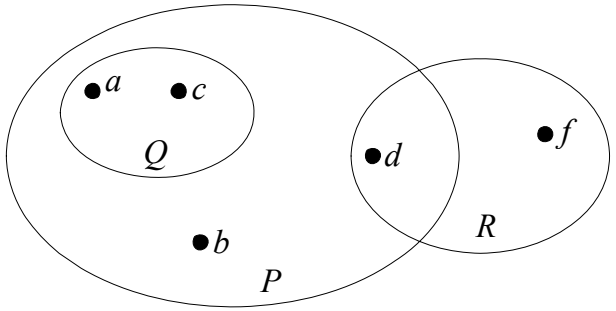


Рис. 1.1

З цієї діаграми ми бачимо, що $Q \subset P$. Цей факт ілюструється тим, що точки a і c використовуються тільки один раз і множина Q повністю лежить усередині множини P. Крім того, з рисунку бачимо, що $R \not\subset P$, так як точка f не належить множині P. *

Приклад 5.
$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$. Визначити множину $A \cup B$.
Розв'язання.
За визначенням

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

На рис. 1.2 зображена діаграма Венна. Об'єднання множин заштриховане. *

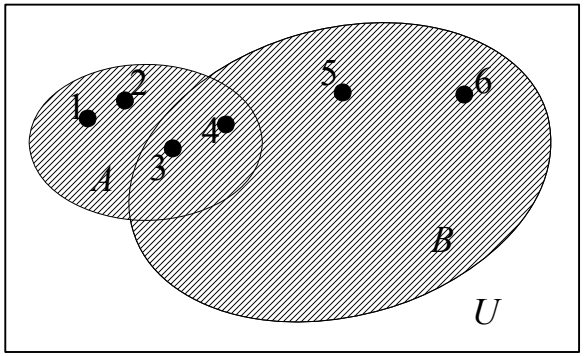


Рис. 1.2

Приклад 6.
$A=\{x|0<x\le 3\}$, $B=\{x|-1<x<2\}$. Визначити множину $A\cap B$.

Розв'язання.
За визначенням
$A\cap B=\{x|0<x<2\}$. *

Приклад 7.
$U=\{1,3,5,7,9\}$, $A=\{1,5,9\}$. Визначити множину $\overline{A}$ і розбиття V множини U.

Розв'язання.
З визначення $\overline{A}=\{3,7\}$. Тоді $V=\{\{1,5,9\},\{3,7\}\}$. *

Приклад 8.
$A=\{x|3\le x\le 6\}$, $B=\{x|0\le x\le 4\}$. Визначити множину $A-B$.

Розв'язання.
З визначення $A-B=\{x|4<x\le 6\}$. *

Приклад 9.
$A=\{1,2,3,4,7\}$, $B=\{2,5,7,9,11\}$. Визначити множини $A+B$ і $A\cup B$.

Розв'язання.
З визначення $A+B=\{1,3,4,5,9,11\}$, $A\cup B=\{1,2,3,4,5,7,9,11\}$.*

Задачі

1.1. Покажіть на числовій осі множину точок, яким відповідають всі натуральні числа x, якщо
1) $|x|<5$; 2) $|x-2|<12$; 3) $|x+5|+3\le 14$

1.2. Покажіть на числовій осі множину точок, яким відповідають всі цілі числа x, якщо вони задаються умовами задачі 1.1.

1.3.а) Розташуйте у порядку зростання числа: $-15;\ 3;\ -1;\ -|-4|;$ $|-2|;\ 0;\ 1/2;\ 0{,}9;\ |5|;\ -4$;

б) розташуйте у порядку спадання числа: $-7;\ 3;\ |-2|;\ -1;\ -|-3/4|;$ $-0{,}75;\ -0{,}8;\ 0{,}85;$

в) порівняйте числа: -27 *і* $8;\ 4{,}25$ *і* $-16{,}2;\ -0{,}75$ *і* $-3/4;\ |-5|$ *і* $|5|;\ |-4{,}7|$ *і* $|-8|;$ $-19{,}2$ *і* $-21;\ 4\sqrt{5}+\sqrt{82}$ *і* 18.

1.4. Запишіть число 2,3(2) у вигляді звичайного дробу.

1.5. Чи має розв'язки рівняння a+x=b, де a і b натуральні числа:
а) у множині натуральних чисел;
б) у множині цілих чисел;
в) у множині раціональних чисел?

1.6. Чи має розв'язки рівняння ax=b, де a і b – цілі числа:
а) у множині цілих чисел;
б) у множині раціональних чисел;

1.7. Назвіть найбільше ціле число, яке належить множині;
1) $[-12;9]$; 2) $[-1;17)$; 3) $(-8;-5]$; 4) $(-\infty;31]$; 5) $(-\infty;+\infty)$; 6) $(-\infty;11)$.

1.8. Які з цілих чисел належать множині:
1) $[0;\ 8]$; 2) $(3;-3)$; 3) $(-5;3]$; 4) $[-1;0)$; 5) $[-2;-1]$

1.9. Знайдіть множину цілих розв'язків нерівності:
1) $-8<x<1$; 2) $-3<x<3$; 3) $-3\le x<5$; 4) $-1\le x\le 1$;

1.10. Які з натуральних чисел належать множині з задачі 1.8?

1.11. Знайдіть множину натуральних розв'язків нерівності з задачі 1.9.

1.12. Перерахуйте всі елементи наступних множин:
а) $\{x|x$ – є цілим множником числа $6\}$;
б) $\{x|x^2-4=0,\ \ x-2=0\}$;
в) $\{x|x$ є літерою слова «парабола» $\}$;
г) $\{x|x$ є однією з цифр числа 4363151 $\}$;
д) $\{x|x\in N$, x є непарним числом, що менше $7\}$.

1.13. Запишіть множини за допомогою форми:
а) {2, 4, 6, 8, 10};
б) {к, о, л, о};
в) {1, 3, 5, 7, …}.

1.14. Які з приведених нижче співвідношень хибні і чому:
а) $x\in\{2,a,x\}$;
б) $3\in\{1,\{2,3\},4\}$;
в) $x\in\{1,\ sinx\}$;
г) $\{x,y\}\in\{a,\{x,y\},b\}$.

1.15. Вкажіть, які з приведених множин скінченні, а які нескінченні:

а) $\{x, y, p, q\}$;

б) $\{x | x$ є піщинкою в пустелі $\}$;

в) $\{x | x \in N$, x кратне 12$\}$;

г) $\{x | x$ є комбінацією літер алфавіту $\}$;

д) $\{x | x \in [0,1]\}$;

е) $\{x | x$ є пряма , що проходить крізь т. $(2,2)\}$;

ж) $\{x | x \in R$, $\sin x = 0\}$;

з) $\{x \in R | x \in [3,5]\}$.

1.16. Чи рівні між собою множини A і B (якщо ні, то чому):

а) $A = \{2,5,4\}, B = \{5,4,2\}$;

б) $A = \{1,2,4,2\}, B = \{1,2,4\}$;

в) $A = \{2,4,5\}, B = \{1, \{5,2\}, 6\}$;

г) $A = \{1, \{2,5\}, 6\}, B = \{1, \{5,2\}, 6\}$;

д) $A = \{1, \{3,4\}, 8\}, B = \{1, \{4,3\}, 5\}$;

е) $A = \{2, \{1,3\}, 7\}, B = \{1,2,3,7\}$;

ж) $A = \{x | x$ є літера слова "sin"$\}$; $B = \{y | y$ є літера слова «innins» $\}$;

з) $A = \varnothing$, $B = \{\varnothing\}$;

і) $A = \{0\}$, $B = \{\varnothing\}$.

1.17. Довести, що множина Z зліченна.

1.18. Довести, що множина всіх парних чисел зліченна.

1.19. Довести, що множина степенів числа 2, тобто $\{x \in N | x = 2^n, n \in N\}$ зліченна.

1.20. Виберіть порожні множини:

а) $\{x \in R \ | x^2 = 0\}$;

б) $\{y | y$ є заміжня стара діва$\}$;

в) $\{\varnothing\}$;

г) $\{x | x$ є людиною, вік якої перевищує 200 років$\}$;

д) $\{x \in R | x^2 - 2x + 2 = 0\}$.

1.21. Довести, що $A = B$, якщо $A = \{x \in N | x^2 - 7x + 6 = 0\}$, $B = \{1,6\}$.

1.22. Довести, що існує лише одна множина, яка не містить елементів.

1.23. Чи буде множина $\varnothing$ елементом класу множин:
$A = \{\{1,2,3\}, (3,10), (7,9)\}$?

1.24. Які з множин $\varnothing$, 0, $\{\varnothing\}$ можуть бути описані як клас множин?

1.25. Чи пов'язані множини A і B співвідношенням включення (якщо да, то вкажіть, яка з них є підмножиною другої)?

а) $A = \{1,3,5\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$;

б) $A = \{\{1\}, \{2,3\}, \{4\}\}$; $B = \{\{1\}, \{2,3\}, \{4,5\}\}$;

в) $A = \{x \in R | 0 \le x \le 5\}$, $B = \{x \in R | 5 \le x < 7\}$;

г) $A = \{x \in N | 1 \le x \le 5\}$, $B = \{x \in N | 2 < x \le 4\}$.

1.26. Задані множини:
$A = \{1,3,5,7\}$; $B = \{3,5\}$; $E = \{2\}$; $D = \{5,7,9\}$.
Вкажіть серед наступних стверджень справжні і хибні:

а) $B \subset A$; б) $B \subseteq A$; в) $E \subset B$; г) $B \subset D$; д) $D \subset A$; є) $\varnothing \subset B$;

ж) $E \not\subset B$; з) $B \subset B$; і) $A \subset B$.

1.27. В яких відношеннях між собою знаходяться наступні три множини:
$A = \{1,3\}$;
B – множина непарних додатних чисел;
C – множина розв'язків рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$?

1.28. $U = \{1,2,3,...,20\}$. Записати наступні підмножини U:
A – парних чисел;
B – квадратів чисел;
C – непарних чисел;
D – простих чисел.
В яких відношеннях знаходяться ці множини?

1.29. Скільки k – елементних підмножин має множина потужності n $(k \le n)$?

1.30. Напишіть всі підмножини кожної з наступних множин:

а) $A = \{x | x$ є голосною буквою $\}$;

б) $B = \{y | y$ є парне число між 1 і 7$\}$.

1.31. Перепишіть наступні твердження, використовуючи операції над множинами:

а) S є підмножиною S;

б) x належить множині P;

в) множина Y не є підмножиною множини X;

г) множина S є підмножиною множини T;

д) z не належить множині Z.

1.32. Намалюйте діаграму Венна для ілюстрації відношень між наступними множинами:

$A = \{0,1,2,3,4,5\}$; $B = \{2,3,4,7,8\}$; $C = \{2,5,7\}$; $D = \{1,2,3\}$.

1.33. Задані множини A,B,C,D із задачі 1.21. Завершіть формулювання наступних тверджень вставляючи замість крапок правильні символи:

$A \ldots B$; $2 \ldots B$; $\{1,2\} \ldots A$; $D \ldots A$; $\varnothing \ldots C$; $B \ldots C$.

1.34. Запишіть множини, які отримані в результаті наступних операцій над множинами з задачі 1.17:

а) $A \cup B$; д) $A \cap D$;

б) $A \cap B$; е) $C - B$;

в) $A \cap C$; ж) $C + \overline{D}$.

г) $C - A$;

Сформулюйте властивість, що визначає кожну з отриманих множин.

1.35. Що можна сказати про відношення між множинами A,B,C, які представлені діаграмами Венна на рис. 1.3. Запишіть за допомогою операцій над множинами вирази для множин, що відповідають замальованим областям:

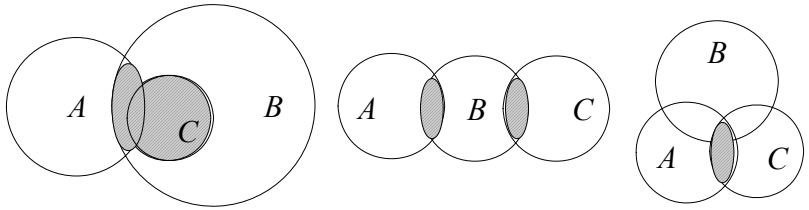


Рис. 1.3

1.36. Серед наступних множин вкажіть пари множин, що перетинаються:

$A = \{x, y\}$; $B = \{1,2,4, y\}$; $C = \{a,b,c,2\}$; $D = \{1,x,a\}$; $E = \varnothing$;

$F = \{2,3,b,c\}$.

1.37. Чи правда, що $A - B = B - A$? Якщо ви вважаєте, що в загальному випадку це не вірно, то чи можете ви вказати частковий випадок, коли це твердження справджується? Чи таке твердження завжди хибне?

1.38. Що представляє собою множина $A - \overline{A}$ для будь-якої множини A?

1.39. Якщо $A \subset B$, то якою буде множина $A - B$? Намалюйте діаграму Венна.

1.40. Доведіть, що $A - B = \varnothing$ тоді і тільки тоді, коли $A \cap B = A$.

1.41. Нехай A – множина коренів рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$, а $B = \{0,2\}$. Знайдіть $A \cap B$, $A \cup B$, $A–B$, $B–A$.

1.42. Нехай A – множина значень функції

$$y = signx = \begin{cases} 1, x > 0; \\ 0, x = 0; \\ -1, x < 0, \end{cases}$$

а B – множина коренів рівняння $x(x-1)(x+2) = 0$. Знайдіть $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, $A + B$.

1.43. Нехай A – область визначення функції $y = 3^{\sqrt{-\sin^2 x}}$, а B – множина розв'язків рівняння $\cos x = 1$. Знайдіть $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, $A + B$.

1.44. Нехай A – область визначення функції $y = \ln(x-1)$, B – область визначення функції $y = \sqrt{3-x}$, C – множина розв'язків нерівності $x^2 - 6x + 8 \geq 0$. Знайдіть $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $C - A$, $B - A$, $A - B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B$, $A + B$, $B + C$, $A + C$.

1.45. Зі 100 студентів англійську мову знає 28 студентів, німецьку – 30, французьку – 42, англійську і німецьку – 8, англійську і французьку – 10, німецьку і французьку – 5, всі три мови знають 3 студенти. Скільки студентів не знають жодної з трьох мов?

1.46. Задана універсальна множина $U = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ і її підмножини:

$P = \{a,b,c,d\}$; $Q = \{a,e\}$; $R = \{b,d,e,f\}$.

Випишіть елементи, які утворюють множини:

1) $P \cap (Q \cup R)$; 2) $\overline{R} \cup \overline{Q}$;

3) $U \cap \overline{P}$; 4) $(P \cup Q) \cap (P \cup R)$;

5) $(P \cap Q) \cup R$; 6) $U \cap (P \cup R)$;

7) $(Q \cup R) \cup \varnothing$; 8) $(P \cup U) \cup R$;

9) $\overline{P} \cup (P \cap Q)$; 10) $U \cap (R \cup P)$;

11) $(P - Q) \cup R$; 12) $(Q + R) \cup P$;

13) $(Q + \overline{P}) \cap R$; 14) $(U - P) + (Q - R)$;

15) $(P \cup Q) - (P \cap Q)$; 16) $(P - R) - (Q - R)$;

17) $\overline{R} \cup \overline{Q}$; 18) $(P - \overline{Q}) + R$;

19) $(\overline{P} \cap \overline{Q}) + (R - P)$; 20) $\overline{(R \cap Q)} + (\overline{P} - \overline{Q})$;

21) $(\overline{R} - Q) \cap (\overline{P} + R)$; 22) $(U \cap \overline{P}) + (Q - R)$;

23) $\overline{P} \cup (P \cap \overline{Q})$; 24) $Q \cup (R \cup \varnothing)$.

1.47. Виконайте завдання 1.35 для $U = \{x | 0 \le x \le 10\}$, $P = \{x | 1 \le x \le 6\}$,

$Q = \{x | 4 < x \le 8\}$, $R = \{x | 7 < x \le 10\}$.

1.48. Доведіть наступні тотожності:

$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup B$;

$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;

$(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$;

$(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$;

$A \cap B \cap C = A - (A - (B \cap C))$;

$A \cap (B \cup C) = A - (A - B) \cap (A - C)$.

1.49. Продемонструйте справедливість основних законів алгебри множин на прикладі:

$U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$; $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{3,4,5,6\}$; $C = \{2,3,6,7\}$.

Намалюйте діаграми Венна.

1.50. Доведіть, що $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

1.51. Побудуйте $P(S)$, якщо:

а) $S = \{a\}$; б) $S = \{a,b\}$; в) $S = \{a,b,c\}$.

1.52. Покажіть, що $B = \{C_1, C_2, C_3\}$, де $C_1 = \{1,3\}$, $C_2 = \{4,6\}$, $C_3 = \{2,5\}$ є розбиттям множини $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

1.53. Нехай $S = \{p,q,r,s,t,u\}$. Вкажіть серед наступних класів підмножин такі, які складають розбиття:

а) $\{A_1 = \{p,s,t\}, A_2 = \{q,r\}, A_3 = \{t,u\}\}$;

б) $\{B_1 = \{p\}, B_2 = \{q\}, B_3 = \{r,u\}, B_4 = \{s,t\}\}$;

в) $\{C_1 = \{p,q,t\}, C_2 = \overline{C_1}\}$;

г) $\{\{r,s,t\}, \{p,q\}, \{u\}, \varnothing\}$;

д) $\{\{p,q,r,s,t,u\}\}$.

1.54. Нехай A – будь-яка не порожня власна підмножина множини U. Покажіть, що клас $b = \{A, \overline{A}\}$ складає розбиття множини U.

1.55. Нехай U – множина натуральних чисел $U = \{1,2,3,\ldots\} = N$.

Покажіть, що клас $\{C_1, C_2, C_3\}$, де

$C_1 = \{x | x = 3n,\ n = 1,2,\ldots\}$,

$C_2 = \{x | x = 3n - 1,\ n = 1,2,\ldots\}$,

$C_3 = \{x | x = 3n - 2,\ n = 1,2,\ldots\}$

складає розбиття множини U.

1.56. Побудуйте всі можливі розбиття множини $U = \{0,1,2,3\}$ (їх всього 15).

1.57. Знайдіть перетин множин коренів рівнянь:

$x^2 - 4x + 3 = 0$ і $x^2 - 3x + 2 = 0$;

$x^2 - 2x - 3 = 0$ і $(x + 1)(x - 8) = 0$;

$x^2 - 6x + 9 = 0$ і $|3x| = 9$;

$x^2 - 1 = 0$ і $|2x|/2x = 1$, x □ 0.

1.58. Знайдіть множину допустимих значень x:

1) $\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 - 9} = 5$; 2) $\sqrt{x^2 + x - 12} + \sqrt{x - 1} = 2$;

3) $y = \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + 1}$; 4) $y = \sin^2 \sqrt{1 - x^2} + \cos^2 \sqrt{1 - x^2}$;

5) $y = \sqrt{\lg \cos x}$; 6) $y = \sqrt{2^{\cos x} - 2}$.

1.59. Задана універсальна множина $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ і відомо, що A, B, C – її підмножини. Назвіть елементи множини B, якщо:

1) $A = \{3, 5\}$; $B \cap C = \{3\}$; $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$;

2) $A \cap A = \varnothing$; $C \cup A = \{6\}$; $B \cup C = U$, $B \cap C = \varnothing$.

1.60. Задані множини:

$P = \{x \mid x \in N, x < 20, x$ – непарне число$\}$,

$Q = \{x \mid x \in N, x < 20, x$ – парне число$\}$,

$S = \{x \mid x \in N, x < 20, x$ ділиться на 3$\}$,

$T = \{x \mid x \in N, x < 20, x$ ділиться на 4$\}$.

Назвіть елементи заданих вище множин і множин:

$Q \cap T$; $Q \cap S$; $P \cap S$; $P \cap Q$; $Q \cap S \cap T$.

1.61. Знайдіть множину точок перетину кривих:

$x^2 + y^2 = 25$ і $(x - 13)^2 + y^2 = 144$;

$y = -5x + 12$ і $y = x^2 - 6x + 10$;

$y = x^2$ і $x^2 + y^2 = 30$;

$y = x^2 + 4$ і $xy = 5$.

1.62. На якій множині дані рівності будуть тотожностями?

1) $|x| = x$; 2) $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$; 3) $\dfrac{4x^2 + 4x + 1}{2x + 1} = 2x + 1$;

4) $\sqrt{x^2} = -x$; 5) $\sqrt{x^2} = x$; 6) $\sqrt{x^2} = |x|$.

Тема 2

Елементи комбінаторики

Основний принцип комбінаторики (ОПК) :

нехай треба виконати послідовно K дій, причому першу дію можна виконати n_1 способами, другу дію – n_2 способами і т.д., к – ту дію – n_k способами, тоді всі K дій разом можна виконати $N = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ способами.

Множину потужності n будемо називати n **- множиною.**

n - множина називається **впорядкованою**, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність певне число (номер елемента) від 1 до n так, що різним елементам відповідають різні числа.

Різні впорядковані n - множини, які утворені з елементів n - множини, називаються **перестановками без повторень з** n **елементів**, а їх загальна кількість позначається Pn і дорівнює :

$$P_n = n!$$

Зауважимо, що : $n! = (n-1)! \cdot n$

і $0! = 1.$

Значення $n!$ для $1 \le n \le 10$ наведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

n	$n\ !$	n	$n\ !$
1	**1**	**6**	**720**
2	**2**	**7**	**5040**
3	**6**	**8**	**40320**
4	**24**	**9**	**362880**
5	**120**	**10**	**3628800**

Впорядковані m- підмножини, які утворені з елементів n - множини $(m \angle\ n)$,

називаються **розміщеннями без повторень з** n **елементів по** m **,** а їх загальна кількість позначається A_m^n і дорівнює :

$$\mathrm{A}_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

З визначення випливає :

$$\mathrm{A}_n^n = \mathrm{P}_n;\ \mathrm{A}_n^0 = 1$$

Невпорядковані m - підмножини, які утворені з елементів n - множини $(m < n)$, називаються **сполуками без повторень з** n **елементів по** m **,** а їх загальна кількість позначається C_n^m і дорівнює:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Зауважимо, що $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$, $C_n^m = \dfrac{\mathrm{A}_n^m}{m\ !}$

Властивості чисел C_n^m :

– якщо $0 \le m \le n$ і $m, n \in Z$, то $C_n^m = C_n^{n-m}$;

– $\forall n \in Z$, $n \le 0$ вірна тотожність $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;

– якщо $0 \le m \le n$ і $m, n \in Z$, то $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$

Остання властивість дозволяє обчислювати значення C_n^m за допомогою трикутної таблиці, яку називають **трикутником Паскаля** :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
……

В $(n+1)$ - му рядку таблиці по порядку стоять $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Скільки шестизначних чисел, кратних п'яти, можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 за умови, що у числі цифри не повторюються?

Розв'язання.

Для того, щоб число, складене з заданих цифр, ділилось на 5, необхідно і достатньо, щоб цифра 5 стояла на останньому місці. Інші п'ять цифр можуть стояти на решті п'яти місцях у будь-якому порядку. Тому чисел N кратних 5 буде стільки, скільки можна утворити перестановок з п'яти елементів, тобто

$$N = \mathrm{P}_5 = 5! = 120$$

Приклад 2.

Група студентів вивчає 7 учбових дисциплін. На понеділок плануються заняття з чотирьох різних дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

Розв'язання.

Різних способів складання розкладу занять, очевидно, стільки, скільки існує чотирьохелементних впорядкованих підмножин з семиелементної множини. Значить число способів N дорівнює числу розміщень з 7 елементів по 4, тобто

$$N = A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840.$$

Приклад 3.

На диск сейфа нанесені 12 літер, а код складається з 5 літер. Скільки невдалих спроб може зробити людина, яка не знає коду, а знає тільки, що він складається з 5 літер?

Розв'язання.

За ОПК людині потрібно зробити 5 дій: набрати першу літеру, набрати другу літеру і т.д., набрати п'яту літеру. Першу дію вона може зробити 12 способами, другу – 12 способами і т.д., п'яту – 12 способами. Тому всі п'ять дій вона може зробити за ОПК

$$N = 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 = 12^5 = 248832$$

способами. Тому кількість невдалих спроб дорівнює 248831.

Приклад 4.

При грі в доміно 4 гравця ділять порівну 28 кісток. Скількома способами вони можуть це зробити?

Розв'язання.

Перший гравець повинен вибрати 7 кісток з 28. Так як їх порядок не має значення, то він має C_{28}^7 можливостей. Після цього, другий гравець буде мати C_{21}^7 можливостей. Третій гравець обирає з 14 кісток, а тому має C_{14}^7 варіантів. Ну а четвертому гравцю залишається C_7^7 варіантів, тобто єдиний вибір. За ОПК загальна кількість можливостей N дорівнює :

$$N = C_{28}^7 \cdot C_{21}^7 \cdot C_{14}^7 \cdot C_7^7 = \frac{28!}{21!\,7!} \cdot \frac{21!}{14!\,7!} \cdot \frac{14!}{7!\,7!} = \frac{28!}{(7!)^4}$$

Зауваження.

Аналогічно знаходиться кількість роздач карт при грі в преферанс, коли 32 карти діляться між трьома гравцями по 10 карт кожному, а дві карти кладуть у прикуп:

$$N = \frac{32!}{(10!)^3 \cdot 2!} = 2 \quad 753 \quad 294 \quad 408 \quad 504 \quad 640$$

Задачі

2.1. Скільки діагоналей має опуклий n-кутник?

2.2. Ніякі три діагоналі опуклого десятикутника не перетинаються в одній точці. Визначити число точок перетину діагоналей.

2.3. На першій з двох паралельних прямих розташовані 15 точок, на другій – 21 точка. Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках?

2.4. На яке найбільше число частин можуть розбити площину n прямих?

2.5. Скільки шестизначних чисел, кратних п'яти, можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 за умови, що у числі цифри не повторюються?

2.6. Група студентів вивчає 7 учбових дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на понеділок, якщо на цей день заплановані заняття з 4-х дисциплін?

2.7. Скільки різних перестановок можна утворити з букв слова «задача»?

2.8. У чемпіонаті з футболу приймають участь 18 команд, причому кожні дві команди зустрічаються між собою 2 рази. Скільки матчів було зіграно?

2.9. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо:
а) жодна з цифр не повторюється;
б) цифри можуть повторюватись;
в) всі цифри непарні і можуть повторюватись?

2.10. В групі 30 студентів. Скількома способами можна виділити двох студентів для чергування, якщо:
а) один з них повинен бути старшим;
б) старшого не повинно бути?

2.11. На п'ять співробітників виділені три путівки. Скількома способами їх можна розподілити, якщо:
а) всі путівки різні;
б) всі путівки однакові?

2.12. Скількома способами на шаховій дошці можна розставити 8 тур одного коліру так, щоб вони не били одна одну і стояли тільки на білих клітинах?
2.13. Автомобільний номер складається з двох букв і чотирьох цифр. Скільки різних номерів можна скласти, якщо використовується абетка з 32 літер?
2.14. На зборах повинні виступати чотири особи: A, B, C, D. Скількома способами їх можна записати у списку ораторів, якщо B може виступати тільки перед A?
2.15. Хокейна команда складається з двох вратарів, семи захисників і десяти нападників. Скількома способами тренер може утворити стартову шістку, яка складаєтья з вратаря, двох захисників і трьох нападників?
2.16. Скількома способами 12 однакових монет можна розмістити по п'яти різним гаманцям так, щоб жоден гаманець не залишився порожнім?
2.17. Скількома способами можна спакувати дев'ять різних книжок у п'ять бандеролей, якщо чотири бандеролі повинні містити по дві книжки?
2.18. Скількома способами 2n елементів можна розбити на пари?
2.19. Скількома способами можна скласти трьохколірний прапор з горизонтальних смуг, якщо є матеріал п'яти різних кольорів?
2.20. Скількома способами можна скласти чотирьохколірний прапор з горизонтальних смуг, якщо є матеріали чотирьох різних кольорів?
2.21. В деякій державі не було двох мешканців з однаковою кількістю зубів. Яка може бути найбільша чисельність населення цієї держави (найбільша кількість зубів дорівнює 32).
2.22. Скількома способами можна обрати голосну і приголосну літери із слова «камзол» ?
2.23. Скільки можна скласти трьохзначних чисел, в яких немає цифри 8 ?
2.24. Автомобільний номер складається з однієї, двох або трьох літер і чотирьох цифр. Знайти число таких номерів, якщо використовують абетку з 32 літер?
2.25. На колі розташовано 10 точок. Скільки існує різних опуклих многокутників, вписаних в це коло?
2.26. Скільки різних перестановок можна утворити із букв слова «ВОДОВОРОТ»?
2.27. Скількома способами можна вибрати із слова «логарифм» дві приголосні і одну голосну літеру ?
2.28. Скількома способами можна розташувати білі фігури (3 тури, 2 пішака, 2 коня і королеву) на першій лінії шахової дошки?
2.29. Скільки існує трикутників, вершини яких являються вершинами даного опуклого шестикутника?
2.30. Скількома способами з 28 кісток доміно можна вибрати дві кістки так, щоб їх можна було прикласти одну до одної?

2.31. У кошику лежать 12 яблук і 10 бананів. Дмитро обирає з нього яблуко або банан. Після цього Надійка бере і яблуко і банан. В якому випадку Надійка має більшу свободу вибору: якщо Дмитро взяв яблуко або якщо він взяв банан?
2.32. У Петра є 7 детективів, а у Миколи – 9. Скількома способами вони можуть обмінятись: а) однією книгою? б) двома книгами?
2.33. Скільки існує шестизначних чисел, всі цифри яких парні?
2.34. Десять туристів розміщуються в готелі в два тримісних і один чотиримісний номери. Скільки існує способів їх розміщення?
2.35. Скількома способами можна розсадити 10 студентів на 16 місць?
2.36. Троє студентів здають іспит. Скількома способами можуть бути поставлені їм оцінки, якщо відомо, що ніхто з них не отримав «відмінно»?
2.37. Скількома способами можна впорядкувати множину чисел $\{1, 2, ..., 2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?
2.38. Скількома способами можна розташувати білі фігури (2 коня, 2 слона, 2 тури, ферзя і короля) на першій лінії шахової дошки?
2.39. З колоди, яка містить 52 карти, вилучили 10 карт. В скількох випадках серед них буде не менш ніж два тузи?
2.40. В першості по футболу приймають участь 17 команд, які розігрують золоту, срібну та бронзову медалі. Скількома способами можуть бути розподілені ці медалі?
2.41. З колоди, яка містить 52 карти, вилучають 10 карт. В скількох випадках серед них буде : а) рівно один туз? б) рівно два тузи?
2.42. У мами 2 яблука і 3 груші. Кожного дня на протязі п'яті діб поспіль вона дає дочці по одному фрукту. Скількома способами це можна зробити?
2.43. Код складається з геометричної фігури (коло, квадрат, трикутник, трапеція), літери (абетка з 32 літер) і цифри. Скільки таких кодів можна скласти?
2.44. На першому поверсі семиповерхового будинку в ліфт увійшло 5 пасажирів. Скільки варіантів виходу пасажирів із ліфту, якщо на перших трьох (починаючи з другого) ліфт не зупинявся.
2.45. Наукове товариство складається з 25 осіб. Треба обрати президента, віце – президента, вченого секретаря і скарбника. Скількома способами може бути зроблений цей вибір, якщо кожен може посідати лише одну посаду?
2.46. У англійців прийнято давати дітям декілька імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо загальна кількість імен дорівнює 300, а дитині дають не більше трьох імен?
2.47. Скількома способами можна вказати на шаховій дошці білий і чорний квадрати, які не лежать на одній горизонталі і вертикалі?
2.48. П'ять дівчат і троє хлопчиків треба розбити на 2 команди по 4 особи в кожній, причому в кожній команді повинен бути хоча б один хлопець. Скількома способами можна зробити таке розбиття?

Тема 3

Вступ до теорії графів

Пара $(V(G), E(G))$ називається:

• **простим графом**, якщо $V(G)$ – непорожня, скінченна множина елементів, які називаються **вершинами** графа, $E(G)$ – скінченна множина невпорядкованих пар різних елементів з множини вершин $V(G)$, які називаються **ребрами** графа;

• **загальним графом** або **графом**, якщо $V(G)$ – непорожня, скінченна множина вершин, $E(G)$ – скінченна сім'я невпорядкованих пар елементів з множини вершин $V(G)$;

• **орієнтованим графом** або **орграфом**, якщо $V(G)$ – непорожня, скінченна множина вершин, $E(G)$ – скінчена сім'я впорядкованих пар елементів з множин вершин $V(G)$.

Сім'єю елементів називається сукупність елементів, в якій деякі елементи можуть повторюватись.

Дамо ще декілька визначень.

Дві вершини a і b графу G називаються **суміжними**, якщо існує ребро, що їх з'єднує. При цьому вершини a і b називаються **інцидентними** цьому **ребру**, а ребро – **інцидентним вершинам** a і b.

Два різних ребра графа G називаються **суміжними**, якщо вони мають принаймні одну спільну вершину.

Степенем (валентністю) вершина a графа G називається число ребер, інцидентних вершині a.

Степінь вершини a будемо позначати через $\rho(a)$. При обчисленні степеня вершини a петлю в a враховують двічі.

Вершина степеня 0 називається **ізольованою вершиною**, вершина степеня 1 називається **висячою** або **кінцевою** вершиною.

Лема Ейлера.

Сума степенів всіх вершин графа G є парним числом, яке дорівнює подвоєному числу ребер.

Наслідок з леми Ейлера.

В будь-якому графі G число вершин непарного степеня повинно бути парним.

Два графа G_1 і G_2 називаються **ізоморфними**, якщо між множинами їх вершин $V(G_1)$ і $V(G_2)$ існує така бієктивна відповідність, що число ребер, які з'єднують будь-які вершини в G_1, дорівнює числу ребер, які з'єднують відповідні вершини в G_2.

Підграфом графа G називається граф, усі вершини якого належать $V(G)$, а всі ребра належать $E(G)$.

Граф називається **плоским (планарним),** якщо існує ізоморфний йому граф, який зображується на площині без перетину ребер.

Матрицею суміжності графа G з $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ називається матриця $A = (a_{ij})$ розмірності $n \times n$, в якій елемент a_{ij} дорівнює числу ребер в G, що з'єднують вершини v_i і v_j.

Можна побудувати матрицю $M(m_{ij})$ розмірності $n \times m$ для орграфа G з $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ і $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, рядки якої відповідають вершинам, а стовпчики – ребрам графа G. В цій матриці:

• $m_{ij} = 1$, якщо вершина v_i є початковою для ребра e_j;

• $m_{ij} = -1$, якщо вершина v_i є кінцевою для ребра e_j;

• $m_{ij} = 0$, якщо вершина v_i не інцедентна ребру e_j.

Якщо граф G – неорієнтований, то використовують тільки значення $m_{ij} = 1$ або $m_{ij} = 0$. Матриця $M(m_{ij})$ називається **матрицею інцидентності** графу G.

Маршрутом довжини m називається послідовність m ребер графу (не обов'язково різних) таких, що кожні два сусідніх ребра мають спільну вершину.

Якщо в маршруті S початкова і кінцева вершини співпадають, то маршрут називається **циклічним.**

Маршрут називається **ланцюгом,** а циклічний маршрут – **циклом,** якщо кожне його ребро зустрічається тільки один раз (вершини можуть повторюватись, причому декілька разів). Ланцюг і цикл називаються **простими,** якщо в них жодна вершина не повторюється.

Дві вершини неорієнтованого графу G називаються **зв'язними,** якщо існує маршрут з кінцями в цих вершинах.

Граф називається **зв'язним,** якщо будь-яка пара вершин в ньому зв'язна.

Наведемо декілька тверджень відносно зв'язності.

Теорема 3.1.

Якщо у скінченому графі G рівно дві вершини мають непарний локальний степінь, то вони зв'язні.

Теорема 3.2.

Граф G з n вершинами і з числом ребер, більшим ніж C_n^2 є зв'язним.

Теорема 3.3.

Кожний неорієнтований граф розпадається єдиним чином в пряму суму своїх зв'язних компонент.

Якщо існує така вершина, віддалення якої перетворює зв'язний граф (або зв'язну компоненту незв'язного графу) у незв'язний, то вона називається **точкою зчленування.** Ребро з такими же властивостями називається **мостом.**

Теорема 3.4.

Якщо ребро графу не належить жодному циклу цього графа, то це ребро являється мостом.

Особливий інтерес представляють зв'язні ациклічні графи.

Зв'язний граф, який не містить циклів, називається **деревом.**

Незв'язний граф, компоненти якого являються деревами, називається **лісом**.

Будь-яка зв'язна сукупність ребер графу G, яка не містить циклів, разом з інцидентними їм вершинами утворює дерево графу G. Якщо таке дерево містить всі вершини графу G, то воно називається **каркасом** графу G. Ребра графу G, які належать його дереву, називаються гілками.

Число віддалених ребер в цій процедурі характеризує міру зв'язності графу G і називається **цикломатиним числом** графу G і позначається літерою μ.

Теорема 3.5.

Якщо зв'язний граф G має m ребер і n вершин, то $\mu = m - (n-1)$.

Розглянемо деякі важливі типи графів.

Граф G, у якого $V(G) = 0$, називається **порожнім** графом.

Простий граф, в якому будь-які дві вершини суміжні, називається **повним** графом, і позначається *Kn*, де n – кількість вершин.

Теорема 3.6.

Граф K_n має рівно $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер.

Граф G, у якого $\rho(a) = \kappa$, $\forall a \in V(G)$, називається **регулярним графом степеня *к***.

Регулярні графи степеня 3 називаються також **кубічними** графами. Відомим прикладом кубічного графу являється так званий **граф Петерсена**, представлений на рис. 3.1.

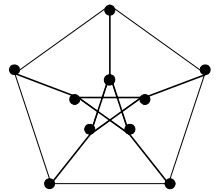


Рис. 3.1

Серед регулярних графів особливо цікаві так звані платонові графи. Регулярні графи, утворені вершинами і ребрами п'яти правильних многогранників – платонових тіл: тетраедра, куба, октаедра, додекаедра і ікосаедра, називаються **платоновими** графами.

На рис. 3.2 представлені платонові тіла.

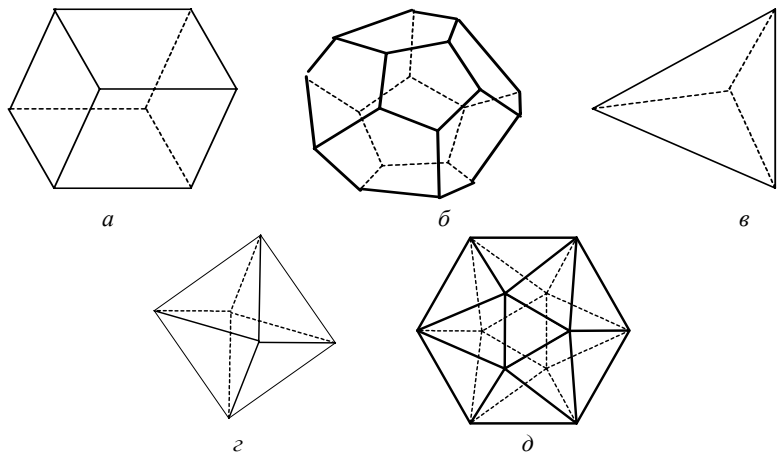


Рис. 3.2 Платонові тіла: куб (*а*); додекаедр (*б*); тетраедр (*в*); октаедр (*г*), ікосаедр(*д*)

Якщо в графі G множину вершин $V(G)$ можна розбити на дві підмножини $V_1(G)$ і $V_2(G)$, що не перетинаються, так, щоб кожне ребро графу зв'язувало вершини з різних підмножин, то граф G називається **дводольним** і позначається $G(V_1, V_2)$.

Якщо дводольний граф – простий і кожна вершина з однієї долі суміжна з усіма вершинами з іншої долі, то цей граф називається **повним дводольним** графом і позначається $K_{m,n}$, де m і n – число вершин відповідно в V_1 і V_2.

Повний дводольний граф виду $K_{1,n}$ називається **зоряним.**

Зв'язний граф G називається **ейлеровим**, якщо він містить цикл, який проходить через кожне його ребро. Такий цикл називається **ейлеровим.** Якщо зв'язний граф G містить маршрут, який проходить через кожне його ребро, то цей граф називається **півейлеровим.**

Теорема 3.7.

Зв'язний граф G являється ейлеровим тоді і тільки тоді, коли кожна його вершина має парний степінь.

Зв'язний граф G називається **гамільтоновим**, якщо він містить простий цикл, який проходить через всі вершини графу. Такий цикл називається **гамільтоновим циклом.** Граф, що містить ланцюг, який проходить через кожну його вершину, називається **півгамільтоновим.**

Незважаючи на схожість у визначеннях для ейлерових і гамільтонових графів, відповідні теорії для цих понять мають мало спільного. Теорема 3.7 дає необхідну і достатню умову для того, щоб зв'язний граф був ейлеровим.

Теорема 3.8.

Якщо в графі G з n вершинами для будь-якої пари вершин V_i і V_j

$$\rho(V_i) + \rho(V_j) \geq n - 1,$$

то граф G має гамільтонів ланцюг. Якщо

$$\rho(V_i) + \rho(V_j) \geq n,$$

то граф G має гамільтонів цикл.

З цієї теореми випливає як наслідок результат Дірака.

Теорема 3.9 Дірака (1952 р.)

Якщо в простому графі G з n $(n \geq 3)$ вершинами $\rho(V) \geq \frac{n}{2}$ для будь-якої вершини V, то граф G є гамільтоновим.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Побудувати матрицю суміжності для графа G на рис. 3.3.

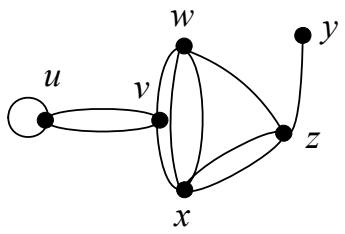


Рис. 3.3

Розв'язання.

Для цього графа $V(G) = \{u, v, w, x, z, y\}$. Значить матриця суміжності має розмірність 6×6. Для побудови матриці зробимо допоміжну таблицю (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

	u	**v**	**w**	**x**	**z**	**y**
u	1	2	0	0	0	0
v	2	0	1	1	0	0
w	0	1	0	2	1	0
x	0	1	2	0	2	0
z	0	0	1	2	0	1
y	0	0	0	0	1	0

Тепер записуємо матрицю суміжності:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} *$$

Приклад 2.

Побудувати матрицю інциденцій для графа G на рис. 3.4.

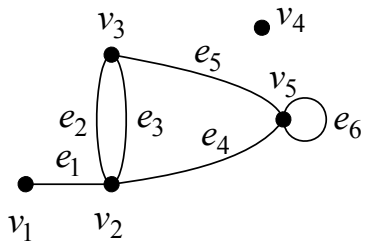


Рис. 3.4

Розв'язання.

Цей граф є загальним. Для нього множина вершин $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$, а сім'я ребер $E(G)=(v_1v_2;v_2v_3;v_2v_3;v_2v_5;v_3v_5;v_5v_5)$. Зробимо допоміжну таблицю (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1					
v_2	1	1	1	1		
v_3		1	1		1	
v_4						
v_5				1	1	

Кожен стовпчик таблиці містить обов'язково два одиничних елемента (для орграфа ці елементи завжди мають різні знаки і дорівнюють відповідно 1 і –1). Кількість одиниць в рядку дорівнює степеню відповідної вершини (для орграфа кількість додатних одиниць визначає додатний степінь, а кількість від'ємних одиниць – від'ємний степінь). Нульовий рядок відповідає ізольованій вершині v_4, а нульовий стовпчик – петлі.

Зауважимо, що нульовий стовпчик матриці інцидентності лише вказує на наявність петлі, але не містить відомостей про те, з якою вершиною ця петля пов'язана.

Використовуючи табл. 4, записуємо матрицю інцидентності:

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}.\ *$$

Задачі

3.1. Намалюйте плоский граф G, у якого $V(G)=\{a,b,c,d,f\}$ і $\rho(d)=2$, $\rho(f)=0$. Складіть матрицю суміжності і перевірте лему Ейлера.

3.2. Намалюйте граф G, у якого 5 вершин і:
а) одна з вершин ізольована і одна має степінь 4;
б) степені всіх вершин різні, тобто дорівнюють 0, 1, 2, 3, 4;
в) рівно дві вершини мають однаковий степінь.
Складіть матрицю суміжності і перевірте лему Ейлера.

3.3. Зобразити множину двозначних чисел, які можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, використовуючи:
а) орієнтований граф;
б) ліс.
Яка потужність цієї множини?

3.4. В графі G: $V(G)=\{V_1,V_2,\ldots,V_n\}$ і вершини V_i і V_j суміжні тоді і тільки тоді, коли числа $i,\ j$ взаємнопрості. Зобразити граф з $n=4$ і скласти його матрицю суміжності.

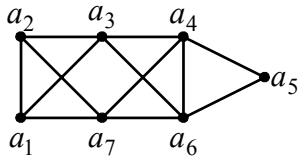
3.5. Доведіть, що з точністю до ізоморфізма існує рівно 4 простих графа з 3 вершинами і 11 – з 4 вершинами.

3.6. Намалюйте всі кубічні графи з не більш як 8 вершинами. Доведіть, що:
а) кубічний граф має парне число вершин. Чи можна узагальнити цю властивість на регулярні графи вищих степенів?
б) кубічний граф має точку зчленування тоді і тільки тоді, коли він містить міст;
в) найменше число вершин в кубічному графі, який містить міст, дорівнює 10.

3.7. Опишіть матрицю суміжності:
а) порожнього графу;
б) повного графу;
в) дводольного графу;

г) повного дводольного графу.

3.8. Для графу G вкажіть:



а) маршрут з a_1 до a_4;

б) ланцюг з a_1 до a_4;

в) ланцюг з a_1 до a_4 мінімальної довжини;

г) цикл максимальної довжини;

д) простий цикл мінімальної довжини.

Обчисліть цикломатичне число графу. Побудуйте каркас графу.

3.9. Яке найменше число ребер може мати зв'язний граф з n вершинами?

3.10. Обчисліть цикломатичне число для графів:

а) K_n; б) $K_{m,n}$; в) N_n;

г) платонових графів;

д) графа Петерсена;

е) регулярного графа степеня r.

3.11. Яке найменше число ребер містить простий цикл?

3.12. Доведіть, що існує рівно:

а) шість неізоморфних дерев з 6 вершинами;

б) одинадцять – з 7 вершинами.

3.13. Доведіть, що кожне дерево являється дводольним графом.

3.14. Які дерева являються повними дводольними графами?

3.15. Знайдіть каркас для графів:

а) K_5;

б) $K_{2,3}$;

в) платонових графів;

г) графа Петерсена.

3.16. Покажіть, що якщо кожний з двох різних циклів деякого графу G проходить через ребро e, то в графі G існує цикл, який не проходить через ребро e.

3.17. В графі Петерсена знайдіть:

а) маршрут довжини 4;

б) цикли довжини 5, 6, 8 і 9.

3.18. Покажіть як можна використати дводольний граф для зображення:

а) ринків збуту, куди підприємства поставляють свою продукцію;

б) будівельні майданчики мікрорайону, куди фірми постачають будівельні матеріали;

в) дружні відношення між юнаками та дівчатами вашої групи.

3.19. Намалюйте дводольний граф $G(V_1,V_2)$, у якого $V_1=\{1;2\}$, $V_2=\{3;4;5\}$, $\rho(1)=2$, $\rho(2)=3$, $\rho(3)=1$, $\rho(4)=1$, $\rho(5)=3$. Складіть його матрицю суміжності. Побудуйте його каркас. Визначіть кількість висячих вершин.

3.20. Для яких чисел m і n наступні графи являються ейлеровими:

а) $K_{m,n}$;

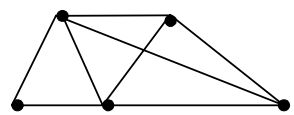
б) K_n.

3.21. Чи є серед платонових графів ейлерові? Якщо да, то знайдіть в них ейлерові цикли.

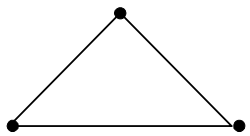
3.22. Які з зображених графів містять:

а) ейлерові цикли;

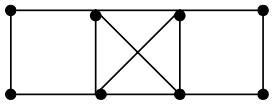
б) ейлерів ланцюг?



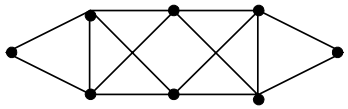
1



2



3



4

3.23. Для яких чисел m і n наступні графи являються гамільтоновими:

а) $K_{m,n}$;

б) K_n?

Знайдіть гамільтонові цикли.

3.24. Доведіть, що всі платонові графи являються гамільтоновими.

3.25. Намалюйте граф, утворений вершинами і ребрами додекаедра. Знайдіть гамільтонів цикл. Обчисліть цикломатичне число і побудуйте каркас.

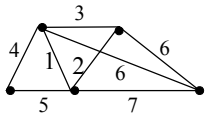
3.26. Наведіть приклад графа, який є ейлеровим, але не є гамільтоновим.

3.27. Наведіть приклад графа, який є гамільтоновим, але не є ейлеровим.

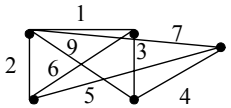
3.28. Які графи є водночас і ейлеровими і гамільтоновими? Що можна сказати про такі графи?

3.29. Які з графів задачі 3.22 являються гамільтоновими?

3.30. За допомогою алгоритму Краскала знайдіть каркас мінімальної довжини для графа G, зображеного на рисунку.

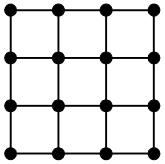


3.31. Чи існують гамільтонові цикли в графі, зображеному на рисунку?



Якщо так, то знайдіть серед них цикл найменшої довжини.

3.32. Квадрат розбито на n^2 мілких квадратів прямими, які паралельні його сторонам (на рисунку зображений випадок $n = 3$).
Чи має такий граф гамільтонові ланцюги і цикли?



3.33. Вартість прокладки комунікацій між шістью пунктами (тис. грн.) виражається таблицею:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	*	10	8	12	17	14
2		*	6	2	13	7
3			*	6	4	12
4				*	10	19
5					*	16

Побудуйте каркас мінімальної загальної вартості. Чи буде розв'язок єдиним? Якщо ні, то знайдіть всі екстремальні каркаси.

3.34. Взаєморозуміння між членами колективу, який складається з 7 осіб, оцінено по десятибальній шкалі (вищий бал – 10):

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	*	4	3	10	6	7	9
2		*	5	4	4	3	8
3			*	1	3	2	3
4				*	10	8	5
5					*	4	9
6						*	2

Побудуйте каркас максимального взаєморозуміння, який в деякий мірі характеризує найбільш ефективні контакти між членами колективу при розв'язуванні загальних питань.

3.35. Намалюйте графи для наступних відомих головоломок:

а) **ревниві чоловіки.** Три ревнивих чоловіка і їх жінки повинні переправитись через ріку. На переправі є тільки один маленький човен, який може витримати тільки дві особи. Як можуть переправитись всі шестеро, якщо ніякий чоловік не залишить свою жінку з двома іншими чоловіками?

б) **задача про розподіл.** Дві особи мають повний глечик вина місткістю 8 літрів і два порожніх глечика місткістю 5 і 3 літри. Як вони можуть розділити вино порівну?

в) **Ханойська башта.** Дошка має три гачка. На першому знаходяться m дисків, діаметри яких зменшуються від основи гачка. Як можна, перекладаючи диски по одному, розташувати їх в тому ж самому порядку на іншому гачку, якщо ні на якому кроці більший диск не може висіти після меншого (від основи гачка). Розгляньте випадок $m = 4$.

Тема 4

Лінійна алгебра

Система m лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:
Вирази:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (4.1)$$

де

x_j, $j = 1 \div n$ – невідомі;

a_{ij}, $i = 1 \div m$, $j = 1 \div n$ – коефіцієнти системи;

b_j, $j = 1 \div n$ – вільні члени.

Якщо всі $b_i = 0$, то система називається **однорідною,** в противному випадку – **неоднорідною.**

Множину n чисел $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ називають **розв'язком системи** (4.1), якщо кожне з рівнянь системи після підстановки в нього цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ перетворюється в рівність.

Множина розв'язків системи (4.1) може бути порожньою, мати єдиний елемент, бути нескінченною. В першому випадку кажуть, що система **несумісна,** в інших двох – **сумісна.** Якщо розв'язок єдиний, то кажуть, що система **визначена і сумісна.**

Коефіцієнти системи утворюють прямокутну матрицю A порядку $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

Матриця порядку $n \times n$ називається **квадратною:**

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

Елементи a_{ii}, де $i = 1 \div n$ квадратної матриці називаються **діагональними.**

Квадратна матриця, в якій всі елементи крім діагональних рівні 0, називається **одиничною** і позначається буквою E.

Дві матриці $A(a_{ij})$ і $B(b_{ij})$ однакового порядку називаються **рівними,** якщо $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j.$

Алгебраїчною сумою матриць $A(a_{ij})$ і $B(b_{ij})$ однакового порядку називається матриця $C(c_{ij})$ такого ж порядку, причому:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Добутком матриці $A(a_{ij})$ **на скаляр** λ називається матриця $D(d_{ij})$ такого ж порядку, причому:

$$d_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad \forall i, j\ .$$

Добутком матриці $A(a_{ij})$ порядку $m \times n$ на матрицю $B(b_{ij})$ порядку $n \times p$ називається матриця $C(c_{ij})$ порядку $m \times p$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{ki}, \quad i = 1 \div m, \quad j = 1 \div p. \qquad (4.4)$$

Матриці A і B називаються **переставними,** якщо

$$A \cdot B = B \cdot A\ .$$

Якщо в матриці $A(a_{ij})$ поміняти місцями рядки зі стовпчиками, то отримана матриця називається **транспонованою** до $A(a_{ij})$ і позначається $A^T(a_{ij})$.

Квадратна матриця називається **симетричною,** якщо

$$A^T = A.$$

Числовою характеристикою квадратної матриці $A(a_{ij})$ порядку $n \times n$ називається **визначник** або **детермінант** порядку n, який представляє собою алгебраїчну суму $n!$ доданків вигляду:

$$\det A = |A| = \sum_{P_n} (-1)^{inv(i_1, i_2, ..., i_n)} \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} ... a_{ni_n}\ . \qquad (4.5)$$

Якщо $|A| \neq 0$, матриця A називається **невиродженою,** в противному випадку – **виродженою.**

Для квадратної матриці порядку 2x2 з визначення випливає:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \qquad (4.6)$$

Визначник третього порядку обчислюють за правилом трикутника (рис. 4.1) та Саррюса (рис. 4.2):

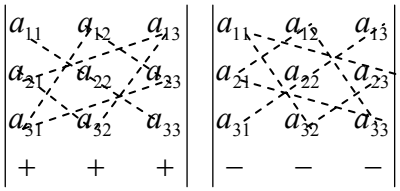


Рис. 4.1 (правило трикутника)

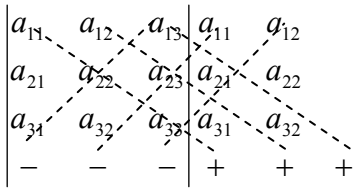


Рис. 4.2 (Правило Саррюса)

Для обчислення визначників вищих порядків використовують **властивості визначників.**

1.^{0} $|A| = |A^T|$.

2.^{0} Перестановка двох стовпчиків або двох рядків визначника рівносильна множенню його на (-1).

3.^{0} Якщо визначник має два однакових стовпчика або рядка, то він дорівнює нулю.

4.^{0} Спільний множник *к* всіх елементів рядка або стовпчик можна виносити за знак визначника.

5.^{0} Якщо всі елементи рядка або стовпчика рівні 0, то визначник теж дорівнює 0 (це наслідок властивості 4^0 у випадку *к=0*).

6.^{0} Якщо у визначнику відповідні елементи двох рядків або стовпчиків пропорційні, то визначник дорівнює 0.

7.^{0} Якщо до елементів деякого стовпчика (або рядка) додати відповідні елементи іншого стовпчика (або рядка), помножені на будь-який спільний множник, то величина визначника не змінюється. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Мінором M_{ij} **елемента** a_{ij} визначника порядка $n \times n$ називається визначник порядка $(n-1)\times(n-1)$, отриманий з даного визначника шляхом викреслювання i -го рядка та j -го стовпчика.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} **елемента** a_{ij} називається мінор цього елемента, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \qquad (4.7)$$

8.^{0}

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}, \; i = 1 \div n,$$

або (4.8)

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot A_{ki}, \; i = 1 \div n.$$

Матриця A^{-1} називається **оберненою до квадратної матриці** *A*, якщо:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \qquad (4.9)$$

Теорема 4.1.

Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця *A* була невиродженою, при цьому

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4.10)$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці *A* (див. (4.7)).

Систему (4.1) можна представити в матричному вигляді:

$$AX = B, \qquad (4.11)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (4.12)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Теорема 4.2.

Невироджена квадратна неоднорідна система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок, який задається у вигляді

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{4.14}$$

Введемо позначення для квадратної системи порядку $n \times n$ неоднорідних лінійних рівнянь:

Δ - визначник матриці коефіцієнтів системи;

Δ_{x_i} - визначник Δ, в якому стовпчик з коефіцієнтів при невідомих x_i замінений на стовпчик з вільних членів.

Теорема 4.3 (Крамера).

Якщо система порядку $n \times n$ невироджена, то вона має єдиний розв'язок, який задається формулою:

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}, \quad i = 1 \div n \tag{4.15}$$

Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один з визначників Δ_{x_i} не дорівнює 0, то система несумісна.

Якщо $\Delta = 0$ і всі Δ_{x_i} =0, тобто $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = ... = \Delta_{x_n} = 0$, то система може бути несумісною або мати безліч розв'язків.

Одним з найпоширеніших методів розв'язування систем лінійних рівнянь є метод послідовного виключення невідомих, або метод Гаусса. Цей метод можна використовувати при розмірах системи $m \times n$ та $n \times n$.

Спочатку нормують перше рівняння, поділивши його коефіцієнти на a_{11}. Утворене рівняння множать на перші коефіцієнти усіх інших рівнянь і послідовно віднімають від решти рівнянь. У результаті першу змінну буде виключено з усіх рівнянь, крім першого. На наступному етапі розв'язання така процедура застосовується до решти *n*-1 рівнянь, з яких виключається друга змінна. Процес йде доти, поки після n кроків система не буде зведена до трикутного вигляду.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Дано: матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Знайти: матрицю $C = AB$.

Розв'язання.

Маємо за формулами (4.4):

$$C = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-2) & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) & 0\cdot 2 + (-1)\cdot 0 & 0\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Приклад 2.

Дано: матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайти: матрицю A^{-1}.

Розв'язання.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0,$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Тоді
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(за формулою (4.10)).

Переконуємось, що $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

(за (4.9)).

Приклад 3.

Розв'язати за формулами Крамера систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y + z = 0; \\ 2x + y + z = 5; \\ 2y - z = 3. \end{cases}$$

Розв'язання.

Маємо за формулами (4.15):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Отже, $x = 1, y = 2, z = 1$.

Відповідь: $(1;2;1)$.

Приклад 4.

Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1; \\ -x + 2y - 3z = 3; \\ 2x - y + 3z = 2. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1; \\ 0 \cdot x + y - z = 2; \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2. \end{cases}$$

В останньому рівнянні 0=2, тому система несумісна.

Відповідь: система несумісна.

Задачі

4.1. Виписати матрицю системи лінійних рівнянь

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$

4.2. Виконати дії над матрицями:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $2 \bullet \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

4.3. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$; *б*) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$ *в*) $\begin{vmatrix} x-y & x+y \\ x+y & x-y \end{vmatrix}$; *г*) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$

д) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; *е)* $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$; *ж)* $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} 1 & n! & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ n+1 & (n+1)! & 1 \end{vmatrix}$; *к)* $\begin{vmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \sin\alpha & 1 \\ 2\cos^2\frac{\beta}{2} & \sin\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; *л)* $\begin{vmatrix} \cos 90^0 & \cos 135^0 & \sin 15^0 \\ \sin 0^0 & \sin 135^0 & tg 15^0 \\ tg 180^0 & tg 45^0 & \cos 15^0 \end{vmatrix}$;

4.4. Розв'язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; *б)* $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix} = -2x$;

в) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; *г)* $\begin{vmatrix} 3^x & 3^{x+1} \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 108$;

д) $\begin{vmatrix} x & \lg(2^x + x + 1) \\ 1 & 1 - \lg 5 \end{vmatrix} = 0$; *е)* $\begin{vmatrix} \sin x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = 0$;

4.5. Розв'язати нерівності:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ x & 10 & 12 \\ 5 & x & 12 \end{vmatrix} > -14$; *б)* $\begin{vmatrix} 4^x & 2 \\ 2^x & 1 \end{vmatrix} < 3$;

в) $\begin{vmatrix} \log_2(3x-1) & \log_2(2-x) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} < 0$

4.6. Обчислити алгебраїчні доповнення A_{14} і A_{32} для визначника:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

4.7. Використовуючи властивості визначників, підрахувати визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$; *б)* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

4.8. Розв'язати за правилом Крамера системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 7x + 4y = 8 \end{cases}$; *в)* $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 = 4 \end{cases}$; *в)* $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$; *д)* $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 3 \\ -x_1 + 2x_3 = -3 \end{cases}$

4.9. Розв'язати за методом Гаусса системи рівнянь 4.8: г), д), ж).

Тема 5

Векторна алгебра

Вектором називається напрямлений відрізок, який позначають $\overrightarrow{AB}$ (А-початкова точка, В – кінцева) або просто $\vec{a}$.

Довжина вектора $\vec{a}$ називається його **модулем** і позначається $|\vec{a}|$.

Вектор, довжина якого дорівнює 0, називається **нульовим** і позначається $\vec{0}$.

Одиничним називається вектор довжина якого дорівнює 1.

Вектори, які лежать на паралельних прямих (або на одній прямій), називаються **колінеарними**.

Вектори, які лежать в паралельних площинах (або на одній площині), називаються **компланарними**.

Вектори називаються **рівними** між собою, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і рівні за модулем.

Лінійні операції над векторами.

Сумою $\vec{a}+\vec{в}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{в}$ називається вектор, напрямлений з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{в}$ за умови, що кінець вектора $\vec{a}$ і початок вектора $\vec{в}$ збігаються (рис. 5.1).

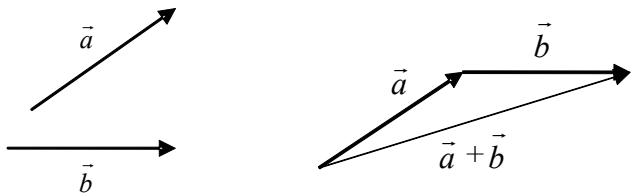


Рис. 5.1

Це так зване правило трикутника. Якщо вектори зведені до одного початку, то використовують рівносильне правило паралелограма: сума $\vec{a}+\vec{в}$ є вектор, що співпадає з тією діагоналлю паралелограма, побудованого на цих векторах, яка виходить із спільного початку векторів $\vec{a}$ і $\vec{в}$.

Сума кількох векторів – це вектор, який замикає ламану, побудовану з даних векторів (рис. 5.2).

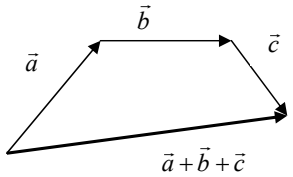


Рис. 5.2

Різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{в}$ розглядають як суму векторів $\vec{a}$ і (-$\vec{в}$) (рис. 5.3).

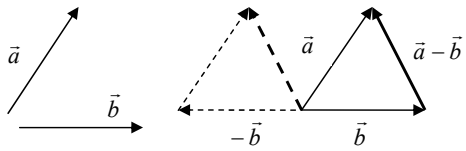


Рис. 5.3

Добутком дійсного числа λ на вектор $\vec{a}$ називають вектор $\vec{в}=\lambda\vec{a}$, довжина якого $|\vec{в}|=|\lambda||\vec{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$ при $\lambda>0$ і протилежний йому при $\lambda<0$.

Множина векторів утворює лінійний простір.

Лінійною комбінацією векторів $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, ..., $\vec{a_n}$ з дійсними коефіцієнтами λ_1, λ_2, ..., λ_n називається довільний вектор $\vec{a}$ виду:

$$\vec{a}=\lambda_1\vec{a_1}+\lambda_2\vec{a_2}+...+\lambda_n\vec{a_n}, \text{ де n } \in N \qquad (5.1).$$

Якщо вектор поданий у вигляді лінійної комбінації деяких векторів, то кажуть, що він **розкладений за цими векторами**.

Вектори $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, ..., $\vec{a_n}$ називають **лінійно залежними**, якщо хоча б один з них є лінійною комбінацією інших. В противному випадку вектори називають **лінійно незалежними.**

Розмірність лінійного простору – це максимально можлива кількість лінійно незалежних векторів в ньому.

Якщо розмірність лінійного простору векторів дорівнює n, то будь-яка впорядкована сукупність з n лінійно незалежних векторів в ньому називається **базисом лінійного простору**.

Базис називається **ортонормованим**, якщо його вектори попарно ортогональні і одиничні. Прийнято в просторі такий базис позначати $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, а на площині $\vec{i}$, $\vec{j}$ і називати **декартовим**. Тоді розклад вектора (5.1) по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ матиме вигляд:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (5.2)$$

Коефіцієнти розкладу (5.2) називаються **координатами** вектора $\vec{a}$. В цьому випадку використовують позначення:

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\} \qquad (5.3)$$

Декартовою прямокутною системою координат в просторі називається сукупність точки О (початку координат) і ортонормованого базису. Прямі, що проходять через т. О в напрямку базисних векторів, називаються **координатними_осями**, а координати вектора $\vec{a}$ – це його проекції на координатні осі (рис. 5.4).

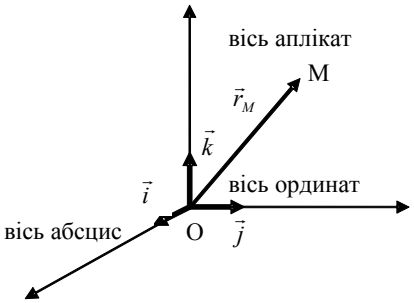


Рис. 5.4

Радіусом – вектором $\vec{r_M}$ точки простору М називається вектор, що з'єднує т. О з т. М. Кожній т. М простору ставиться у відповідність трійка чисел – координат її радіуса – вектора, які прийнято позначати: М (x,y,z).

Напрям вектора $\vec{a}$ визначається кутами α, β, γ, утвореними з осями координат OX, OY, OZ.

Косинуси цих кутів (напрямні косинуси вектора) визначаються за формулами:

$$Cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$Cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \; Cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \qquad (5.5)$$

Напрямні косинуси вектора пов'язані співвідношенням:

$$Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma = 1 \qquad (5.6)$$

Координатами одиничного вектора є його напрямні косинуси:

$$\vec{e} = \{Cos\alpha, Cos\beta, Cos\gamma\} \qquad (5.7)$$

Добуток векторів.

I. **Скалярним добутком векторів** $\vec{a}$ і $\vec{в}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута φ між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{в} = |\vec{a}|\cdot|\vec{в}|Cos\varphi \qquad (5.8)$$

Властивості:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$; (5.9)
2. $\vec{a}(\vec{в}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{в} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ (5.10)
3. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{в} = \vec{a}(\lambda\cdot\vec{в}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{в}), \; \lambda \in R$ (5.11)
4. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$ (5.12)
5. Якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{в} \neq 0$, то $\vec{a}\cdot\vec{в} = 0$, тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \perp \vec{в}$ (5.13)

6. $Cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{в}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|}$ (5.14)

Скалярні добутки ортів осей координат:

$$\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1 \qquad (5.15)$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0 \qquad (5.16)$$

II. **Векторним** добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{в}$ ($\vec{a}\times\vec{в}$) називається третій вектор $\vec{c}$, який визначається наступним чином (рис. 5.5):

1) Модуль вектора $\vec{c}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{в}$:

$|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{в}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{в}|Sin\varphi$, де φ - кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{в}$ (5.17)

2) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{в}$ і утворює праву трійку з векторами $\vec{a}$ і $\vec{в}$.

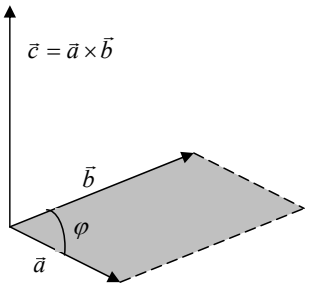


Рис. 5. 5

Властивості :

1) $\vec{в}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{в}$ (5.18)

2) Якщо $\vec{a}\neq 0$ і $\vec{в}\neq 0$, то $\vec{a}\times\vec{в} = 0$ тоді і лише тоді, коли $\vec{a}$ і $\vec{в}$ колінеарні. (5.19)

3) $(\lambda\vec{a})\times\vec{в} = \vec{a}\times(\lambda\vec{в}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{в})$ (5.20)

4) $\vec{a}\times(\vec{в}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{в}+\vec{a}\times\vec{c}$ (5.21)

Векторні добутки координатних ортів:

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0 \qquad (5.22)$$

$$\vec{i}\times\vec{j} = -\vec{j}\times\vec{i} = \vec{k};\ \vec{j}\times\vec{k} = -\vec{k}\times\vec{j} = \vec{i};\ \vec{k}\times\vec{i} = -\vec{i}\times\vec{k} = \vec{j}. \qquad (5.23)$$

III. **Мішаним** добутком упорядкованої трійки векторів $(\vec{a},\vec{в},\vec{c})$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}\times\vec{в}$ на вектор $\vec{c}$:

$$(\vec{a};\vec{в};\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{в})\cdot\vec{c} \qquad (5.24)$$

Мішаний добуток $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ по модулю дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах :

$$V\ \text{парал.} = |\vec{a}\ \vec{в}\ \vec{c}|, \qquad (5.25)$$

а об'єм відповідної трикутної піраміди :

$$V\ \text{пір.} = \frac{1}{6}|\vec{a}\,\vec{в}\,\vec{c}|. \qquad (5.26)$$

Властивості :

1) Якщо $\vec{a}\neq 0, \vec{в}\neq 0, \vec{c}\neq 0,$ то $\vec{a}\vec{в}\vec{c} = 0$ тоді і тільки тоді, коли вектори компланарні (5.27)

2) Якщо $\vec{a}\,\vec{в}\,\vec{c} > 0$, то упорядкована трійка векторів права (рис. 5.6), а якщо $\vec{a}\,\vec{в}\,\vec{c} < 0$, то – ліва (рис. 5.7).

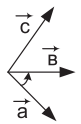


Рис. 5.6

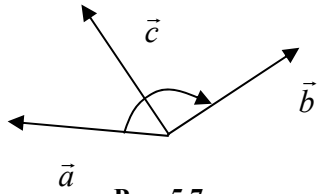


Рис. 5.7

3) $(\vec{a}\times\vec{в})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{в}\times\vec{c})$. (5.28)

4) $\vec{a}\,\vec{в}\,\vec{c} = \vec{в}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{в}$. (5.29)

5) $\vec{в}\,\vec{a}\,\vec{c} = -\vec{a}\,\vec{в}\,\vec{c};\ \vec{c}\,\vec{в}\,\vec{a} = -\vec{a}\,\vec{в}\,\vec{c};\ \vec{a}\,\vec{c}\,\vec{в} = -\vec{a}\,\vec{в}\,\vec{c}$. (5.30)

Нехай вектори $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ задані в декартовому базисі :

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\},$$
$$\vec{в} = \{в_x, в_y, в_z\},$$
$$\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}, \qquad (5.31)$$

тоді :

1^0. $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$; (5.32)

2^0. Добуток вектора $\vec{a}$ на скалярний множник λ визначається формулою:

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}. \quad (5.33)$$

Зокрема, якщо $\lambda = \frac{1}{|\vec{a}|}$, то вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ має довжину, рівну 1, і напрям вектора $\vec{a}$. Цей вектор називають **одиничним вектором** вектора $\vec{a}$ і позначають $\vec{a}_0$. Таким чином,

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \text{ або } \vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0 \quad (5.34)$$

3^0. Вектор $\overrightarrow{AB}$, де $A(x_1, y_1, z_1)$ – початок, а $B(x_2, y_2, z_2)$ – кінець вектора, можна представити у вигляді:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r_2} - \vec{r_1}, \quad (5.35)$$

де $\vec{r_2}$ – радіус-вектор точки В, а $\vec{r_1}$ - радіус-вектор точки А. Отже, розклад вектора $\overrightarrow{AB}$ за ортами має вигляд:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} - (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \quad (3.36)$$

4^0. Довжина вектора $\overrightarrow{AB}$ співпадає з відстанню між точками А і В:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (5.37)$$

5^0. Напрям вектора $\overrightarrow{AB}$ визначається напрямними косинусами:

$$Cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}; \; Cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}; \; Cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}; \quad (5.38)$$

6^0. $$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z; \quad (5.39)$$

7^0. $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (5.40)$$

8^0. $$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (5.41)$$

9^0. Якщо відрізок M_1M_2 розділений т. М у відношенні λ, тобто

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda,$$

то радіус-вектор т. М знаходиться за формулою:

$$\vec{r} = \frac{\vec{r_1} + \lambda\vec{r_2}}{1 + \lambda} \quad (5.42)$$

10^0. Умова коллінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda; \quad (5.43)$$

11^0. Умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \quad (5.44)$$

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

В трикутнику $ABC: AM = MN = NB$, де $M, N \in AB$.

Знайти вектор $\overrightarrow{CM}$, якщо $\overrightarrow{CA} = \vec{a}; \overrightarrow{CB} = \vec{b}$.

Розв'язання.

Маємо $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$. Отже, $\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{3}$.

Оскільки $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$, то $\overrightarrow{CM} = \vec{a} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{3} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$

Відповідь: $\frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$.

Приклад 2.

Радіусами-векторами вершин ΔABC є $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ і $\vec{r_3}$. Знайти радіус-вектор точки перетину медіан трикутника.

Розв'язання.

Маємо: $\overrightarrow{BC}=\vec{r_2}-\vec{r_1}$; $\overrightarrow{BD}=\dfrac{\vec{r_3}-\vec{r_2}}{2}$; $\overrightarrow{AB}=\vec{r_2}-\vec{r_1}$;

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}=\frac{\vec{r_3}-\vec{r_2}}{2}+\vec{r_2}-\vec{r_1}=\frac{\vec{r_2}+\vec{r_3}-2\vec{r_1}}{2};$$

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ (D - середина BC ; M – точка перетину медіан).

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{\vec{r_2}+\vec{r_3}-2\vec{r_1}}{3}$; $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\vec{r_1}+\overrightarrow{AM}=\dfrac{\vec{r_2}+\vec{r_3}-2\vec{r_1}}{3}+\vec{r_1}$, або $\vec{r}=\dfrac{\vec{r_1}+\vec{r_2}+\vec{r_3}}{3}$

Відповідь: $\vec{r}=\dfrac{\vec{r_1}+\vec{r_2}+\vec{r_3}}{3}$.

Приклад 3.

Задані вектори $\vec{a}=(2;0;-2)$ і $\vec{b}=(-2;1;2)$.

Знайти проекцію вектора $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ на вектор $\vec{b}$.

Розв'язання.

Знайдемо вектор $\vec{c}$:

$\vec{c}=2(2\vec{i}-2\vec{k})+(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, тобто $\vec{c}=(2;1;-2)$.

Тоді $np_{\vec{b}}\vec{c}=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|}=\dfrac{2(-2)+1\cdot1+(-2)\cdot2}{\sqrt{4+1+4}}=-\dfrac{7}{3}$

Відповідь: $-\dfrac{7}{3}$.

Приклад 4.

Визначити, при яких значеннях m і n вектори $\vec{a}=(-6;m;2)$ і $\vec{b}=(n;4;-1)$ колінеарні.

Розв'язання:

З умови колінеарності двох векторів (5.43) маємо: $\dfrac{-6}{n}=\dfrac{m}{4}=\dfrac{2}{-1}$; отже, $m=-8$; $n=3$.

Відповідь: $m=-8$; $n=3$.

Приклад 5.

Знайти кут між векторами $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ і $\vec{b}=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$

Розв'язання.

Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{в}=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|Cos\varphi$, то

$$Cos\varphi=\frac{1\cdot6+2\cdot4+3\cdot(-2)}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{36+16+4}}=\frac{8}{\sqrt{14}\cdot2\sqrt{14}}=\frac{2}{7}$$

Отже, $\varphi=\arccos\dfrac{2}{7}$.

Відповідь: $\varphi=\arccos\dfrac{2}{7}$

Приклад 6.

Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}+3\vec{b}$ і $3\vec{a}+\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=|\vec{в}|=1$, $(\vec{a}\wedge\vec{b})=30^0$.

Розв'язання.

Маємо

$(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b}=3\cdot0+\vec{a}\times\vec{b}-9\vec{a}\times\vec{b}+3\cdot0=-8\vec{a}\times\vec{b}$,

оскільки $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{b}=0$; $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$.

Отже, $S=8|\vec{a}\times\vec{b}|=8\cdot1\cdot1\cdot Sin30^0=4$

Відповідь: 4.

Приклад 7.

Знайти площу трикутника PQR, заданого вершинами $P(1;2;3)$; $Q(-1;3;0)$; $R(-2;-3;-5)$; .

Розв'язання.

Площа трикутника PQR дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{PQ}$ і $\overrightarrow{PR}$.

Оскільки $\overrightarrow{PQ}=(-2;1;-3)$; $\overrightarrow{PR}=(-3;-5;-8)$; і за формулою

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & -3\\ -3 & -5 & -8\end{vmatrix}=-23\vec{i}-7\vec{j}+13\vec{k}$$, то

$$S_{\Delta PQR} = \frac{1}{2} S_{парал.} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{23^2 + 7^2 + 13^2} = \frac{\sqrt{747}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{83}\ .$$

Відповідь: $\frac{3}{2}\sqrt{83}$.

Приклад 8.

Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(2;2;2)$; $B(4;3;3)$; $C(4;5;4)$; $D(5;5;6)$.

Розв'язання.

Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$, які співпадають з ребрами піраміди:

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$; $\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Знайдемо мішаний добуток цих векторів за формулою (5.41):

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 1\cdot 2 - 1\cdot 3 = 7$$

Оскільки $V_{пір.} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|$, то $V_{пір.} = \frac{7}{6}$.

Відповідь: $\frac{7}{6}$

Приклад 9.

Знайти $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} - \vec{c})(\vec{c} - \vec{a})$

Розв'язання.

Так як $(\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{b} - \vec{c}) + (\vec{c} - \vec{a}) = 0$, то ці вектори компланарні (рис. 5.8).

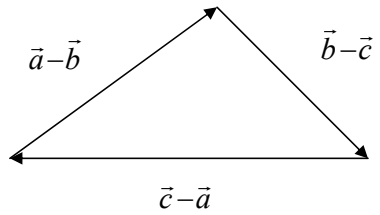


Рис. 5.8

Отже, мішаний добуток цих векторів $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} - \vec{c})(\vec{c} - \vec{a}) = 0$

Відповідь: 0

Приклад 10.

Довести, що вектори $\vec{b} = (1;9;-11);$; $\vec{c} = (-1;6;-6)$; $\vec{d} = (-2;-3;5)$ компланарні.

Розв'язання.

Оскільки вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю, знайдемо:

$$\vec{b}\vec{c}\vec{d} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -11 \\ -1 & 6 & -6 \\ -2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 1(30-18) - 9(-5-12) - 11(3+12) = 12 + 153 - 165 = 0$$

Отже, $\vec{b}\vec{c}\vec{d} = 0$ і вектори $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ компланарні.

Задачі

5.1. По даним векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектори $2\vec{a} - \vec{b}$ - і $\vec{b}$ -1/2 $\vec{a}$.

5.2. У трикутнику ОАВ дані вектори $\vec{a} = \vec{OA}$ і $\vec{b} = \vec{OB}$. Знайти вектори $\vec{MA}$ і $\vec{MB}$, де М – середина сторони AB .

5.3. Обчислити координати векторів $\vec{AB}$ і $\vec{BA}$, якщо А(3;-1;1), В(-1; 1;0).

5.4. Обчислити модуль вектора $\vec{a}$ ={-1;3; $\sqrt{6}$ }.

5.5. Обчислити координату z вектора $\vec{a}$ ={4;-12;z}, якщо | $\vec{a}$ |=13.

5.6. Визначити точку N, з якою співпадає кінець вектора $\vec{a}$ ={3;-1;4}, якщо його початок співпадає з точкою М(1;2;-3).

5.7. Обчислити координати одиничного вектора для вектора $\vec{a}$ ={12; -15;-16}.

5.8. Вектор $\vec{a}$ утворює з осями ОХ і ОZ кути $\alpha=120^0$ і $\gamma=45^0$. Який кут він утворює з віссю ОY?

5.9.Визначити координати точки М, якщо її радіус-вектор утворює з координатними осями однакові кути і його модуль дорівнює 3.

5.10. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=60^0$, причому | $\vec{a}$ |=5, а | $\vec{b}$ |=8. Визначити | $\vec{a} + \vec{b}$ | і | $\vec{a} - \vec{b}$ |.

5.11. Задані два вектори $\vec{a}=\{3;-2;6\}$ і $\vec{b}=\{-2;1;0\}$. Визначити проекції на координатні осі векторів:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $-1/2\,\vec{b}$; в) $2\vec{a}+3\vec{b}$.

5.12. Заданий розклад векотра $\vec{c}$ по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$: $\vec{c}=16\vec{i}-15\vec{j}+12\vec{k}$. Визначити розклад по цьому ж базису векотра $\vec{d}$, який паралельний вектору $\vec{c}$ і має протилежний напрямок, за умови, що $|\vec{d}|=75$.

5.13. Задані три вектора $\vec{a}=\{3;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-2\}$, $\vec{c}=\{-1;7\}$. Визначити розклад вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ по базису $\vec{a},\vec{b}$.

5.14. Задані три вектора $\vec{p}=\{3;-2;1\}$, $\vec{q}=\{-1;1;-2\}$, $\vec{r}=\{2;1;-3\}$. Знайти розклад вектора $\vec{c}=\{11;-6;5\}$ по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

5.15. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=2/3\pi$ і відомо, що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. Обчислити:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; в) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$.

5.16. Якій умові повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектор $\vec{a}+\vec{b}$ був перпендикулярний до вектора $\vec{a}-\vec{b}$?

5.17. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\pi/6$, причому $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$. Обчислити кут між векторами $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$.

5.18. Вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}=\{6;-8;-7{,}5\}$, утворює гострий кут з віссю OZ і його модуль $|\vec{b}|=50$. Знайти координати $\vec{b}$.

5.19. Задані три вектори: $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ і $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$. Обчислити $np_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$.

5.20. Задані $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=2$ і $\vec{a}\bullet\vec{b}=12$. Обчислити $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

5.21. Знайти площу трикутника з вершинами A(1;2;0), B(3;0;-3) і C(5;2;6;).

5.22. Вектори $\vec{a},\vec{b}$, $\vec{c}$, які утворюють праву трійку, взаємно перпендикулярні. Обчислити мішаний добуток $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, якщо $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$.

5.23. Довести, що вектори $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k}$ компланарні.

5.24. Обчислити об'єм піраміди, вершини якої знаходяться в точках O(1;1;2), A(2;3;-1), B(2;-2;4), C(-1;1;3).

5.25. Задані вершини тетраедра: A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;8). Знайдіть довжину його висоти, проведеної з вершини D.

Тема 6

Аналітична геометрія

І. Алгебраїчні лінії І – го порядку на площині.

1) $Ax+By+C=0$ – **загальне рівняння прямої.** (6.1)

Вектор $\vec{n}=(A;B)$, перпендикулярний до даної прямої, називається її **нормальним вектором.**

2) $y=kx+b$ – **рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом** k, (6.2)

$k=tg\alpha$, де α – кут, утворений прямою з додатним напрямом осі Ox, b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy.

3) $y-y_0=k(x-x_0)$ – **рівняння прямої, що проходить через дану точку** $M_0(x_0;y_0)$ з **заданим кутовим коефіцієнтом** k (6.3)

4) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – **рівняння прямої** (6.4), **що проходить через дві дані точки** $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$. Із загального рівняння прямої $Ax+By+C=0$ можна знайти її **кутовий коефіцієнт**

$$k=-\frac{A}{B}. \qquad (6.5)$$

Кут φ **між двома прямими,** що мають кутові коефіцієнти k_1 і k_2, визначається за формулою:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (6.6)$$

Умова паралельності двох прямих: $k_1=k_2$; (6.7)

перпендикулярності: $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$; $(1+k_1k_2=0)$. (6.8)

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0)$ **до прямої** $Ax+By+C=0$ дорівнює

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (6.9)$$

5) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$ – **рівняння прямої, що проходить через точку** $M_0(x_0;y_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{S}=(m;n)$ (канонічне рівняння прямої).(6.10)

6) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ – **рівняння прямої у відрізках на осях,** де a і b – відрізки, що їх відтинає пряма на координатних осях Ox і Oy (6.11)

ІІ. Алгебраїчні поверхні І – го порядку.

1) $Ax+By+Cz+D=O$ – **загальне рівняння площини;** (6.12)

вектор $\vec{n}=(A;B;C)$, перпендикулярний до даної площини, називається її **нормальним вектором;**

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – **рівняння площини, що проходить через точку** $M_0(x_0,y_0,z_0)$ **перпендикулярно до нормального вектора**

$$\vec{n}=(A;B;C). \qquad (6.13)$$

3) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ (6.14)

- рівняння площини у відрізках на осях, де a,b,c – величини відрізків, що їх відтинає площина на координатних осях Ox,Oy,Oz відповідно;

4) $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (6.15)$$

- рівняння площини, що проходить через три задані точки (які не лежать на одній прямій) $M_1(x_1,y_1,z_1)$; $M_2(x_2,y_2,z_2)$; $M_3(x_3,y_3,z_3)$.

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ **до площини** $Ax+By+Cz+D=0$ визначають за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (6.16)$$

Кут між двома площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ знаходять за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (6.17)$$

Умова перпендикулярності площин: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$ (6.18)

Умова паралельності площин: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$ (6.19)

Дві площини співпадають, якщо справджуються рівності:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \quad (6\text{-}20)$$

III. Алгебраїчні лінії I – го порядку в просторі.

Пряма у просторі може задаватись:

1) як лінія перетину двох площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (6.21)$$

2) параметричними рівняннями:

$$x = x_0 + mt, \;\; y = y_0 + nt, \;\; z = z_0 + pt, \quad (6.22)$$

де $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - задана точка, що належить прямій, $\vec{S} = (m; n; p)$ – напрямний вектор прямої;

3) канонічними рівняннями:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad (6.23)$$

4) **рівняннями прямої, що проходить через дві задані точки** $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ є

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (6.24)$$

Кут між двома прямими: $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ і $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$ обчислюють за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (6.25)$$

Умова паралельності прямих:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (6.26)$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0. \quad (6.27)$$

Кут між прямою $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ **і площиною** $Ax + By + Cz + D = 0$ знаходять за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\,\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (6.28)$$

Умова паралельності прямої і площини:

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (6.29)$$

Умова перпендикулярності прямої і площини:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (6.30)$$

Точку перетину прямої і площини знаходять із системи рівнянь:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \quad (6.31)$$

IV. Алгебраїчні лінії другого порядку.

Нехай задано загальне рівняння другого степеня, яке не містить добутки змінних

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = O. \quad (6.32)$$

Якщо цьому рівнянню відповідає лінія на площині, то в результаті виділення повних квадратів відносно кожної змінної вихідне рівняння може набути вигляду:

1) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ (6.33)

- коло радіуса R **з центром у точці** $C(x_0; y_0)$. Зокрема, рівняння кола з центром у початку координат:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (6.34)$$

2) $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ (6.35)

- еліпс з центром у точці $C(x_0; y_0)$. Зокрема, канонічне рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6.36)$$

(рис. 6.1), де $b^2 = a^2 - c^2,\ a > b$ (6.37)

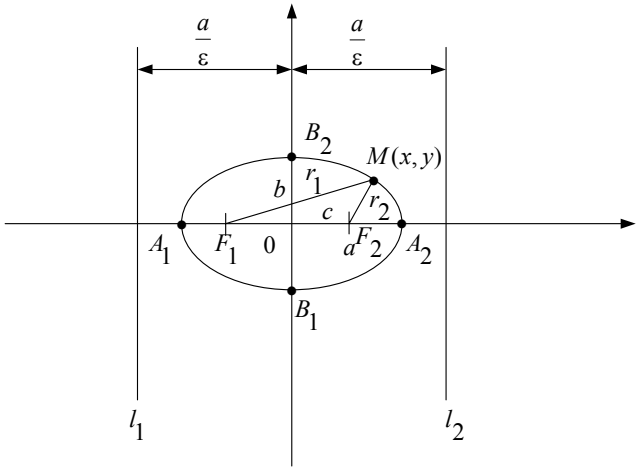


Рис. 6.1

Відстані між вершинами: велика (фокальна) вісь

$$A_2A_1 = 2a \tag{6.38}$$

і мала вісь

$$B_2B_1 = 2b \tag{6.39}$$

відстань між фокусами

$$F_2F_1 = 2c; \tag{6.40}$$

a,b – півосі еліпса.

Ексцентриситет ε визначається рівністю

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \tag{6.41}$$

очевидно, для еліпсу $0 < \varepsilon < 1$.

$F_1M = r_1$ і $F_2M = r_2$ – фокальні радіуси точки $M(x, y)$.

Директриси еліпса

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} \tag{6.42}$$

Рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **у точці** $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{6.43}$$

3) $$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1 \tag{6.44}$$

- гіпербола або спряжена до неї гіпербола з центром у точці $C(x_0, y_0)$ та характеристичним прямокутником зі сторонами $2a$ і $2b$. Діагоналі цього прямокутника – асимптоти гіперболи (рис. 6.2):

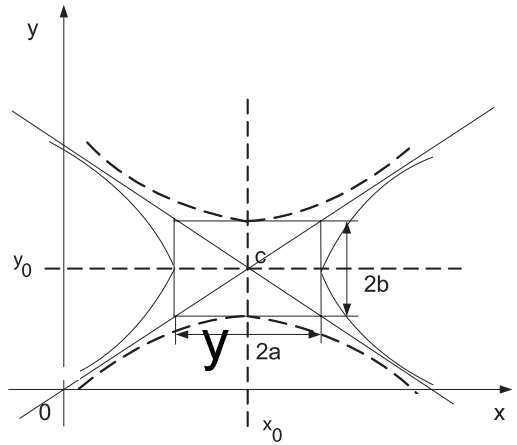


Рис. 6.2

4) $$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0); \tag{6.45}$$

$$(x - x_0)^2 = \pm 2q(y - y_0) \tag{6.46}$$

- параболи з вершинами у точці $C(x_0, y_0)$, симетричні відносно прямих $y = y_0$ та $x = x_0$ відповідно (рис. 6.3).

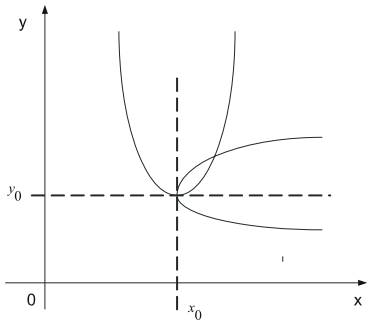


Рис. 6.3

V. Алгебраїчні поверхні другого порядку.

Алгебраїчною поверхнею другого порядку називається поверхня, рівняння якої в декартовій системі координат має вигляд:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + My + Lz + K = 0, \qquad (6.47)$$

де коефіцієнти A, B, C, D, E, F одночасно $\neq 0$.

1. Циліндричні поверхні.

Рівняння

$$F(x; y) = 0 \qquad (6.48)$$

визначає **циліндричну поверхню з твірною, паралельною осі** OZ.

Аналогічно,

$$F(y; z) = 0 \qquad (6.49)$$

і

$$F(x; z) = 0 \qquad (6.50)$$

- рівняння циліндричних поверхонь з твірними, паралельними осям Ox **і** OY відповідно (рис. 6.4 а,б,в).

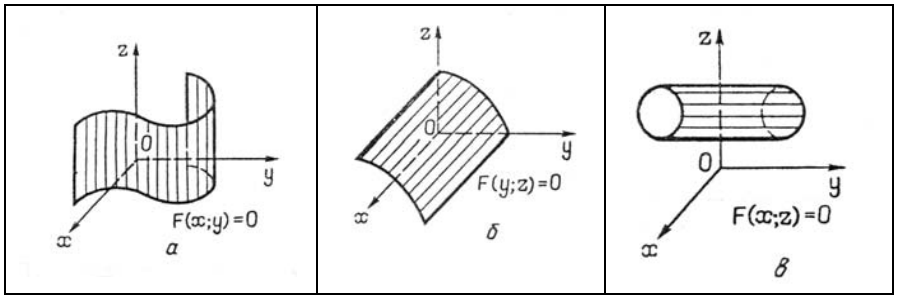


Рис 6.4

Циліндри другого порядку:

1) **круговий:** $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 6.5); (6.51)

2) **еліптичний:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис.6.6); (6.52)

3) **гіперболічний** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис.6.7); (6.53)

4) **параболічний:** $y^2 = 2px,\ p > 0$ (рис.6.8). (6.54)

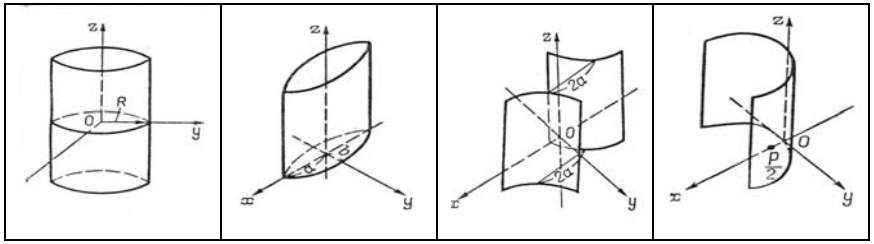


Рис. 6.5 **Рис. 6.6** **Рис. 6.7** **Рис.6.8**

2. Поверхні обертання.

Поверхнею обертання називається поверхня, утворена обертанням заданої плоскої лінії L навколо деякої прямої l (осі обертання), що лежить у площині лінії L.

Щоб дістати рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії L, що лежить у площині Oxz, навколо осі Oz, треба в рівнянні цієї лінії замінити змінну x на вираз $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, тобто якщо рівняння лінії L:F (x, z)=0, y=0, то при її обертанні навколо осі Oz **рівняння поверхні обертання** має вигляд

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \qquad (6.55)$$

(рис. 6.9).

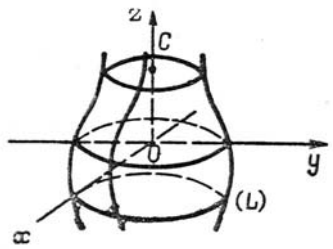


Рис. 6.9

3. Конічні поверхні.

Конічною називається поверхня, описана рухомою прямою (твірною), що проходить через фіксовану точку (вершину) і перетинає деяку криву L (напрямну) конуса. Маємо **рівняння конуса** у вигляді

$$F(x; y; z) = 0 \qquad (6.56)$$

Рівняння конуса другого порядку з вершиною в точці O (0; 0) (рис. 6.10) має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (6.57)$$

Однією з можливих напрямних цього конуса є еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, z = c.

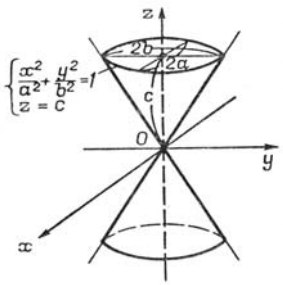


Рис. 6.10

4. Сфера.

Рівняння сфери радіуса R з центром у точці C ($x_0; y_0; z_0$) має вигляд:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \qquad (6.58)$$

(рис. 6.11), зокрема, **рівняння сфери з центром у початку координат:**

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (6.59)$$

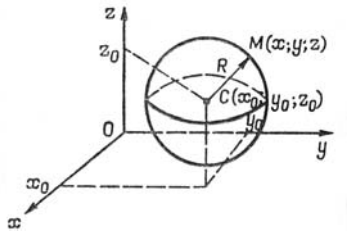


Рис. 6.11

5. Канонічні рівняння поверхонь другого порядку:

1). Еліпсоїд (рис. 6.12):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (6.60)$$

2). Гіперболоїди:

а). однопорожнинний (рис. 6.13):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (6.61)$$

б). двопорожнинний (рис. 6.14):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (6.62)$$

3). Параболоїди:

а). еліптичний (рис. 6.15):

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad (6.63)$$

б). гіперболічний (рис. 6.16):

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \qquad (6.64)$$

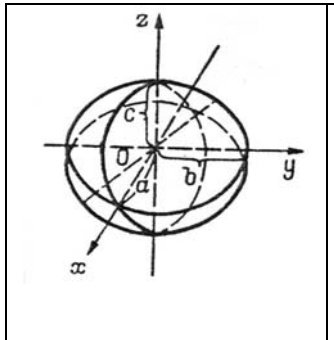


Рис. 6.12

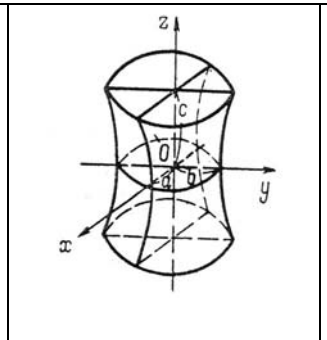


Рис. 6.13

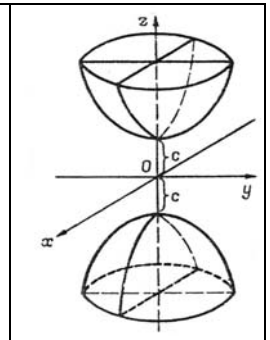


Рис. 6.14

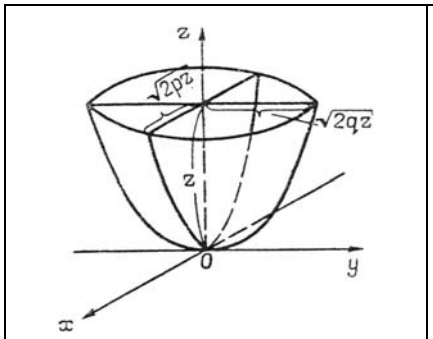


Рис. 6.15

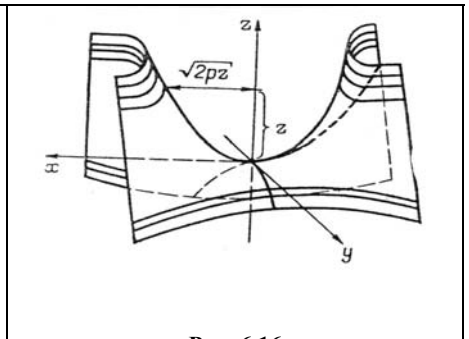


Рис. 6.16

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Дано точки $M_1(2;-1)$ і $M_2(4;5)$. Написати рівняння прямої, що проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Розв'язання.

Нормальний вектор шуканої прямої $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2}$ має координати $\vec{n} = (2;6)$. Отже, $2(x-2)+6(y+1)=0$, або $x+3y+1=0$.

Відповідь: $x+3y+1=0$

Приклад 2.

Дано дві прямі: $x+7y-5=0$ і $3x-4y+20=0$.

Знайти кут між ними.

Розв'язання.

Кутовий коефіцієнт першої прямої $k_1=-\frac{1}{7}$. а другої – $k_2=\frac{3}{4}$. Отже за формулою (6.6): $tg\varphi = \dfrac{\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{7}\right)}{1+\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)} = \dfrac{25\cdot 28}{28\cdot 25} = 1$. Звідки кут між прямими 45^0.

Відповідь: 45^0

Приклад 3.

Дано пряму $2x-y+7=0$ і точку $(-8;1)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через дану точку паралельно заданій прямій.

Розв'язання.

Приведемо задане рівняння до вигляду (6.2): $y=2x+7$, отже, $k=2$.

Оскільки шукана і задана прямі паралельні, то за умовою (6.7) їхні кутові коефіцієнти рівні, тому за (6.3) маємо: $y-1=2(x+8)$, або $y-2x-17=0$.

Відповідь: $y-2x-17=0$.

Приклад 4.

Медіани BM і CN (рис. 6.17) ΔABC лежать на прямих $x+y=3$ і $2x+3y=1$, а точка $A(1;1)$ – вершина трикутника. Скласти рівняння прямої BC.

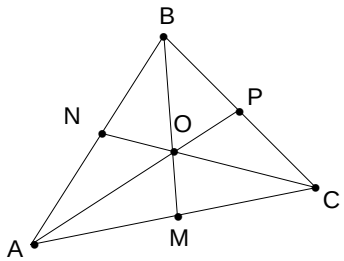


Рис. 6.17

Розв'язання.

Знайдемо координати точки перетину медіан O:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ 2x+3y=1, \end{cases} \qquad O(8;-5)$$

З відношення $\frac{AO}{OP}=\frac{2}{1}=\lambda$ і формули (6.6) знаходимо координати точки P:

$$8=\frac{1+2x_p}{1+2};\ -5=\frac{1+2y_p}{1+2};\ x_p=\frac{23}{2};\ y_p=-8.$$

Оскільки точки B і C лежать на заданих прямих, то їхні координати задовольняють задані рівняння. P – середина BC, отже, маємо:

$$\frac{x_B+x_c}{2}=\frac{23}{2};\ \frac{y_B+y_c}{2}=-8;\ x_B+y_b=3;\ 2x_c+3y_c=1;$$

звідки $x_c = 11, y_c = -7$. Пряма BC проходить через точки $P\left(\frac{23}{2};-8\right)$ і $C(11;-7)$, тому за формулою (6.4): $\dfrac{x-\frac{23}{2}}{11-\frac{23}{2}} = \dfrac{y+8}{-7+8}$, або $2x+y-15=0$

Відповідь: $2x+y-15=0$

Приклад 5.

Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $4x-3y-10=0$ і $8x-6y+15=0$.

Розв'язання.

Задані прямі паралельні, отже, довжина d сторони квадрата знаходиться як відстань від довільної точки однієї прямої до другої прямої: нехай $x=1$, $4\cdot 1-3y-10=0$, тоді $y=-2$.

Точка $A_0(1;-2)$ належить першій прямій. За формулою (6.9) маємо:

$$d = \frac{|8\cdot 1-6\cdot(-2)+15|}{\sqrt{8^2+(-6)^2}} = \frac{7}{2}.$$

Площа квадрата $S = d^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$.

Відповідь: $\frac{49}{4}$.

Приклад 6.

Скласти рівняння площини, що проходить через точку $B(1;2;3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(-1;-3;1)$.

Розв'язання.

Шукане рівняння маємо за формулою (6.13):

$-1(x-1)+(-3)(y-2)+1\cdot(z-3)=0, \quad x+3y-z-4=0.$

Відповідь: $x+3y-z-4=0$.

Приклад 7.

Написати загальне рівняння площини, що проходить через точки $M(1;2;3)$, $N(-1;0;2)$, $K(-2;1;0)$.

Розв'язання.

Підставимо координати даних точок M, N і K в рівняння (6.15):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad 5(x-1)-3(y-2)-4(z-3)=0, \text{ або } 5x-3y-4z+13=0.$$

Відповідь: $5x-3y-4z+13=0$.

Приклад 8.

Побудувати площину $3x-2y+4z-12=0$.

Розв'язання.

За формулою (6.14): $\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{3}=1$ – рівняння площини у відрізках на осях.

Отже, $a=4, b=-6, c=3$. Будуємо площину (рис. 6.18).

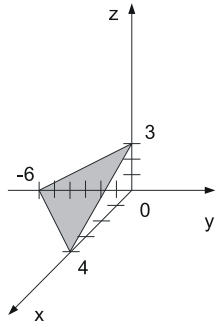


Рис. 6.18

Приклад 9.

Знайти кут між площинами $2x+y+3z-1=0$ і $x+y-z+5=0$.

Розв'язання.

За формулою (6. 17) маємо: $\cos\varphi = \dfrac{2\cdot 1+1\cdot 1+3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = 0$, отже, площини перпендикулярні, $\varphi = 90^0$.

Відповідь: 90^0.

Приклад 10.

Знайти висоту AH піраміди, заданої своїми вершинами $A(-1;2;-1)$; $B(1;0;2)$; $C(0;1;-1)$; $D(2;0;-1)$.

Розв'язання.

Знайдемо рівняння площини (BCD) за формулою (6.15): $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$, звідки, $3x+6y+z-5=0$. Висоту AH знайдемо як відстань точки $A(-1;2;-1)$ від площини (BCD) за формулою (6.16): $AH = \dfrac{|3\cdot(-1)+6\cdot 2+1\cdot(-1)-3|}{\sqrt{3^2+6^2+1^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{46}}$.

Відповідь: $\dfrac{5}{\sqrt{46}}$.

Приклад 11.

Знайти центр і радіус кола $x^2+y^2+4x-6y-23=0$.

Розв'язання.

$(x^2+4x)+(y^2-6y-23)=0$, або

$(x^2+4x+4)-4+(y^2-6y+9)-9-23=0$, $(x+2)^2+(y-3)^2=36$.

За формулою (6.33) точка $(-2;3)$ – центр кола, а $R=6$ – радіус кола.

Відповідь: $(-2;3)$; $R=6$.

Приклад 12.

Скласти рівняння лінії, для кожної точки якої відношення відстані від точки $F(5;0)$ до відстані до прямої $x=\dfrac{15}{2}$ дорівнює $\dfrac{2}{3}$.

Розв'язання.

Нехай точка $M(x,y)$ належить шуканій кривій. Тоді відстань $FM = d_1 = \sqrt{(x-5)^2+y^2}$, а відстань від точки M до прямої $x=\dfrac{15}{2}$: $d_2 = \left|x-\dfrac{15}{2}\right|$.

За умовою, $\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{2}{3}$. Отже, $\dfrac{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}{\left|x-\dfrac{15}{2}\right|}=\dfrac{2}{3}$. Звідси

$(x-5)^2+y^2=\dfrac{4}{9}\left(x-\dfrac{15}{2}\right)^2$; $9(x-5)^2+9y^2=4\left(x-\dfrac{15}{2}\right)^2$; $5x^2+9y^2-30x=0$ рівняння шуканої лінії.

$5(x^2-6x)+9y^2=0$; $5(x^2-6x+9)-45+9y^2=0$; $5(x-3)^2+9y^2=45$.

За формулою (6.35): $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ – це рівняння еліпса з центром в точці $C(3;0)$ та півосями $a=3; b=\sqrt{5}$.

Відповідь: $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

Приклад 13.

Знайти відстань фокуса гіперболи $x^2-8y^2=8$ від її асимптоти.

Розв'язання.

За формулою (6.44) канонічне рівняння гіперболи: $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{1}=1$, звідки $a=\sqrt{8}$; $b=1$ – півосі. Тому рівняння асимптоти має вигляд: $x-y\sqrt{8}=0$. Оскільки $c^2=a^2+b^2$, маємо $c=3$, тому $F_1(-3;0)$ і $F_2(3;0)$ – фокуси гіперболи. Тоді відстань d від фокуса F_1 до знайденої асимптоти: $d=1$.

Відповідь: $d=1$.

Приклад 14.

Скласти рівняння поверхні обертання, утвореної обертанням параболи $z=-\dfrac{1}{2}y^2$ навколо осі OZ.

Розв'язання.

Підставивши в рівняння параболи замість y вираз $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, маємо:

$z=-\dfrac{1}{2}\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$; або $z=-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

Це рівняння параболоїда обертання (рис. 6.19):

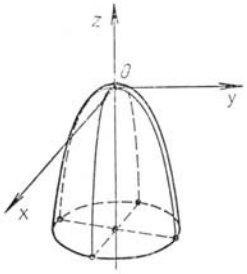


Рис. 6.19

Приклад 15.

Знайти лінії перетину однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ площинами: а) Oxz; б) Oxy; в) $x=4$.

Розв'язання.

а). Лінією перетину з площиною Oxz є гіпербола:

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1,\ y=0,$ або $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1,\ y=0;$

б). Лінією перетину з площиною Oxy є еліпс:

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1,\ z=0,$ або $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\ z=0;$

в). Лінією перетину з площиною $x=4$ є гіпербола:

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1,\ x=4,$ або $\frac{y^2}{27}-\frac{z^2}{48}=-1,\ x=4.$

Приклад 16.

Встановити, які поверхні визначаються заданими рівняннями і зобразити їх:

а). $-\frac{x^2}{6}+4y^2+\frac{1}{2}z^2-2=0;$ б). $3x^2+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=0.$

Розв'язання.

а). За формулою (6.61) маємо канонічне рівняння гіперболоїда:

$-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}+\frac{z^2}{4}=1,$ де півосі його еліпса $OB=\frac{\sqrt{2}}{2};\ OC=2$ (рис. 6.20)

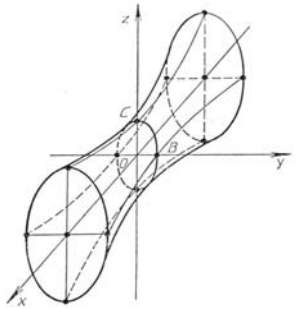


Рис. 6.20

б). За формулою (6.57) маємо канонічне рівняння конуса другого порядку: $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{12}=0,$ його перерізи площинами $z=const$ є еліпсами (рис. 6.21)

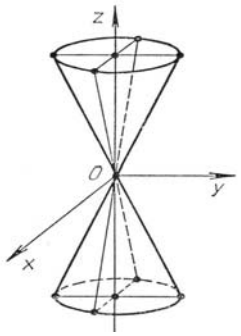


Рис. 6.21

Задачі

6.1. Побудувати пряму :
а) $3x-4y+7=0$; б) $x-2=0$; в) $y-3=0$.

6.2. Сторони AB, BC і ітрикутника ABC задані відповідно рівняннями: $4x+3y-3=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Визначити координати його вершин.

6.3. Задана пряма $5x+3y-3=0$. Визначити кутовий коефіцієнт k прямої:
1) паралельної даній прямій; 2) перпендикулярної до даної прямої.

6.4. Задана пряма $2x+3y+4=0$. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;1)$:

1) паралельної даній прямій; 2) перпендикулярної до даної прямої.

6.5. Знайти проекцію точки $P(-6;4)$ на пряму $4x-5y+3=0$.

6.6. Задані вершини трикутника $M_1(2;1)$, $M_2(-1;-1)$, $M_3(3;2)$. Скласти рівняння медіани на сторону M_1M_2.

6.7. Визначити кут φ, утворений двома прямими:

1) $3x-y+5=0$, $2x+y-7=0$; 2) $x+5y-3=0$, $2x-3y+4=0$.

6.8. Задана пряма $2x-3y-12=0$. Скласти для неї рівняння у відрізках і побудувати пряму.

6.9. Довести , що рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$, може бути задана у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6.10. Як розташовані площини:

а) $3x-5y+1=0$; б) $2y-2=0$; в) $2x+3y-7z=0$; г) $2x-6y+4z-2=0$ відносно координатних площин?

6.11. Задані дві точки $M_1(3;-1;2)$ і $M_2(4;-2;-1)$. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно вектору $\vec{M_1M_2}$.

6.12. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку: $M_1(x_1;y_1;z_1)$, паралельно двом векторам $\vec{a} = \{3;1;-1\}$ і $\vec{b} = \{1;-2;1\}$.

6.13. Довести, що рівняння площини, яка проходить через три точки: $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ і $M_3(x_3;y_3;z_3)$, може бути представлено у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_2 & y_2-y_2 & z_2-z_2 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

6.14. Чи паралельні площини:

а) $x+2y+3z+5=0$ і $2x+4y+6z+11=0$;

б) $x-7y+5z-1=0$ і $2x+y-3z+4=0$?

6.15. Чи перпендикулярні площини:

а) $2x-5y+z+4=0$ і $3x+2y+4z-1=0$;

б) $7x-y+9=0$ і $y+2z-3=0$?

6.16 Скласти рівняння кола, якщо:

а) центр кола співпадає з початком координат і його радіус $r=3$;

б) центр кола співпадає з точкою $C(2;-3)$ і його радіус r=7.

6.17. Які з рівнянь визначають коло? Знайти центр і радіус кожного з них:

а) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$; б) $(x+2)^2+y^2=64$;

в) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$; г) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$;

д) $x^2+y^2+x=0$; ж) $x^2+y^2+y=0$.

6.18. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо:

а) $a=5$, $b=2$;

б) $a=10$, $2c=8$;

в) 2c=6, ε =3/5.

6.19. Визначити півосі еліпса:

а) $x^2/4+y^2=1$; б) $x^2+25y^2=25$;

в) $4x^2+9y^2=25$; г) $9x^2+25y^2=1$;

д) $x^2+4y^2=1$; ж) $9x^2+y^2=1$.

6.20. Задано еліпс $9x^2+25y^2=225$. Знайти:

а) півосі;

б) фокуси;

в) ексцентриситет;

г) рівняння директрис.

6.21. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо:

а) $2a=10$, $2b=8$;

б) $2c=10$, $2b=8$;

в) $2c=6$, $\varepsilon=3/2$;

г) $2a=16$, $\varepsilon=5/4$.

6.22. Визначити осі гіперболи:

а) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; *б*) $\frac{x^2}{16}-y^2=1$;

в) $x^2-4y^2=16$; *г*) $x^2-y^2=1$;

д) $25x^2-16y^2=1$; *ж*) $4x^2-9y^2=25$.

6.23. Побудувати гіперболу:

а) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$;

б) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$;

в) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$.

6.24. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, якщо:

а) парабола розташована на правій півплощині симетрично відносно осі OX і її параметр P=3;

б) парабола розташована на лівій півплощині симетрично осі OX і її параметр P=0,5;

в) парабола розташована у верхній півплощині симетрично відносно осі OY і її параметр P=1/4;

г) парабола розташована у нижній півплощині симетрично відносно осі OY і її параметр P=3.

6.25. Зобразити параболи:

а) $y^2=6x$; б) $x^2=5y$; в) $y^2=-4x$; г) $x^2=-y$.

6.26. Встановити, які лінії визначаються рівнянням і зобразити їх:

1) $y=+\sqrt{9-x^2}$; 2) $y=-\sqrt{25-x^2}$;

3) $x=-2-\sqrt{9-y^2}$; 4) $y=-3-\sqrt{21-4x-x^2}$;

5) $y=-7+\frac{2}{5}\sqrt{16+16x-x^2}$; 6) $x=-2\sqrt{-5-6y-y^2}$;

7) $x=-5+\frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$; 8) $y=1-\frac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2}$;

9) $y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$; 10) $y=7-\frac{2}{3}\sqrt{x^2-6x+13}$;

11) $x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$; 12) $x=5-\frac{3}{4}\sqrt{y^2+4y-12}$;

13) $y=-3\sqrt{-2x}$; 14) $x=+\sqrt{5y}$;

15) $y=+\sqrt{-x}$; 16) $x=+4\sqrt{-y}$.

6.27. Скласти рівняння сфери, яка має центр в точці:

а) $O(2;-3;3)$ і $r=6$;

б) $O(0;0;0)$ і проходить через т. $B(6;-2;3)$

в) $A(1;4:-7)$ і дотикається площини $6x+6y-7z+42=0$.

6.28. Зобразити сферу:

а) $x^2+y^2+z^2-6x+8y+2z+10=0$;

б) $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$; в) $x^2+y^2+z^2-6x+10=0$.

6.29. Зобразити циліндричні поверхні:

а) $x^2+z^2=9$; б) $xz=2$;

в) $16y^2-25z^2=400$; г) $z^2+4z-2x+6=0$;

д) $y^2=-6z$; ж) $x^2+y^2=4y$.

6.30. Скласти рівняння поверхні обертання наступних ліній:

а) $\begin{cases} y^2+z^2=4 \\ x=0 \end{cases}$; *б*) $\begin{cases} \frac{x^2}{25}-\frac{z^2}{16}=1 \\ x=0 \end{cases}$;

навколо OY навколо OZ

в) $\begin{cases} y=3z \\ x=0 \end{cases}$; *г*) $\begin{cases} y^2-z^2=1 \\ x=0 \end{cases}$.

навколо OZ навколо OZ і OY.

6.31. Методом перерізів встановити вид поверхні:

а) $x^2+y^2=\sin^2 z$; б) $4-z=x^2+y^2$; в) $x^2+y^2=2(z-1)^2$;

г) $2y^2+z^2=1-x$; д) $3x^2-y^2-z^2=3$; ж) $x^2-2y^2+z^2=1$.

6.32. Які поверхні визначаються рівняннями:

а) $2x^2-y^2+2z^2+4x+2y+8z+2=0$;

б) $2x^2+y^2+2z^2-4x+4y+4z+7=0$;

в) $x^2-6y^2+3z^2+8x+12y+1=0$;

г) $x^2+y^2+2x-2y-2z-2=0$?

Тема 7

Функція дійсної змінної, властивості і графічне зображення

Якщо кожному числу x з деякої множини D за певним правилом поставлене у відповідність єдине число y, то y **є функцією від** x і позначається $y = f(x)$, $x \in D$.

Змінна x є незалежною змінною (аргументом), а змінна y - залежною змінною (функцією).

Множина D значень аргументу x, для яких функція $y = f(x)$ має дійсний зміст, є **областю визначення** цієї функції.

Множина E всіх чисел y, таких, що $y = f(x)$ для кожного $x \in D$, є **множиною значень** функції.

Функція $f(x)$ є **парною**, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in D$, і **непарною**, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in D$.

Функція $f(x)$, яка визначена на всій числовій прямій, є **періодичною**, якщо $f(x+T) = f(x)$. Число T називається **періодом функції**. Найменше з додатних чисел T є **основним періодом** функції.

Якщо функція $f(x)$ визначена на множині D і для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу з цієї множини $(x_1 < x_2)$, маємо, що:

$f(x_1) < f(x_2)$, то функція є зростаючою;

$f(x_1) > f(x_2)$, то функція є спадною;

$f(x_1) \le f(x_2)$, то функція є неспадною;

$f(x_1) \ge f(x_2)$, то функція є незростаючою.

Функції 1) – 4) на множині D називаються **монотонними** на цій множині.

Функція $f(x)$, яка визначена на множині D, є **обмеженою** на D, якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in D$, виконується $|f(x)| < M$.

Якщо для функцій $f(x)$ і $g(x)$, які визначені на D, існує таке число N, що для всіх $x \in D$ виконується $f(x) \le N$, або $g(x) \ge N$, то $f(x)$ є **обмеженою зверху**, а $g(x)$ - **обмеженою знизу** функціями.

Якщо рівняння $F(x_1 y) = 0$, яке не розв'язане відносно y, визначає y як функцію x, то y є **неявною** функцією x.

Функція $x = \varphi(y)$ є **оберненою** до функції $y = f(x)$, якщо:

областю визначення φ є множина значень f;

множина значень φ є областю визначення f;

кожному $y \in E$ відповідає **єдине** $x \in D$.

Функція $y = f(x)$, де $x \in D$, $y \in E$ має обернену функцію $x = \varphi(y)$ **тоді і тільки тоді**, коли вона є **строго монотонною** в області D.

Задання функціональної залежності між x і y у вигляді двох функцій $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ однієї незалежної змінної t, які визначені на одному й тому самому проміжку, є **параметричним заданням** функцій, змінна t при цьому називається **параметром**.

Якщо функція $x = \varphi(t)$ має обернену $t = \Phi(x)$, то змінну y можна розглядати як **складену** функцію від x: $y = \varphi(\Phi(x))$.

Щоб задати функцію $y = f(x)$, треба вказати її область визначення D, множину значень E і правило f, за яким для довільного числа $x \in D$ можна знайти відповідне йому число $y \in E$.

Основні способи задання функції:

аналітичний, графічний, табличний, словесний, за допомогою комп'ютерних програм тощо.

Основними елементарними функціями є:

степенева $y = x^n$, $n \in R$;

показникова $y = a^x$, $a > 0$, $a \ne 1$;

логарифмічна $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \ne 1$;

тригонометричні $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctg\,x$;

обернені тригонометричні $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

Якщо відомий графік функції $y = f(x)$, то правильні такі твердження:

1) графік функції $y = f(x) + b$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі Oy на величину, що дорівнює b;

2) графік функції $y = f(x + a)$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі Ox на величину, що дорівнює - a;

3) графік функції $y = c\,f(x), \quad c \neq 0$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ при $0 < c < 1$ за допомогою стискування в $\frac{1}{c}$ разів ординат останнього, а при $c > 1$ за допомогою розтягування в c разів його ординат із збереженням відповідних абсцис. Якщо $c < 0$, то графік $y = cf(x)$ є дзеркальним відображенням графіка $y = -cf(x)$ відносно осі Ox;

4) графік функції $y = f(kx)$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ при $0 < k < 1$ збільшенням в $\frac{1}{k}$ разів абсцис його точок, а при $1 < k < +\infty$ - зменшенням у k разів абсцис його точок із збереженням їхніх ординат. Якщо $k < 0$, то графік $y = f(kx)$ є дзеркальним відображенням графіка $y = f(-kx)$ відносно осі Oy.

Основні елементарні функції, а також функції, утворені за допомогою формул, в яких над основними елементарними функціями виконується скінченне число арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозицій (накладання), називають **елементарними**.

Елементарні функції поділяють на такі класи:

функція виду $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, де $n \in Z_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - дійсні числа – коефіцієнти $(a_0 \neq 0)$, називається **цілою раціональною функцією**, або многочленом (поліномом) степеня n. Многочлен першого степеня називається також лінійною функцією, а другого – квадратичною.

функція, що є відношенням двох многочленів $R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}$, називається дробово – раціональною функцією, або раціональним дробом. Сукупність многочленів і раціональних дробів утворює клас **раціональних функцій**.

функція, утворена за допомогою скінченного числа суперпозицій та арифметичних операцій над раціональними функціями і над степеневими функціями з дробовими показниками, і яка не є раціональною, називається **ірраціональною** функцією. Наприклад, $y = \sqrt{x} - 2$; $y = \sqrt[3]{\frac{4x-1}{x^2+5}}$ тощо;

елементарна функція, яка не є раціональною або ірраціональною, називається **трансцендентною** функцією. Наприклад, $y = \sin x$, $y = 5^x - x$, $y = \ln x$, $y = \arcsin x$ тощо.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Довжина l кола діаметром d визначається за формулою $l = \pi d$, де $\pi - const$. Змінна l залежить від змінної d, тобто довжина кола l є функцією діаметра d : $l = f(d)$.

Приклад 2.

Знайти області визначення функцій:

а). $y = \frac{x+2}{\sqrt{-x^2+3x+4}}$; б). $y = \lg\sin(x-2)$; в). $y = \arcsin\frac{x-1}{3x}$; г). $y = n!$

Розв'язання.

а). $-x^2 + 3x + 4 > 0$; $-1 < x < 4$; D : (-1;4);

б). $\begin{cases} \sin(x-2) > 0, \\ |\sin(x-2)| \leq 1; \end{cases}$ D : $(2(\pi n + 1); (2n+1)\pi + 2)$, $n \in z$;

в). $\begin{cases} \left|\frac{x-1}{3x}\right| \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$ D : $(-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{4}; \infty)$

г). $y=n!$ ставить у відповідність кожному $n \in N$ число $y=n!$ Наприклад, якщо n=4, то y=4! =1 • 2 • 3 • 4 = 24. Тому $D : Z_0$ (так як 0! =1), де $Z_0 = \{0;1;2;...;n;...\}$.

Приклад 3.

Побудувати графіки функцій:

а). $y=2n-3$, $n \in N$;

б). $y = \begin{cases} x^2 - 2, x \leq 2; \\ 2, x > 2; \end{cases}$

в). $y = \frac{|x|}{x}$.

Розв'язання.

а). графіком є нескінченна множина ізольованих точок (рис. 7.1), які лежать на прямій $y=2x-3$;

б). графіком функції, що задана різними аналітичними виразами на різних частинах області зміни x, є сукупність параболи і прямої (рис. 7.2).

в). функція визначена при $x \neq 0$ і набуває двох значень: -1 і 1; D: $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$;

E: $\{-1;1\}$ (рис. 7.3).

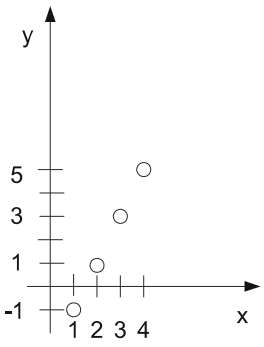


Рис. 7.1

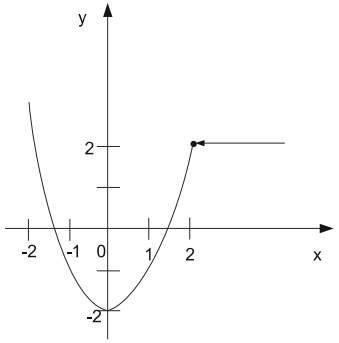


Рис. 7.2

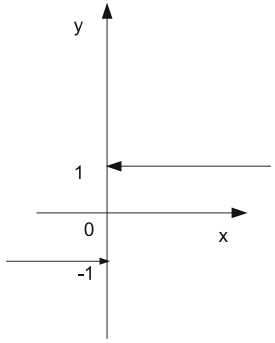


Рис. 7.3

Приклад 4.

Дослідити на парність функції:

а). $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$;

б). $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x}$;

в). $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Розв'язання.

а). функція не є парною і не є непарною, бо її область визначення не симетрична відносно точки 0 (в точці x=1 функція визначена, а у точці x=-1 не визначена);

б). область визначення симетрична відносно точки 0, але функція не є парною і не є непарною, бо

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2+(-x)}{-x}=\dfrac{x^2-x}{-x}=-\dfrac{x^2-x}{x}$, і, отже,

$f(-x)\neq f(x)$ і $f(-x)\neq -f(x)$;

в). область визначення симетрична відносно точки 0 і

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2-1}=\frac{1}{x^2-1}=f(x).$$

Отже, функція $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ - парна.

Приклад 5.

Довести монотонність функції $f(x)=\sqrt{x}$.

Доведення.

D: $[0;\infty)$; розглянемо різницю

$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$, де $x_1\in D, x_2\in D, x_1>x_2$.

$$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}.$$

Оскільки $x_1>x_2$ і $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>0$, то $\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}>0$. Отже, при $x_1>x_2$ $f(x_1)>f(x_2)$, і тому функція $y=\sqrt{x}$ - зростаюча.

Приклад 6.

Знайти функції, обернені до даних:

а). y=2x-1;

б). $y=x^2$;

в). $y=a^x$;

г). $y=\sin x$;

д). $y=arcctgx$.

Розв'язання.

а). $y=\dfrac{x+1}{2}$;

б). $y=x^2$ на множині $(-\infty;\infty)$ не має оберненої, тому що вона не є монотонною; але на множині $(0;\infty)$ функція має обернену $y=\sqrt{x}$, $x\in(0;\infty)$;

в). функція $y=a^x$, $x\in R$, $y\in(0;\infty)$ має обернену функцію $y=\log_a x$, $x\in(0;\infty), y\in R$.

г). функція $y=\sin x$, $x\in R$ не має оберненої; але функція $y=\sin x$, де $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ має обернену функцію $y=\arcsin x, x\in[-1;1]$;

д). функція $y=arcctgx$, $x\in R$ має обернену функцію $y=ctgx$, де $x\in(0;\pi), y\in R$.

Приклад 7.

Використовуючи перетворення графіків функцій, побудувати графіки функцій:

а). $y = 3\sin 2x$; б). $y = 2(x+1)^2 - 3$ в). $y = \left|\log_2 |x|\ \right|$.

Розв'язання.

а). $y = 3\sin 2x$;

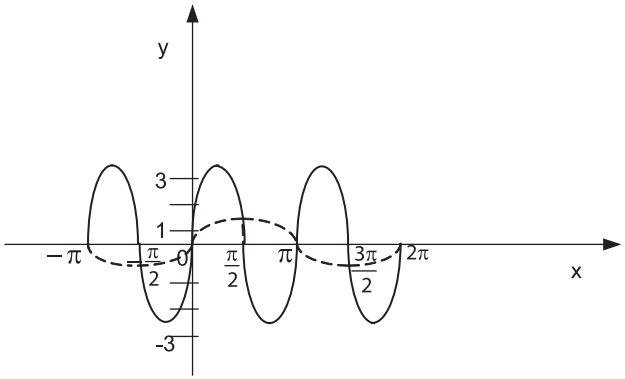


Рис. 7.4

б). $y = 2(x+1)^2 - 3$

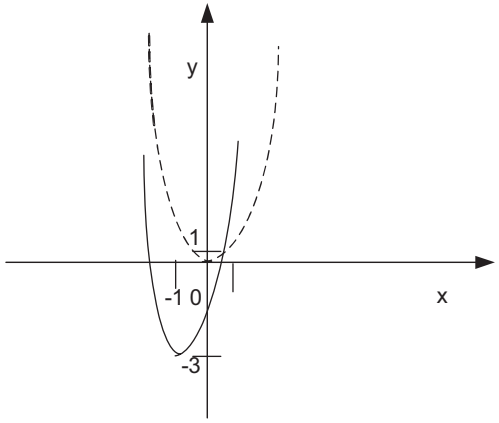


Рис. 7.5

в). $y = \left|\log_2 |x|\ \right|$

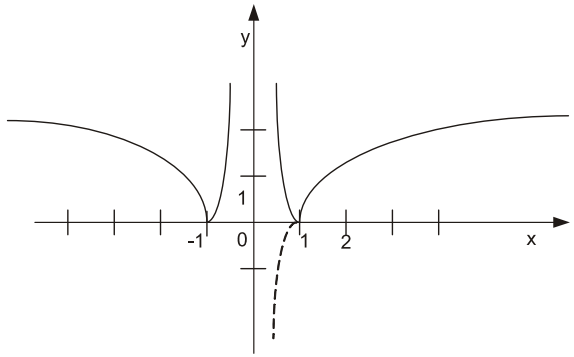


Рис. 7.6

Задачі

7.1. $f(x)=2x^2-3x+1$. Знайдіть $f(0)$; $f(3)$; $f(-3)$.

7.2. $f(x) = \begin{cases} x+2, & -\infty < x \le -2, \\ 4-x^2, & -2 < x < 2, \\ x-2, & 2 \le x \le \infty \end{cases}$

Знайдіть $f(-5)$; $f(-2)$; $f(0)$; $f(3)$.

7.3. Знайдіть $f(-1)$, f(2), $f(0)$, $f(3)$, якщо функція задана таблицею:

X	-4	-2	-1	0	1	2	3	4
Y	17	5	2	1	2	5	10	17

Задайте цю функцію аналітично.

7.4. Задані дві множини:

E={4; 6; 9; 11} і E_1={1/4; 1/6; 1/9; 1/11}.

Покажіть відповідність між множинами E і E_1, яка є функцією:

1) стрілками на діаграмі Венна;

2) дводольним графом;

3) таблицею.

7.5. Нехай X={-5;-1;5;6}, Y={5;29;35} Чи можна функцію $X \xrightarrow{f} Y$ задати формулою

1) $y=x^2+4$; 2) $y=6|x|-1$.

7.6. Знайдіть корені функцій:

1) $y=-2x^2+5$; 5) $y=\sqrt{\dfrac{x+8}{x}}$;

2) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$; 6) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{8x}}$;

3) $y=\dfrac{|x-2|}{x+3}$; 7) $y=27^x-13\cdot 9^x+13\cdot 3^{x+1}-27$

4) $y=\sqrt{4x+3}$ 8) $y=\sin x\cos x$

7.7. Функція задана формулою:

а) $y=\dfrac{x-1}{2}$; *б*) $y=\dfrac{x^2-2}{2(x+1)}$; *в*) $y=-0{,}1x^2-0{,}2x+0{,}3$;

г) $y=\sqrt{x}$; *д*) $y=\sqrt[3]{x}$; *ж*) $y=\begin{cases}x-1, x\le 0\\ x^2, x>0\end{cases}$.

Які з чисел –1, 0, 1 належать області визначення функції? Знайдіть відповідні їм значення функції. Чи належить множині значень функції число –1; число –1/2; число 0?

7.8. Знайдіть область визначення функції:

а) $\dfrac{x-5}{2x^2-10x-28}$; *б*) $y=\dfrac{1}{|x|-4}$;

в) $y=\sqrt{-x}$; *г*) $y=\sqrt{x-2}-\sqrt{1-x}$;

д) $y=3\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$; *ж*) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x+1}{x}}$;

з) $y=\log_{0,1}\dfrac{2x-5}{x}$; *к*) $y=\log_2(x^2-7x+12)+\sqrt{x-1}$

л) $y=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$; *м*) $y=\lg(\sin x+2)$.

н) $y=\arcsin\dfrac{x}{x+1}$; о) $y=\arcsin\log_2(x^2-3x+3)$; п) $y=2^{ctgx}+\arccos\dfrac{x-1}{6}$.

7.9. Встановіть залежність:

1) об'єма циліндра з радіусом основи **r**=2см від його висоти **h** і побудуйте графік цієї залежнсті;

2) об'єма циліндра висотою **h** = 5 см від радіуса **r** його основи і побудуйте графік цієї залежності;

3) висоти **h** циліндра від радіуса **r** основи, якщо об'єм циліндра дорівнює 1 см^3.

7.10. Вкажіть проміжки монотонності функцій:

а) $y=5$; *б*) $y=1-\dfrac{x}{2}$; *в*) $y=x^2+2x+1$;

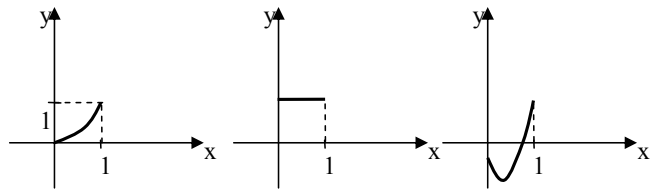
г) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$; *д*) $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$; *ж*) $y=|x|$;

з) $y=tg2x$; *к*) $y=-\dfrac{3}{x}$.

7.11. На рисунку зображені графіки деяких функцій. Добудуйте їх до графіків:

1) парних; 2) непарних функцій на відрізку [-1,1];

3) періодичних з періодом T=1.



7.12. Використовуючи лінійні перетворення графіків функцій, побудуйте графіки функцій:

а) $y=\sqrt{x}-4$; *б*) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1$; *в*) $y=\sqrt{x+4}$;

г) $y=\dfrac{5}{x-3}$; *д*) $y=(x+3)^x-1$; *ж*) $y=2+\lg(x-1)$;

з) $y=2\sin(x+1)$; *к*) $y=\cos xtgx$; *л*) $y=-x^2+x\log_2\sqrt{2}$;

м) $y=\dfrac{\sqrt{x(x-2)^2}}{x-2}$; *н*) $y=\dfrac{|\sin x|}{\sin x}$; *о*) $\log_{\sin x}\sin^3 x$.

п). $y=2^{|x|}-1$; р). $y=|tg|x||$; с). $y=\dfrac{|x-2|+|x+2|}{4}$.

Тема 8

Границя функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі $u(x_0)$ точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Число A є **границею** функції $f(x)$ в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in u(x_0)$, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначення: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. (8.1)

Функція $y = f(x)$ при $x \to x_0$ є **нескінченно великою** (має границю ∞), якщо вона визначена в деякому околі $u(x_0)$ точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, і для довільного числа $M > 0$ існує таке $\delta = \delta(M) > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty\right)$ (8.2)

При $x \to \infty$ функція $y = f(x)$ є **нескінченно великою**, якщо для довільного числа $M > 0$ можна знайти таке число $N = N(M) > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність $|f(x)| > M \quad \left(\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty\right)$ (8.3)

Функція $\alpha(x)$ є **нескінченно малою** величиною при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \left(\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0\right)$.

Деякі властивості нескінченно малих величин:

1) якщо при $x \to x_0 (x \to \infty)$ $\alpha(x)$ - нескінченно мала, а $f(x)$ - нескінченно велика величина, то при $x \to x_0 (x \to \infty)$ $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ і $\dfrac{1}{f(x)}$ - відповідно нескінченно велика і нескінченно мала величини;

2) сума скінченного числа нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною;

3) добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно малою величиною;

4) частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є нескінченно малою величиною.

Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $g(x)$ має скінченну границю при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, то справедливі формули:

1) $\lim cf(x) = c \lim f(x), \quad c = const;$ (8.4)

2) $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x);$ (8.5)

3) $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x);$ (8.6)

4) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}; \quad \lim g(x) \neq 0$. (8.7)

При обчисленні границі використовують:

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ - **перша визначна границя** (8.8)

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ – **друга визначна границя** (8.9),(8.10)

Число A **є границею функції** $y = f(x)$ **зліва** (лівою границею) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується $|f(x) - A| < \varepsilon \left(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A\right)$ (8.11)

Число B є **границею функції** $y = f(x)$ **справа** (правою границею) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon \left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = B\right)$ (8.12)

Ліва і права границі функції називаються однобічними границями.

Порівняння нескінченно малих величин:

Нехай $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ - нескінченно малі величини при $x \to x_0$, тоді:

1) якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = A \neq 0$, $A \in R$, то $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ є нескінченно малими одного порядку;

2) якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0$, то $\alpha_1(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha_2(x)$;

3) якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty$, то $\alpha_1(x)$ є нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\alpha_2(x)$;

4) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2^k(x)}=A\neq 0,\ A\in R$, то $\alpha_1(x)$ є нескінченно малою *к*-го порядку відносно $\alpha_2(x)$;

5) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=1$, то $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ є еквівалентними нескінченно малими $(\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x))$;

6) якщо $\alpha_1(x)\sim\alpha_1^*(x),\ \alpha_2(x)\sim\alpha_2^*(x)$ при $x\to x_0$,

то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A\cdot\alpha_1(x)}{B\cdot\alpha_2(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A\cdot\alpha_1^*(x)}{B\cdot\alpha_2^*(x)},\quad A,B-const.$

Часто зустрічаються такі еквівалентні нескінченно малі величини:

$\sin\alpha\sim\alpha,\ \alpha\to 0$	$e^\alpha-1\sim\alpha,\ \alpha\to 0$	
$tg\alpha\sim\alpha,\ \alpha\to 0$	$a^\alpha-1\sim\alpha\ln a,\ \alpha\to 0$	
$\arcsin\alpha\sim\alpha,\ \alpha\to 0$	$\log_a(1+\alpha)\sim\alpha\log_a e,\ \alpha\to 0$	(8.13)
$arctg\alpha\sim\alpha,\ \alpha\to 0$	$\ln(1+\alpha)\sim\alpha,\ \alpha\to 0$	
$1-\cos\alpha\sim\dfrac{\alpha^2}{2},\ \alpha\to 0$	$(1+\alpha)^k-1\sim k\alpha,\ \alpha\to 0,\ k>0$	

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Знайти: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x-1}{3x^4-x^2+10x+5}$.

Розв'язання.

Маємо невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x-1}{3x^4-x^2+10x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{3-\frac{1}{x^2}+\frac{10}{x^3}+\frac{5}{x^4}}=\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{3}$.

Приклад 2.

Знайти: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4}$.

Розв'язання.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+2x^2-x-2)=0,\ \lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-4)=0$, то маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$.

Щоб розкрити невизначеність, розкладемо чисельник і знаменник на множники:

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x^2+3x+2);\ x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$.

Маємо $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+3x+2)}{(x-1)(x+4)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+2}{x+4}=\dfrac{6}{5}$.

Відповідь: $\dfrac{6}{5}$.

Приклад 3.

Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Розв'язання.

Тут невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Позбудемось від ірраціональності чисельника:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{2}{3}$.

Приклад 4.

Знайти: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^4}-1}{x}$.

Розв'язання.

Нехай $y^5=x+1$, тоді $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^4-1}{y^5-1}=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^3+y^2+y+1}{y^4+y^3+y^2+2y+4}=\dfrac{4}{5}$.

Цей результат можна дістати з еквівалентності $(1+x)^{\frac{4}{5}}-1\sim\dfrac{4}{5}x$.

Відповідь: $\frac{4}{5}$.

Приклад 5.

Знайти: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$.

Розв'язання.

Маємо невизначеність виду $\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=1$$

Відповідь: 1.

Приклад 6.

Знайти $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}$.

Розв'язання.

Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ розкриємо за допомогою першої визначної границі (8.8):

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim_{x\to0}\frac{7x}{3x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{7x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{7}{3}.$$

Відповідь: $\frac{7}{3}$.

Приклад 7.

Знайти $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+x)}$.

Розв'язання.

Оскільки $\sin 5x\sim 5x, \ln(1+x)\sim x$ при $x\to0$, то $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{x}=5$.

Відповідь: 5.

Приклад 8.

Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$.

Розв'язання.

Маємо невизначеність виду 1^∞, яку розкриємо за допомогою другої визначної границі (8.9):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x-3}-1\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x+3}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3(2-5x)}{2x-3}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3(2-5x)}{2x-3}}=e^{\frac{-15}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e^{15}}}.$$

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{e^{15}}}$.

Приклад 9.

Знайти: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x}=\lim_{x\to-\infty}2^{1+7x}=2^{-\infty}=0.$$

Відповідь: 0

Приклад 10.

Знайти $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Розв'язання.

Розкриємо невизначеність 1^∞ за допомогою (8.10):

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}=\lim_{x\to0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\frac{-x^2}{2}}{x^2}}=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Задачі

8.1. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+4x-x^3}{5x^3+7x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{(2x+3)^5}$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}$; 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}$.

8.2.

1) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-\sqrt{x+9}}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

5) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$.

8.3.

1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x}{x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-8x+15}$;

3) $\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}}\dfrac{2t^2+t-1}{4(1-t^2)-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+5x-2}{5x^2+12x+4}$;

5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$; *6)* $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{x^2+2x-24}{2x^2+15x+18}$.

8.4.

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos2x}{\cos x-\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{6x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos6x-\cos4x}{x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{x}-1)\sin x}{x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{5+\sin x}-\sqrt{5-\sin x}}{x}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xtg3x}{\cos x-\cos^3 x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

8.5.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{2}{2x-x^2}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-3x-1}{x^4-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3}{4x^2-3}-\dfrac{2x^2}{4x+3}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sqrt{x}+8x^2-1}{x+\sin5x}$.

8.6.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1})$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^4+13x^2-7}-2x^2)$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(2x+3)^2}-\sqrt[3]{(2x-7)^2}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}-\sqrt{4x^2-5x+3}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

8.7.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}\right)^{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)[\ln(x+1)-\ln(x-2)]$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+5)[\ln(x+5)-\ln x]$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+ctgx)^{tgx}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x^4)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to4\pi}(\cos x)^{\frac{1}{tgx\sin2x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{\cos2}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$.

8.8.

1) $\lim\limits_{x\to0}xctg5x$; 2) $\lim\limits_{x\to0}x^2\left(4^{\frac{1}{x}}-4^{\frac{1}{x+1}}\right)$;

8.9. Порівняти нескінченно малі при x→0:

1) $\alpha(x)=x\ln(1+x)$, $\beta(x)=\sin x$;

2) $\alpha(x)=a^x-1$, $\beta(x)=x\ln a$;

3) $\alpha(x)=x^2\sin^2 x$, $\beta(x)=xtgx$;

4) $\alpha(x)=\sqrt{1+x}-1$, $\beta(x)=\frac{1}{2}x$;

8.10. Використовуючи принцип заміни еквівалентними, обчисліть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{tg(x^2)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\beta x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(e^{x-1}-1\right)}{\ln x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{tgx}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{arctg(2-x)+\sin(x-2)^2}{x^2-4}$;

8) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{2\sin\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}+\ln(1+x)}{x+\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

Тема 9

Неперервність функції

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в т. x_0 і в δ-околі $u(x_o)$. Якщо нескінченно малому приросту аргумента Δx в т x_0 відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_o)$, то функція $y=f(x)$ називається **неперервною** в т. x_0.

Це визначення на практиці еквівалентне виконанню трьох умов:

функція $f(x)$ визначена в т. x_0 і $u(x_o)$;

існують $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)$; (9.1)

виконується умова:

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_o+0} f(x)$.

Якщо не виконується хоча б одна з цих умов, функція називається розривною в т. x_0. При цьому, якщо всі границі в умовах (9.1) скінченні, то розрив називається **розривом I роду**, якщо ж хоч одна з границь нескінченна, то розрив називається **розривом II роду**.

Функція, що неперервна в кожній точці відрізку $[a,b]$, називається **неперервною на цьому відрізку.**

Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $y=f(x)$ називається **гладкою** на $[a,b]$, якщо в кожній точці відрізка графік функціїї має дотичну.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Дослідити функцію $y=\begin{cases}3x^2, x\le 1\\ x+2, x>1\end{cases}$ не неперервність в точці $x=1$.

Розв'язання.

Функція визначена в точці $x=1$ і в будь-якому околі цієї точки.

$f(1)=3;\ \lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<0}} 3x^2=3;\ \lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x+2)=3.$

Отже, функція неперервна в точці $x=1$ (рис. 9.1).

Приклад 2.

Дослідити функцію $y=\begin{cases}4-x^2, x<2\\ -1, x\ge 2\end{cases}$ на неперервність в точці $x=2$.

Розв'язання.

$f(2)=-1;\ \lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(4-x^2)=0;\ \lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(-1)=-1.$

Отже, функція в точці $x=2$ має розрив першого роду (рис. 9.2).

Стрибок функції $\delta=|-1-0|=1$.

Приклад 3.

Дослідити функцію $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ на неперервність в точці $x=0$.

Розв'язання.

Функція $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ не визначена в точці $x=0$, але має в цій точці границю, тому $x=0$ - точка усувного розриву; досить покласти $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, щоб функція стала неперервною. Отже, функція $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\ne 0\\ 1, x=0\end{cases}$ є неперервною в точці $x=0$ (рис. 9.3).

Приклад 4.

Дослідити на неперервність функцію $f(x)=2^{\frac{1}{x+1}}$ в точці $x=-1$.

Розв'язання.

Функція не визначена в точці $x=-1$, тому функція в цій точці має розрив. Щоб визначити характер розриву, знайдемо границі зліва і справа:

$$\lim_{x\to -1-0} 2^{\frac{1}{x+1}}=\left|\begin{matrix}x=-1-\delta\\ \delta\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{\delta\to 0} 2^{\frac{1}{-1-\delta+1}}=\left|2^{-\infty}\right|=+0;$$

$$\lim_{x\to -1+0} 2^{\frac{1}{x+1}}=\left|\begin{matrix}x=-1+\delta\\ \delta\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{\delta\to 0} 2^{\frac{1}{-1+\delta+1}}=\left|2^{\infty}\right|=+\infty.$$

Отже, точка $x=-1$ є точкою розриву другого роду (рис. 9.4).

Приклад 5.

Дослідити на неперервність функцію $y=\sin\dfrac{1}{x}$ в точці $x=0$.

Розв'язання.

В точці $x=0$ функція $y=\sin\dfrac{1}{x}$ має розрив другого роду, тому що жодна з однобічних границь в цій точці не існує (рис. 9.5).

Приклад 6.

Знайти точки розриву функції $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Розв'язання.

Функція $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ розривна в точках $x=\pm 1$, тому що в цих точках вона не визначена. З'ясуємо вид розриву.

Так як функція непарна, будемо досліджувати тільки точку $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{x^2-1}=\left|\begin{matrix}x=1-\delta\\ \delta\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{\delta\to 0}\frac{1-\delta}{(1-\delta)^2-1}=\left|\frac{1}{-0}\right|=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{x^2-1}=\left|\begin{matrix}x=1+\delta\\ \delta\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{\delta\to 0}\frac{1+\delta}{(1+\delta)^2-1}=\left|\frac{1}{+0}\right|=+\infty.$$

Тому $x=\pm 1$ - точки розриву другого роду (рис. 9.6).

Приклад 7.

Довести, що на відрізку $[1;2]$ рівняння $x^4-x-1=0$ має корінь.

Доведення.

Нехай $f(x)=x^4-x-1$. Так як $f(1)=-1,\ f(2)=13,$ то рівняння $x^4-x-1=0$ має корінь на відрізку $[1;2]$. Поділимо цей відрізок на 10 рівних частин і обчислимо послідовно

$f(1{,}1)=-0{,}63...,\ f(1{,}2)=-0{,}12...,\ f(1{,}3)=+0{,}55...$

Звідси корінь рівняння міститься між 1,2 і 1,3.

Приклад 8.

Розв'язати нерівність $x^2-3x+2>0$.

Розв'язання.

Нехай $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Коренями рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$ є числа $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Тому розглянемо проміжки $(-\infty;1); (1;2); (2;+\infty)$.

Оскільки $f(0) = 2 > 0$, $f(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4} < 0$, $f(3) = 2 > 0$, то розв'язком нерівності є інтервали $(-\infty;1)$ і $(2;+\infty)$.

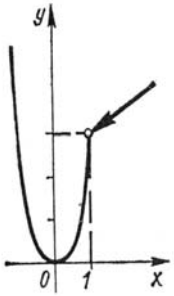


Рис. 9.1

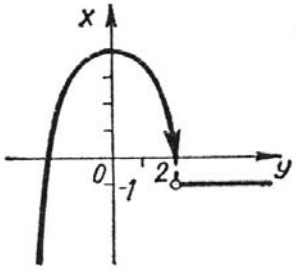


Рис. 9.2

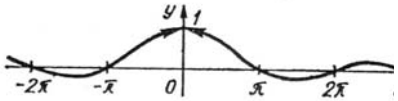


Рис. 9.3

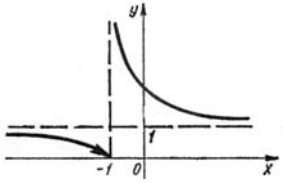


Рис. 9.4

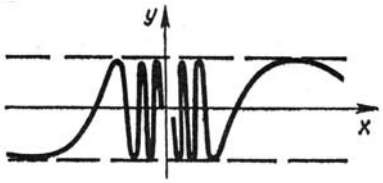


Рис. 9.5

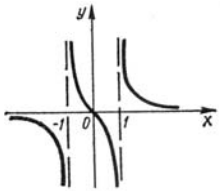
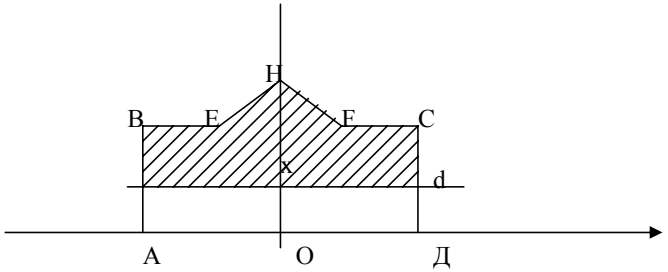


Рис. 9.6

Задачі

9.1. Фігуру ABEHFCD, зображену на рисунку, перетинає пряма d, яка паралельна її основі.



1) Встановіть залежність між довжиною відрізка, отриманого в перерізі фігури, і відстанню x від вершини до прямої *d*, якщо *AD*=*OH*=4см, *EF*=*AB*=2см. Побудуйте графік цієї функції. Чи буде вона неперервною?

2) Встановіть залежність між площею основи частини фігури, яка лежить вище прямої *d*, і відстанню x. Побудуйте графік функції. Чи буде вона неперервною?

9.2. Довести, що функції неперервні:

а) $y = 2x$; *б*) $y = \sin x$; *в*) $y = \dfrac{3x^2 - 2}{2x^2 + 7}$; в точці x_0=3;

г) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ в точці $x_0 = 2$; *д*) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 2}$ в точці $x_0 = 2$.

9.3. Довести, що функція розривна в точці x_0; побудувати графік функції, якщо:

а) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 0 \\ x^2, & x \le 0, \quad x_0 = 0 \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0, \quad x_0 = 0 \end{cases}$

9.4. Знайти точки розриву функції, встановити їх рід, знайти стрибки функції в точках розриву 1-го роду, побудувати графік функції:

а) $y=\begin{cases}1/x-1, & x<0\\ (x+1)^2, & 0\le x\le 2;\\ 1-x, & 2<x.\end{cases}$ *б*) $y=\dfrac{|x+2|}{x+2}$;

в) $y=\dfrac{1}{\cos x}$; *г*) $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

9.5. Встановити, чи існує значення параметра *a*, при якому функція неперервна в точці x_0, якщо:

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x}{1+x^3}, & x\ne -1\\ a, & x=-1,\ x_0=-1\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}ax^2+1, & x>0\\ -x, & x\le 0,\ x_0=0\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0\\ a(x-1), & x>0,\ x_0=0\end{cases}$

9.6. Визначити точки розриву функції, поведінку функції в околі точці розриву. Зробити ескіз графіка функції в околі точки розриву:

а) $y=\dfrac{1}{1-x}$; *б*) $y=\dfrac{6}{x^2-2x-3}$;

в) $y=\dfrac{3^x+1}{x^2-1}$; *г*) $y=\dfrac{2x+x^2}{x}$;

д) $y=\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}$; *ж*) $y=\dfrac{x}{1+\cos x}$;

9.7. Використовуючи властивості неперервних функцій доведіть, що наступні рівняння мають розв'язок на вказаному проміжку:

а) $x^3+3x+1=0,\quad -1\le x\le 0$;

б) $x^6-5x+1=0,\quad 1\le x\le 2$;

в) $\sin x-x+1=0,\quad 0\le x\le \pi$;

г) $x=2^{-x},\quad 0\le x\le 1$;

9.8. Розв'язати нерівності:

а) $(x-2)(x+1)(x-5)<0$;

б) $\dfrac{5x-2}{x+1}<5$;

в) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{3}{x+2}$;

г) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{(x-1)(x+3)}>0$;

д) $x+4<\sqrt{x+46}$;

ж) $(1+x)\sqrt{1+x^2}>1-x^2$.

Тема 10

Похідна та диференціал функції, їх застосування

Границя відношення приросту функції до приросту аргумента в даній точці, коли приріст аргументу прямує до нуля, називається **похідною функції в точці** і позначається

$$y' = y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

З визначення випливає, що похідна від сталої дорівнює нулеві.

Правила диференціювання:

1.^{0} $\left[cu(x)\right]' = c \cdot u'(x);$ (10.1)

2.^{0} $\left[u(x) \pm v(x)\right]' = u'(x) + v'(x);$ (10.2)

3.^{0} $\left[u(x) \cdot v(x)\right]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$ (10.3)

4.^{0} $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)};$ (10.4)

5.^{0} якщо функція $y = f(t)$ має похідну в точці t, а $t = \varphi(x)$ і має похідну в точці x, то складна функція $y = f\left[\varphi(x)\right]$ має похідну в точці x, причому

$$y'(x) = y'_t \cdot t'_x$$

або

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \qquad (10.5)$$

6.^{0} Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умови:

- строго монотонна на $\left[a, b\right]$;
- існує похідна y' в будь-якій точці $x \in (a, b)$;
- $f'(x) \neq 0, \ x \in (a, b)$.

Тоді існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка має похідну, причому

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ або } x'_y = \frac{1}{y'_x} \qquad (10.6)$$

Таблиця похідних.

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(sinx)' = \cos x$	$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(cosx)' = -\sin x$	$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

При відшуканні похідної показниково-степеневої функції або функції, яка є добутком великої кількості співмножників, її спочатку логарифмують, а потім знаходять похідну:

$$\left[\ln f(x)\right]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (10.7)$$

Така похідна називається **логарифмічною похідною функції** $y = f(x)$.

Похідна n**-го порядку від функції** $y = f(x)$ **в точці** x визначається як:

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left[y^{(n-1)}\right] = \left[y^{(n-1)}\right]' \qquad (10.8)$$

Рівняння дотичної і нормалі до графіку функції $y = f(x)$ в т. x_0 має відповідно вигляд:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \qquad (10.9)$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) \qquad (10.10)$$

Якщо функція $y = f(x)$ має скінченну похідну в точці x, тоді її приріст, що відповідає приросту аргумента Δx, можна записати у вигляді:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x) \qquad (10.11)$$

де $\Delta x \to 0$ і $\alpha(\Delta x) \to 0$.

Головний, лінійний відносно Δx член приросту функції, називається **диференціалом функції в точці** x і позначається:

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (10.12)$$

Для наближених обчислень використовують формулу

$$\Delta y \approx dy$$

або $y(x+\Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x$ (10.13)

Правило Лопіталя розкриття невизначених виразів:

– якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені і диференційовані в околі точки $x = a$ за винятком самої точки $x = a$;

– $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;

– $g(x)$ і $g'(x)$ не дорівнюють нулеві;

– існує $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

тоді існує границя відношення функцій, причому

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (10.14)$$

Зауваження

Правило Лопіталя виконується і у випадку, коли $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

Зауважимо, що правило Лопіталя можна використовувати багаторазово до тих пір, поки вираз не стане визначеним.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Обчислити похідну функції $y = e^{tgx} \cdot \ln 2x$.

Розв'язання.

Функція є добутком двох функцій, тому використовуємо третє правило (10.3) диференціювання:

$$\left(e^{tgx} \cdot \ln 2x\right)' = \left(e^{tgx}\right)' \cdot \ln 2x + e^{tgx} \cdot \left(\ln 2x\right)'.$$

Далі використовуємо правило диференціювання складної функції (10.5):

$$\left(e^{tgx}\right)' = e^{tgx}{}' \cdot \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\ln 2x)' = \frac{1}{2x} \cdot 2.$$

Таким чином

$$\left(e^{tgx} \cdot \ln 2x\right)' = \frac{e^{tgx} \cdot \ln 2x}{\cos^2 x} + \frac{e^{tgx}}{x}.$$

Приклад 2.

Обчислити похідну функції $y = (\sin x)^x$.

Розв'язання.

Прологарифмуємо задану функцію:

$\ln y = x \cdot \ln \sin x$,

а тепер продиференцюємо:

$\dfrac{1}{y} y' = \ln \sin x + x \cdot ctgx$.

З цього співвідношення знайдемо y':

$y' = y(\ln \sin x + x \cdot ctgx) = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \cdot ctgx)$.

Приклад 3.

Знайти похідну n-го порядку від функції $y = \sin x$.

Розв'язання.

Візьмемо кілька похідних, щоб побачити закономірність:

$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{(IV)} = \sin x, \ ...$

Бачимо, що через похідну порядку, кратного чотирьом, повертаємось до вихідної функції. Тому загальна формула матиме вигляд:

$$y^{(n)} = \sin(\frac{\pi}{2} + x), \qquad n \in N.$$

Приклад 4.

Обчислити $\sin 46^0$.

Розв'язання.

Скористуємось формулою (10.13). Нехай $x = 45^0 = \dfrac{\pi}{4}$; $\Delta x = 1^0 = \dfrac{\pi}{180^0}$.

Тоді $\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x$

$$\sin 46^0 = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180},$$

або $\sin 46^0 \approx \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\pi}{180} = 0{,}7071 + 0{,}7071 \cdot 0{,}017$

$\sin 46^0 \approx 0{,}7194$.

Приклад 5.

Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{3x}$.

Розв'язання.

Всі умови для використання правила Лапіталя виконуються. Тому:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{3x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{3x}=2\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x\cdot\cos 3x\cdot 3}{3}=2\lim_{x\to 0}\sin 6x=0.$$

Приклад 6.

Дослідити засобами диференціального числення функцію $y=\dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язання.

Областю визначення $D(f)$ функції є $D(f)=R-\{2\}$.

Так як

$$y(-x)=-\frac{x^3}{4(2+x)^2}\neq\begin{cases} y(x); \\ -y(x), \end{cases}$$

то функція не має осі і центра симетрії.

Функція неперервна всюди, крім т. x=2, де вона має вертикальну асимптоту і розрив II роду. Знайдемо однобічні границі в т. x=2:

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^3}{4(2-x)^2}=\left|\begin{matrix} x=2+\delta \\ \delta\to 0 \\ x\to 2\end{matrix}\right|=\lim_{\delta\to 0}\frac{(2+\delta)^3}{4(2-2-\delta)^2}=\left|\frac{8}{+0}\right|=+\infty.$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3}{4(2-x)^2}=\left|\begin{matrix} x=2-\delta \\ \delta\to 0 \\ x\to 2\end{matrix}\right|=\lim_{\delta\to 0}\frac{(2-\delta)^3}{4(2-2+\delta)^2}=\left|\frac{8}{+0}\right|=+\infty.$$

З'ясуємо поведінку функції, коли $x\to\pm\infty$:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{4(2-x)^2}=\pm\infty$, (так як порядок чисельника вищий порядка знаменника).

Таким чином, горизонтальної асимптоти немає.

Знайдемо границі для похилої асимптоти:

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{4(2-x)^2}=\dfrac{1}{4}$ (так як порядок чисельника і знаменника однакові).

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{4(2-x)^2}-\frac{x}{4}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x(2-x)^2}{4(2-x)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-4x^2-x^2}{4(2-x)^2}=1.$$

Значить похила асимптота має рівняння $y=\dfrac{x}{4}+1$.

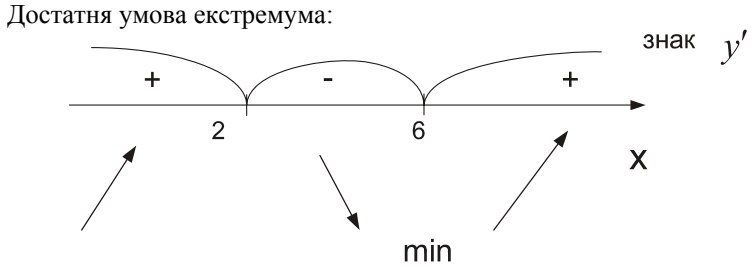
Знайдемо похідну функції, як похідну від дробу:

$$y'=\frac{1}{4}\cdot\frac{3x^2(2-x)^2-x^3\cdot 2(2-x)(-1)}{(2-x)^4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2(2-x)(6-x)}{(2-x)^4}=\frac{x^2(6-x)}{4(2-x)^3}=\frac{x^2(x-6)}{4(x-2)^3}.$$

Необхідна умова екстремума:

$y'=0$	$y'=\infty$	y' не існує
$x_1=6$	$x\in\varnothing$	$x\in\varnothing$.

Достатня умова екстремума:



Функція зростає при $x\in(-\infty,2)\cup(6,+\infty)$ і спадає при $x\in(2,6)$. В т. x=6 функція має локальний мінімум, причому

$$y_{\min}=y(6)=\frac{27}{8}.$$

Знайдемо інтервали опуклості функції і точки перегину графіка функції, якщо вони є. Для знаходження другої похідної спочатку прологарифмуємо функцію, не враховуючи константу $\dfrac{1}{4}$:

$$y=\frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3},$$

$$\ln y=2\ln x+\ln(x-6)-3\ln(x-2),$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-6}-\frac{3}{x-2}.$$

Тоді

$$y'=\frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}\cdot\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x-6}-\frac{3}{x-2}\right),$$

або

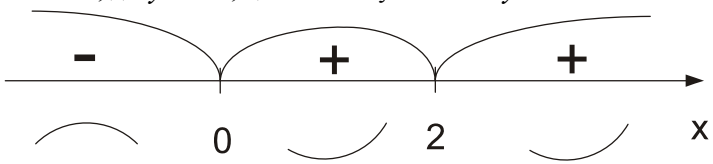
$$y' = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3} \cdot \frac{2x^2 - 16x + 24 + x^2 - 2x - 3x^2 + 18x}{x(x-6)(x-2)},$$

$$y' = \frac{x \cdot 24}{(x-2)^4}.$$

Таким чином звідси отримаємо:

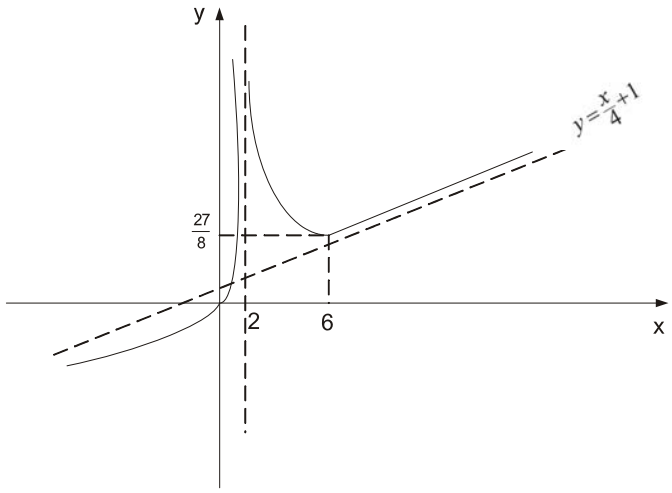
$$y'' = \frac{24x}{4(x-2)^4} = \frac{6x}{(x-2)^4}.$$

Єдина точка, де $y'' = 0$, це x=0. З'ясуємо знак y'' в області визначення:



Функція опукла при $x \in (-\infty, 0)$ і вгнута при $x \in (0,2) \cup (2,+\infty)$. В т. x=0 – перегин графіку.

Тепер побудуємо графік функції, використовуючи отримані результати.



Задачі

10.1. Знайдіть похідну функції за визначенням:

а) $y = 3x^2$; *б*) $y = 5 - 4x^2$; *в*) $y = (x+1)^2$.

10.2. Знайдіть похідні функцій:

1) $y = x\sqrt{x}$; 2) $y = -2x^{\sqrt{2}}$; 3) $y = \sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^{-1}} + \frac{3}{x^2} + 4$;

4) $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$; 5) $y = 3x^2\sqrt[3]{x}$; 6) $y = \sqrt{2x\sqrt{2x}}$;

7) $y = \frac{1}{x\sqrt{2x}}$; 8) $y = \frac{5x^2 - \sqrt{x} - 3}{\sqrt[3]{x}}$; 9) $y = \frac{7 - 3x + x^4}{x - x^2}$;

10) $y = \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt[3]{x^2}}$; 11) $y = \frac{\ln 3}{x^2} - e^2$; 12) $y = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2}$.

10.3. Знайдіть похідні функцій:

1) $y = (x^2+1)(3-5x^2)$; 2) $y = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$;

3) $y = \frac{x^2+3}{x-1}$; 4) $y = \frac{x^2-5x+6}{x^2+x+7}$.

10.4. Знайдіть похідні фукнцій:

1) $y = \sin x + ctgx$; 2) $y = 5x\cos x$;

3) $y = (x+\sqrt{2})tgx$; 4) $y = \frac{\cos x}{x}$;

5) $y = x^3 \cos x$; 6) $y = \frac{\sqrt{x}}{tgx}$;

7) $y = x \arcsin x$; 8) $y = \frac{arctgx}{x^2}$;

9) $y = \frac{\arccos x}{\arcsin x}$; 10) $y = arctgx + arcctgx$.

10.5. Знайдіть похідні фукцій:

1) $y = x\ln x$; 2) $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

3) $y = e^x \log_2 x$; 4) $y = \log_x 2$;

5) $y = (\sqrt{x} + \sqrt{2})e^x$; 6) $y = xe^x - e^x$;

7) $y = (\sqrt{2})^x$; 8) $y = (\ln x + \pi)(\sqrt{x} + 4)$;

9) $y = \dfrac{\ln x - e}{x^3 + 4}$;

10.6. Знайдіть похідні функцій:

1) $y = \sqrt[3]{1 + x^2}$; 2) $y = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$;

3) $y = \sqrt{2x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}$; 4) $y = \dfrac{\cos^2 3x}{\sin 5}$;

5) $y = ctgx^2 - \dfrac{1}{3}tg^3 2x$; 6) $y = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

7) $y = \sqrt{1 + tg(x^2 + x^{-2})}$; 8) $y = arctg\dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x}$;

9) $y = \sin\cos^2 x \cdot \cos\sin^2 x$; 10) $y = \sin\ln x + \cos\ln x$;

11) $y = \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1})$; 12) $y = \sin(\arcsin\sqrt{x})$;

13) $y = \ln\left(\dfrac{x + 3}{x + 2}\right)^2$; 14) $y = 2^{\sin^2 3x}$;

15) $y = \ln\ln\ln(x + 1)$; 16) $y = arctgtg^2 x$;

17) $y = \dfrac{1}{2}tg^2 x + \ln\cos x$; 18) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1 + 2x}{1 - 2x}}$;

19) $y = \dfrac{1}{2}\ln(\sin 3\sqrt{x} + \pi^x)$; 20) $y = e^{\ln^2 x}$;

21) $y - 2^{tgx} + \cos 2e^{x^2}$; 22) $y = \ln tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\sin x}{2}\right)$;

23) $y = arctge^{\frac{x}{2}} - \ln\sqrt{\dfrac{e^x}{e^x + 1}}$; 24) $y = \cos\dfrac{1}{\ln x}$;

25) $y = \ln^3(2x + 3)^2$; 26) $y = 3^{arctg(2x + \pi)}$;

27) $y = \dfrac{tg^2 x}{tgx^2}$; 28) $y = e^{\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}}$;

29) $y = \ln tg\dfrac{x}{2} - \cos x \cdot \ln tgx$; 30) $y = \cos^2 arctg\ln x^3$;

31) $y = e^{1 + \frac{2}{\log_x e}}$; 32) $y = \arcsin\dfrac{1 + \sin x}{\sqrt{2}}$;

33) $y = \sqrt[3]{arctg\sqrt[5]{\cos\ln^3 x}}$; 34) $y = \ln\arcsin\sqrt{1 - e^{2x}}$;

35) $y = \dfrac{e^{\sin^2 x}}{\sqrt{1 + tgx}}$; 36) $y = e^{\arcsin\frac{1}{x}} + 4^{arctg\sqrt{x^2 - 1}}$

10.7. Знайдіть похідні функцій:

1) $y = x^x$; 2) $y = x^{\frac{2}{\ln x}}$;

3) $y = \sin x^{\cos x}$; 4) $y = x^{\sin x}$;

5) $y = (\cos x)^{arctgx}$; 6) $y = (x + 1)(2x + 1)(3x + 1)$;

7) $y = \dfrac{(x + 2)^2}{(x + 1)^3(x + 3)^4}$ 8) $y = x\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2 + 1}}$;

9) $y = (arctgx)^x$; 10) $y = x^{x^x}$.

10.8. Обчисліть у вказаних точках похідні для функцій:

1) $y = 2^{tg\frac{1}{x}}$, $x = \frac{1}{\pi}$;

2) $y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$, $x = 0$, $x = 2$;

3) $y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$, $x = 0$;

4) $y = \ln\sin x$, $x = \frac{\pi}{4}$.

10.9. Знайдіть похідні другого порядку:

1) $y = x^2 + 13x + 11$; 2) $y = \frac{x^3}{3-x^2}$;

3) $y = \cos^2 x$; 4) $y = \arcsin\frac{x^2-1}{x^2+1}$;

5) $y = e^{\sqrt{x}}$; 6) $y = (x^2+x+1)e^{-x}$.

10.10. Складіть рівняння дотичної і нормалі до графіку функції:

1) $y = e^x$ в точці $x_0 = 0$; 2) $y = \sqrt{x}$ в т. $x_0 = 4$; 3) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ в т. $x_0 = -2$;

4) $y = \sqrt[3]{x-1}$ в т. $x_0 = 1$; 5) $y = tg2x$ в початку координат; 6) $y = \arcsin\frac{x-1}{2}$ в точці

перетину з віссю Ox; 7) $y = \arccos 3x$ в точці перетину з віссю Oy; 8) $y = e^{1-x^2}$ в точках

перетину з прямою $y = 1$.

10.11. Визначте проміжки монотонності функцій та їх екстремуми:

1) $y = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 120$; 2) $y = \frac{x^2+1}{x}$;

3) $y = \sqrt{x^3 - 3x}$; 4) $y = \frac{4}{\sqrt{x^2+16}}$;

5) $y = \frac{x}{\sin x}$; 6) $y = 2^{\cos x}$;

7) $y = \frac{\ln x + 2}{x}$; 8) $y = \sin^2 x - x$.

10.12. Знайти інтервали опуклості і точки перегину функцій:

1) $y = 2x^4 - 3x^2 + x - 1$; 2) $y = \frac{1}{1-x^2}$;

3) $y = \sqrt[3]{x+3}$; 4) $y = e^{-x^2}$;

5) $y = (x^2+1)e^x$; 6) $y = \frac{e^x}{x}$.

10.13. Дослідити функції та побудувати їх графіки:

1) $y = \frac{(x-1)^2}{x+1}$; 2) $y = \frac{x-1}{x^2-4}$;

3) $y = x^3 e^{-x}$; 4) $y = x\ln x$;

5) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$; 6) $y = x + \sin x$.

10.14. Знайти диференціали:

1) $d(e^{-x} + \ln x)$; 2) $d(\arccos e^x)$;

3) $d(\sqrt{x} + 2\sqrt{x+\sqrt{x}})$; 4) $d(2\sqrt{x^3}(3\ln x - 2))$.

10.15. Замінюючи приріст функції її диференціалом, знайти наближене значення функції $y=y(x)$ у вказаних точках:

1) $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 65$;

2) $y = \sin x$, $x = 29^\circ$;

3) $y = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$, $x = 0{,}15$.

10.16. Обчисліть границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+4x-7}{2x^2+3x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{tg^2 x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{tgx - x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x - x}$.

Тема 11

Первісна. Невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ називається **первісною на** $[a,b]$ **для функції** $f(x)$, якщо для всіх $x \in [a,b]$ виконується рівність

$$F'(x) = f(x). \qquad (11.1)$$

Якщо $F'(x) = f(x)$ і $\Phi'(x) = f(x)$, то

$$F(x) = \Phi(x) + C, \; C - const \qquad (11.2)$$

Множина всіх первісних для функції $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом** від функції $f(x)$ і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (11.3)$$

Властивості невизначеного інтегралу:

$$\int \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \right] dx = \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_i \int f_i(x)dx \right] \qquad (11.4)$$

$$d\int f(x)dx = d(F(x) + C) = F'(x)dx = f(x)dx \qquad (11.5)$$

$$\int d\, f(x) = f(x) \qquad (11.6)$$

$$\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C \qquad (11.7)$$

Таблиця інтегралів.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad n \neq -1 \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \qquad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c,$$

$$\int e^x dx = e^x + c, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \qquad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c,$$

$$\int \cos x \; dx = \sin x + c, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c.$$

У наведених формулах c - стала інтегрування.

Формула інтегрування частинами має вигляд:

$$\int u(x)dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)du(x), \qquad (11.8)$$

де $u(x)$ і $v(x)$ - диференційовані функції від x.

Ця формула здебільшого застосовується для інтегрування виразів, які є добутком полінома на трансцендентну функцію.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Обчислити інтеграл: $\int \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right)dx$

Розв'язання.

Скористуємось **методом розкладу,** який базується на першій властивості (11.4) невизначеного інтегралу. Для цього перетворимо підінтегральний вираз у суму, скориставшись формулами скороченого множення:

$$\int \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right)dx = \int \left(\sqrt{x^3} + 1\right)dx = \int x^{3/2}dx + \int dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + x + c.$$

Приклад 2.

Обчислити інтеграл: $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$

Розв'язання.

Будемо використовувати **метод підведення під знак диференціалу,** який базується на третій властивості (11.7) невизначеного інтегралу. Для цього зробимо заміну змінної:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\ln^3 x}{3} + c.$$

Приклад 3.

Обчислити інтеграл: $\int x^2 e^x dx.$

Розв'язання.

Це класичний інтеграл, який інтегрується **частинами,** так як підінтегральна функція є добутком полінома другого порядку на трансцендентну функцію. Тому використовуємо формулу (11.8):

$$\int x^2 e^x dx = \left| \begin{array}{cc} u = x^2 & dv = e^x dx \\ du = 2xdx & v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2\int x e^x dx.$$

Використовуємо формулу (11.8) вдруге для обчислення інтегралу в правій частині:

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{cc} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right| = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c.$$

Таким чином:

$$\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + c.$$

Приклад 4.

Обчислити інтеграл: $\int \frac{x+3}{x^2 - 2x - 5}\, dx.$

Розв'язання.

За допомогою елементарних перетворень представимо чисельник як похідну від знаменника і розіб'ємо інтеграл на суму двох інтегралів:

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+6+2}{x^2-2x-5} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x-5} dx + 4\int \frac{dx}{x^2-2x-5} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right| + 4\int \frac{dx}{x^2-2x-5} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right| + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2-6} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right| + 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right| + \frac{2}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right| + c.$$

Приклад 5.

Обчислити інтеграл: $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}.$

Розв'язання.

Підінтегральна функція є дробово-раціональною. Розкладаємо її на прості дроби:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$$

Звідси $\quad x \equiv A(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1).$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & 0 = A + B_1 \\ x^1 & 1 = 2A + B_2 \\ x^0 & 0 = A - B_1 - B_2 \end{array}$$

Отримали систему 3 – х рівнянь з 3 невідомими. Розв'язуючи цю систему матимемо

$$A = \frac{1}{4}, \quad B_1 = -\frac{1}{4}, \quad B_2 = \frac{1}{2}.$$

Тоді $\quad \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}$

Тепер можна використати метод розкладу:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + c =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x+1)} + c.$$

Приклад 6.

Обчислити інтеграл: $\int \cos^2 3x \cdot \sin^4 3x dx.$

Розв'язання.

Підінтегральна функція є тригонометричною і представляє собою добуток парних степенів синуса і косинуса. В таких випадках підінтегральний вираз перетворюють за допомогою формул зниження порядку:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Тому

$$\int \cos^2 3x \cdot \sin^4 3x dx = \int (\cos 3x \cdot \sin 3x)^2 \cdot \sin^2 3x dx =$$

$$= \int \frac{\sin^2 6x}{4} \cdot \frac{1 - \cos 6x}{2} dx = \frac{1}{8}\int (\sin^2 6x - \sin^2 6x \cdot \cos 6x) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left[\frac{1 - \cos 12x}{2} - \sin^2 6x \cdot \cos 6x\right] dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 12x}{24} - \frac{1}{18}\sin^3 6x\right) + c.$$

Приклад 7.

Обчислити інтеграл: $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Розв'язання.

Скористаємось **універсальною тригонометричною підстановкою:**

$$tg\,\frac{x}{2} = t$$

Тоді $\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$

Отримуємо: $\quad \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2(1+t^2)}{(1+t^2)\cdot 2t}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + c.$

Приклад 8.

Обчислити інтеграл: $\quad \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}}\,dx.$

Розв'язання.

Підінтегральна функція є ірраціональною. Для того, щоб позбавитись ірраціональності зробимо заміну змінної:

$$x = t^4, \quad dx = 4t^3 dt.$$

Тоді: $\quad \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}}\,dx = 4\int \frac{t^2\cdot t^3 dt}{t^3+1} = 4\int \frac{t^5 dt}{t^3+1}.$

Підінтегральна функція тепер є раціональною. Виділяємо цілу частину, так як порядок чисельника вищий за порядок знаменника:

$$\frac{t^5}{t^3+1} = t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}$$

Тепер використовуємо метод розкладу:

$$4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt = 4\int\left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt = 4\int t^2 dt - \int \frac{t^2}{t^3+1}dt = \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right| + c = \frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}} - \ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right] + c.$$

Задачі

11.1. Довести, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на вказаному проміжку, якщо:

1) $F(x) = 3\sqrt[3]{x}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad x \in (0,\infty);$

2) $F(x) = tgx - \sqrt{3}, \quad f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$

3) $F(x) = 20 - \frac{1}{x}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \in (0,\infty);$

4) $F(x) = 3^x \cdot \ln(5x), \quad f(x) = 3^x\left(\ln 3 \cdot \ln(5x) + \frac{1}{x}\right), \quad x \in (0,\infty);$

5) $F(x) = e^{\sin x} + x + \pi, \quad f(x) = e^{\sin x}\cdot\cos x + 1, \quad x \in R.$

11.2. Знайдіть первісну $F(x)$, якщо:

1) $f(x) = 7 - 2x$;
2) $f(x) = 2x - 3x^2$;
3) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;
4) $f(x) = 2\sin x + \cos 3x$;
5) $f(x) = \sqrt{2x}$.

11.3. Знайдіть функцію $F(x)$, якщо відомо, що $F'(x) = 4x^3 - 3x^2$ і $F(1) = 3$.

11.4. Знайдіть первісну $F(x)$ для функції $y = f(x)$, графік якої проходить через точку M:

1) $f(x) = e^{-3x}, \quad M(0;-2);$
2) $f(x) = 7^{x/4}, \quad M(8;1/\ln 7);$
3) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 3x}, \quad M\left(\frac{\pi}{12};-1\right).$

11.5. Обчисліть інтеграли, використовуючи метод розкладу:

1) $\int \frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx;$ 4) $\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)dx;$ 7) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx;$

2) $\int\left(5\cos x - 3x^2 + \frac{1}{x}\right)dx;$ 5) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{4\sqrt{x}}dx;$ 8) $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}dx;$

3) $\int \frac{3e^{2x} + e^x\cos x}{e^x}dx;$ 6) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx;$ 9) $\int \frac{dx}{1+\cos 2x};$

10) $\int \frac{\cos^2 x + 2\cos x - 3}{3+\cos x}dx$; 14) $\int \frac{dx}{x^2+7}$; 18) $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$;

11) $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx$; 15) $\int \frac{dx}{x^2-10}$; 19) $\int tg^2 x dx$;

12) $\int \frac{2x^2}{1+x^2}dx$; 16) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$; 20) $\int ctg^2 x\, dx$;

13) $\int \frac{x^2+5x+6}{x+2}dx$; 17) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$; 21) $\int 3^x \cdot e^x\, dx$.

11.6. Обчисліть інтеграли, використовуючи метод підведення під знак диференціалу:

1) $\int \frac{dx}{4x+1}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$; 3) $\int \sin\frac{2x-1}{4}dx$;

4) $\int 2e^{\frac{x-1}{2}}dx$; 5) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$; 6) $\int \frac{dx}{7\cos^2(3-x)}$;

7) $\int (\cos 2x + \sin 2x)^2 dx$; 8) $\sin x \cdot \cos 7x\ dx$;

9) $\int \cos^4 x dx$; 10) $\int \frac{\ln x}{x}dx$; 11) $\int \frac{xdx}{x^2+9}$;

12) $\int y\sqrt{3y^2+1}\,dy$; 13) $\int xe^{-x^2}dx$; 14) $\int \frac{3x^2dx}{(1-5x^3)^3}$;

15) $\int \cos x \cdot \sqrt{\sin x}\,dx$; 16) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$; 17) $\int \frac{tgx+1}{\cos^2 x}dx$;

18) $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$; 19) $\int 4\sin^3 x dx$; 20) $\int \frac{e^x dx}{2-3e^x}$;

21) $\int \frac{\sqrt{\ln y}}{y}dy$; 22) $\int \frac{2\ln^2 x+3}{x}dx$; 23) $\int \frac{dt}{t\ln t}$;

24) $\int \frac{xdx}{3x+2}$; 25) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}dx}$; 26) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;

27) $\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 28) $\int \frac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}}dx$; 29) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-2}}$;

30) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{3+\sin x}}$; 31) $\int \frac{e^x\sqrt{arctg\, e^x}}{1+e^{2x}}dx$.

11.7. Обчисліть інтеграли, використовуючи метод інтегрування частинами:

1) $\int x^2 \ln x dx$; 2) $xe^x dx$; 3) $\ln x\ dx$;

4) $\int arctg\, x dx$; 5) $x arctg x dx$; 6) $\int arctg\sqrt{x}\,dx$;

7) $\int x^2 \sin x dx$; 8) $\int x\cos^2 x dx$; 9) $\int \sqrt{x}\ln x dx$;

10) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 11) $\int e^x \sin x dx$; 12) $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$;

13) $\int \sin(\ln x)dx$.

11.8. Обчисліть інтеграли $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$, $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$:

1) $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$; 3) $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$;

4) $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+11}dx$; 5) $\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}dx$; 6) $\int \frac{4x-5}{x^2+5}dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$;

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}}$; 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$; 11) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$;

12) $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$; 13) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$.

11.9. Проінтегрувати раціональні дроби:

1) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$; 2) $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$; 3) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$;

4) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$; 5) $\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$; 6) $\int \frac{x-3}{x^3-x}dx$.

11.10. Обчисліть інтеграли від тригонометричних функцій:

1) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$; 2) $\int \cos^4 x dx$;

3) $\int \sin^3 x dx$; 4) $\int \sin^4 x dx$;

5) $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$; 6) $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$;

7) $\int tg^3 x dx$; 8) $\int ctg^5 x dx$;

9) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; 10) $\int \sin x \cos 3x dx$;

11) $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$; 12) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$;

13) $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$; 14) $\int \frac{1+tgx}{\sin 2x} dx$.

11.11. Обчисліть інтеграли від ірраціональних функцій:

1) $\int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}} dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1} dx$;

3) $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}} dx$; 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$;

5) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$; 6) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx$.

Тема 12

Визначений інтеграл та його застосування

Нехай функція *y=f(x)* визначена на [*a,b*] і $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ – довільне розбиття на n частин, а $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$ і $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0 \div (n-1)$. Сума

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (12.1)$$

називається **інтегральною сумою** функції *f(x)* на [a,b]. Границю суми S_n за умови, що $n \to \infty$, а $\max \Delta x_i \to 0$, називається **визначеним інтегралом функції f(x) в границях від *x=a* до *x=b*** і позначається

$$\lim_{n\to\infty} S_n = I = \int_a^b f(x)dx \qquad (12.2)$$

Якщо функція *f(x)* неперервна на [*a,b*], то функція

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (12.3)$$

є первісною для функції *f(x),* тобто

$$F'(x) = f(x), \ a \le x \le b$$

Формула Ньютона-Лейбніца:

Якщо $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (12.4)$$

Якщо функція *y=f(x)* неперервна зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на $[\alpha,\beta]$, де $a=\varphi(\alpha)$ і $b=\varphi(\beta)$, причому функція $f[\varphi(t)]$ визначена і неперервна на $[\alpha,\beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt \qquad (12.5)$$

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервно диференційовані на [*a,b*], то

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \qquad (12.6)$$

Нехай $f(x) \le F(x)$ на $[a,b]$, тоді

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b F(x)dx \qquad (12.7)$$

Якщо $f(x) \ge 0$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0 \qquad (12.8)$$

Число
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (12.9)$$

називається **середнім значенням функції $f(x)$ на [*a,b*].**

Якщо плоска фігура є криволінійною трапецією: *y=f(x), y=0, x=a, x=b, де f(x)* – неперервна функція, то її площа обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (12.10)$$

Довжина *L* дуги гладкої кривої *y=f(x),* яка міститься між точками *x=a, x=b (a<b),* обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y^{12}}\,dx \qquad (12.11)$$

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x dx.$

Розв'язання.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) = \frac{1}{4}.$$

Приклад 2.

Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \cos x dx$.

Розв'язання.

Скористаємось формулою (12.5) і зробимо заміну змінної:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ x_1 = 0, t_1 = 0, \\ x_2 = \frac{\pi}{6}, t_2 = \frac{1}{2}, \end{array} \right| = \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}.$$

Приклад 3.

Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin x dx$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція є добутком полінома першого степеня на трансцендентну функцію. Тому скористаємось методом інтегрування в частинах і формулою (12.6):

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \int \cos x dx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{\pi}{6} \bullet \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6-\sqrt{3}\pi}{12}.$$

Приклад 4.

Обчислити інтеграл $\int_0^2 |x^2 - 1| dx$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція $y = |x^2 - 1|$ додатня на [1,2] і від'ємна на [0,1]. Тому

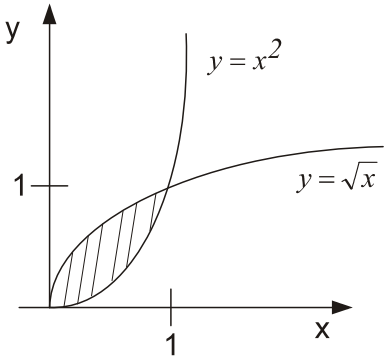
$$\int_0^2 |x^2-1|dx = -\int_0^1 |x^2-1|dx + \int_1^2 |x^2-1|dx = -\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 dx + \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 dx =$$

$$-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - x\Big|_1^2 = \frac{4}{3}.$$

Приклад 5.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$.

Розв'язання.



Знайдемо точки перетину ліній, що обмежують фігуру:

$\sqrt{x}=x^2 \to x=x^4 \to x_1=0,\ x_2=1.$

Отже, враховуючи (12.10), маємо:

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{x}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ \text{(кв.од.)}.$$

Приклад 6.

Обчислити довжину дуги півкубічної параболи $y=\sqrt{x^3}$ від початку координат до точки $M(4;8)$.

Розв'язання.

Знайдемо y' і підставимо у формулу (12.11):

$$L=\int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\left|\begin{array}{c}1+\frac{9}{4}x=t\\ \frac{9}{4}dx=dt\\ x_1=0,\ t_1=1\\ x_2=4,\ t_2=10\end{array}\right|=\frac{4}{9}\int_1^{10}t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{4\cdot 2t^{\frac{3}{2}}}{9\cdot 3}\Bigg|_1^{10}=$$

$$=\frac{8}{27}(10^{\frac{3}{2}}-1)=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

Задачі

12.1. Обчисліть визначений інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца:

1) $\int_0^{1,5}\frac{x^2+2x+1}{x+1}dx;$ 2) $\int_1^4\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{2x}}{x}dx;$

3) $\int_0^{-1}\frac{t^4-1}{1+t^2}dt;$ 4) $\int_{-1}^0\frac{\sqrt{4+4x+x^2}}{x+2}dx;$

5) $\int_{-4}^{-3}\frac{\sqrt{4+4x+x^2}}{x+2}dx;$ 6) $\int_0^{2\pi}(\sin 3\varphi+5\cos\frac{\varphi}{2})d\varphi;$

7) $\int_{-1}^1\frac{2^x-3^x}{6^x}dx;$ 8) $\int_{2\sqrt{2}}^4 x\sqrt{x^2-7}dx;$

9) $\int_{-1}^1\frac{x^2dx}{3+2x^3};$ 10) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^2 xdx;$

11) $\int_2^8\frac{dx}{x\ln x};$ 12) $\int_0^1\frac{e^xdx}{e^x+5};$

13) $\int_0^1 xe^{-x}dx;$ 14) $\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin xdx;$

15) $\int_1^2 x\ln xdx;$ 16) $\int_0^{\pi}e^x\sin xdx.$

12.2. Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int_{-1}^2 f(x)dx,\ \textit{якщо}\ f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0\\ x^2, & x>0\end{cases};$

2) $\int_{-1}^1|x|dx;$ 3) $\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}}d\varphi;$

4) $\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}}d\varphi;$ 5) $\int_0^{2\pi}|\sin 2x|dx.$

12.3. Не обчислюючи інтеграл, визначте його знак:

1) $\int_0^{\pi} x\sin x dx$; 2) $\int_1^{2} \lg x dx$;

3) $\int_1^{1,1} (x^2 - 3x + 2)dx$; 4) $\int_{10}^{11} (x^2 - 3x + 2)dx$;

5) $\int_1^{2} \log_{0,1} x dx$; 6) $\int_0^{1} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})dx$.

12.4. Не обчислюючи інтегралів, визначте, який з них більший:

1) $\int_0^{0,9} x^{10}dx$ *або* $\int_0^{0,9} x^{11}dx$;

2) $\int_1^{90} x^{10}dx$ *або* $\int_1^{90} x^{11}dx$;

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ *або* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$;

4) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx$ *або* $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx$.

12.5. Доведіть, що:

1) $\frac{\pi}{128} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx < \frac{\pi}{4}$;

2) $\frac{e}{3} < \int_1^{e} \frac{dx}{\ln x + 2} < \frac{e}{2}$;

3) $\frac{3}{2} < \int_{0,5}^{2} \frac{4^x}{x} dx < 48$.

12.6. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = 4x - 5$; $x = -3$; $x = 2$; $y = 0$;

2) $y = 2x^2$; $y = 0$; $x = 2$; $x = 4$;

3) $y = x^2 + 4x$; $y = x + 4$;

4) $y = 0,5x^2 - 3x + 2$; $y = x - 4$;

5) $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 9$;

6) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 4$;

7) $y = \frac{1}{x}$; $x = 1$; $x = e$; $y = 0$;

8) $y = \sin 3x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{3}$;

9) $y = \ln x$; $x = 0$; $y = 1$; $y = -1$;

10) $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 3$;

11) $y = e^x$; $y = x + 1$; $x = 2$;

12) $y = tgx$; $y = 0$; $x = \frac{\pi}{3}$.

12.7. Визначити довжину дуги лінії:

1) $y^2 = x^2$, яку відтинає пряма $x = 1$;

2) $y^2 = \ln\cos x$, яку відтинають прямі $x = 0$ і $x = \frac{\pi}{6}$;

3) $y^2 = (x + 1)$, яку відтинає пряма $x = 4$;

4) $y^2 = \frac{4}{9(2-x)^3}$, яку відтинає пряма $x = -1$;

5) $y^2 = x^2 - 1$, яку відтинає вісь Ox;

6) $y = \ln\sin x$, від $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$;

7) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$ від $x = 1$ до $x = e$.

Тема 13

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

I. Нехай D - множина упорядкованих чисел $(x;y)$. Якщо кожній парі $(x;y)\in D$ за певним законом відповідає число z, то кажуть, що на множині D **визначено функцію від двох змінних** x і y, і записують $z=f(x,y)$.

Множину пар $(x;y)$, для яких функция $z=f(x,y)$ визначена, називають **областю визначення функції** і позначають $D(f)$ або D.

Множину значень z позначають $E(f)$ або *E*. Аналогічно означаться поняття функції трьох і більшого числа змінних.

Функцію двох змінних можна зобразити графічно у вигляді деякої поверхні.

Графіком функції $z=f(x,y)$ в прямокутній системі $Oxyz$ називається ГМТ $M(x;y;f(x;y))$, проекції яких $(x;y)$ належать області D. Це ГМТ утворює в тривимірному просторі певну поверхню (рис. 13.1), проекцією якої на площину Oxy є множина D.

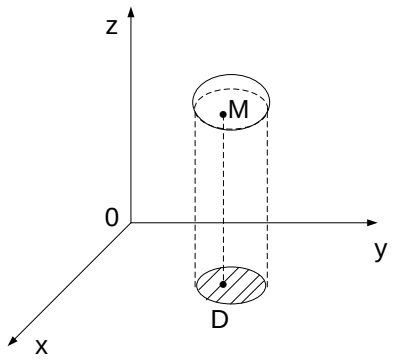


Рис. 13.1

Лінією рівня функції $z=f(x,y)$ називається лінія $f(x,y)=C$, в точках якої функція зберігає стале значення $z=C, C\in E(f)$.

Поверхнею рівня функції $u=f(x;y;z)$ називається поверхня $f(x;y;z)=C$, в точках якої функція зберігає стале значення $u=C, C\in E(f)$.

Надалі розглядатимемо лише функції двох змінних.

Побудова графіків функцій двох змінних виконується методом перерізів, який полягає в тому, що поверхню $z=f(x,y)$ перетинають площинами $x=x_o$ та $y=y_o$ і за графіками кривих $z=f(x_0,y)$ та $z=f(y_o,x)$ визначають графік функції $z=f(x,y)$.

Функція $z=f(x,y)$ називається **однорідною** функцією k-го порядку, якщо виконується тотожність

$$f(\lambda_x,\lambda_y)=\lambda^k f(x,y) \tag{13.1}$$

для довільного $\lambda\neq 0$.

II. Нехай $\rho(M,M_o)=\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}$ - відстань між точками $M(x;y)$ та $M_0(x_o;y_o)$, де $M_o\in D$ або $M_o\overline{\in} D$, проте в довільному околі точки M_o міститься хоча б одна точка множини D, відмінна від M_o.

Число *A* називається **границею функції** $z=f(M)$ у точці M_o, якщо для кожного числа $\varepsilon>0$ знайдеться число $\delta>0$ таке, що для всіх точок $M(x;y)\in D$, які задовольняють умову $0<\rho(M,M_o)<\delta$, виконується нерівність $|f(M)-A|<\varepsilon$. При цьому записують:

$$\lim_{M\to M_o} f(M)=A \text{ або } \lim_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \tag{13.2}$$

Функція $z=f(M)$ називається **неперервною в точці** M_o, якщо

$$\lim_{M\to M_o} f(M)=f(M_o) \tag{13.3}$$

Функція $f(x,y)$ називається **неперервною на множині** D, якщо вона неперервна в кожній точці $(x;y)$ цієї множини. Точки, в яких неперервність функцій порушується, називаються **точками розриву функції**. Точки розриву можуть бути ізольовані, утворювати лінії розриву, поверхні розриву і т.д.

III. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)+f(x,y)}{\Delta x} \tag{13.4}$$

то вона називається **частинною похідною функції** $z=f(x,y)$ **в точці** $M(x;y)$ **по змінній** x і позначається одним із таких символів:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z'_x, f'_x \tag{13.5}$$

Зазначена вище границя обчислюється при умові, що змінна y вважається сталою.

Аналогічно означається частинна похідна по змінній y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=f'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} \tag{13.6}$$

Функція $f(x,y)$ називається **диференційованою в точці *M*,** якщо її повний приріст $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ можна подати так:

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y\ , \tag{13.7}$$

де A і B – дійсні числа, що не залежать від Δx та Δy, α і β - нескінченно малі при $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$ функції.

Повним диференціалом dz функції $z=f(M)$ називається головна лінійна частина приросту функції, яка обчислюється за формулою:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\ , \tag{13.8}$$

де $dx=\Delta x, dy=\Delta y.$

Для наближеного обчислення значення функції користуються рівністю:

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y \tag{13.9}$$

Частинними похідними другого порядку функції $z=f(x,y)$ називаються її частинні похідні від частинних похідних першого порядку:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{xx};\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}=f''_{yx};\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{yy}. \tag{13.10}$$

Частинні похідні, які відмінні одна від одної лише порядком диференціювання, називаються **мішаними похідними**; вони є рівними між собою при умові, що вони неперервні в деякому околі точки *M*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} \tag{13.11}$$

Диференціал другого порядку d^2z функції $z=f(x,y)$ означається за формулою:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \tag{13.12}$$

Нехай $z=f(x,y)$ - функція двох змінних x і y, які також залежать від змінних u та v: $x=x(u,v),\ \ y=y(u,v)$, тоді функція $z=f(x(u,v),y(u,v))$ є **складеною функцією** незалежних змінних u та v. Якщо всі зазначені функції диференційовані, то:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \tag{13.13}$$

Зокрема, якщо $x=x(t), y=(t)$, то

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{13.14}$$

IV. Нехай поверхню задано рівнянням $F(x,y,z)=0$ і точка $M_o(x_o;y_o;z_o)\in F$. Рівняння дотичної площини до поверхні в точці M_0:

$$F'_x(M_o)(x-x_o)+F'_y(M_o)(y-y_o)+F'_z(M_o)(z-z_o)=0 \tag{13.15}$$

а рівняння нормалі:

$$\frac{x-x_o}{F'_x(M_o)}=\frac{y-y_o}{F'_y(M_o)}=\frac{z-z_o}{F'_z(M_o)} \tag{13.16}$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z=f(x,y)$, то рівняння (13.15) і (13.16) набувають відповідно вигляду:

$$z-z_o=f'_x(x_o,y_o)(x-x_o)+f'_y(x_o,y_o)(y-y_o) \tag{13.17}$$

та

$$\frac{x-x_o}{f'_x(x_o,y_o)}=\frac{y-y_o}{f'_y(x_o,y_o)}=\frac{z-z_o}{-1} \tag{13.18}$$

V. Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена в області D, а точка $M_o(x_o,y_o)\in D$. Якщо існує окіл точки M_0, який належить області D і для всіх відмінних від M_0 точок M цього околу виконується нерівність $f(M)<f(M_o)(f(M)>f(M_o))$, то точку M_0 називають **точкою локального максимуму (мінімуму)** функції $f(x,y)$, а число $f(M_o)$ - **локальним максимумом (мінімумом)** цієї функції. Точки максимуму та мінімуму функції називають **точками екстремуму**.

Необхідні умови існування екстремуму функції $z = f(x, y)$: функція $f(x, y)$ може мати екстремум лише у точках, в яких $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (стаціонарні точки) та у точках, де похідні не існують.

Для з'ясування **достатніх** умов існування екстремуму функції $f(x, y)$, позначимо:

$$f''_{xx}(x_0; y_0) = A; \quad f''_{xy}(x_0; y_0) = B; \quad f''_{yy}(x_0; y_0) = C; \quad \Delta = AC - B^2 \qquad (13.19)$$

Тоді:

якщо $\Delta > 0$, то у точці $(x_0; y_0)$ існує екстремум, причому максимум при $A < 0$ і мінімум при $A > 0$;

якщо $\Delta < 0$, то точка $(x_0; y_0)$ не є точкою екстремуму;

якщо $\Delta = 0$, то екстремум може бути, а може і не бути (потрібні додаткові дослідження).

Приклади розв'язання типових задач:

Приклад 1.

Знайти область визначення D та множину E значень функції $z = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x}}$.

Розв'язання.

$y^2 - x > 0$, межа області (парабола $y^2 = x$) не належить їй, тобто це відкрита область $x < y^2$; множина значень $E = (0; +\infty)$.

Приклад 2.

Знайти границю $A = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.

Розв'язання.

$$A = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{x^2 + y^2 + 1 - 1} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1) = 2.$$

Відповідь: *A=2*.

Приклад 3.

Дослідити на неперервність функцію $z = \frac{x^2 + 2y - 1}{x^2 + y^2}$.

Розв'язання.

Функція не визначена в точці, де знаменник перетворюється на нуль. Тому вона має розрив в точці $0(0;0)$.

Відповідь: функція розривна в точці $(0;0)$.

Приклад 4.

Знайти частинні похідні функції $z = arctg\frac{y}{x}$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot (-\frac{y}{x^2}) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Приклад 5.

Знайти частинні похідні функції $z = \sin(uv)$, де $u = 2x + 3y, v = xy$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v\cos(uv) \cdot 2 + u\cos(uv)y = \cos(2x^2y + 3xy^2) \cdot (4xy + 3y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = v\cos(uv) \cdot 3 + u\cos(uv)x = \cos(2x^2y + 3xy^2) \cdot (6xy + 2x^2).$$

Приклад 6.

Знайти похідні другого порядку від функції $z = x^3 - x^2y + y^2$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2xy, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 + 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2x.$$

Відповідь: $6x - 2y; 2; -2x$.

Приклад 7.

Знайти повний диференціал функції $z = x^3 y^2$.

Розв'язання.

Частинні похідні $z'_x = 3x^2 y^2$ і $z'_y = 2x^3 y$ є неперервними функціями на всій площині Oxy.

Тому $dz = 3x^2 y^2 dx + 2x^2 y dy.$

Приклад 8.

Знайти $d^2 z$ функції $z = \sin x \cdot \sin y.$

Розв'язання.

$z'_x = \cos x \cdot \sin y,\ \ z'_y = \sin x \cdot \cos y,\ \ z''_{xx} = -\sin x \cdot \sin y,\ \ z''_{xy} = \cos x \cdot \cos y,$

$z''_{yy} = -\sin x \cdot \sin y,\ \ d^2 z = -\sin x \sin y dx^2 + 2\cos x \cos y dx dy - \sin x \sin y dy^2.$

Приклад 9.

Знайти рівняння нормалі та дотичної площини до параболоїда $z = x^2 + y^2$ в точці $M_o(1;-2;5)$.

Розв'язання.

За формулами (13.17) і (13.18) маємо:

$f(x,y) = x^2 + y^2,\ \ f'_x(x,y) = 2x,\ \ f'_y(x,y) = 2y,\ \ f'_x(1,-2) = 2,\ \ f'_y(1,-2) = -4,$

звідси,

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}$ - рівняння нормалі,

$2x - 4y - z - 5 = 0$ - рівняння дотичної площини.

Приклад 10.

Знайти розміри відкритого прямокутного басейну об'єму V, за яких на його облицювання піде найменша кількість матеріалу.

Розв'язання.

Нехай x, y, z відповідно довжина, ширина і висота басейну, тоді $V = xyz$, звідки $z = \frac{V}{xy}$.

Кількість матеріалу, необхідного для облицювання басейну:

$S = xy + 2yz + 2xz,$ або

$S = S(x,y) = xy + 2V(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}).$

Треба знайти мінімум функції $S(x,y)$, якщо $x > 0$, $y > 0$.

Маємо $S'_x(x,y) = y - \frac{2V}{x^2},\quad S'_y(x,y) = x - \frac{2V}{y^2},$

$$\begin{cases} y - \frac{2V}{x^2} = 0 \\ x - \frac{2V}{y^2} = 0; \end{cases} \qquad x = y = \sqrt[3]{2V}.$$

Отже, функція має одну стаціонарну (критичну) точку $M\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$, яка є точкою мінімума. Тоді $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. Таким чином, басейн повинен мати висоту $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$ і квадратну основу із стороною $\sqrt[3]{2V}$.

Відповідь: розміри басейну $\sqrt[3]{2V}$; $\sqrt[3]{2V}$; $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.

Приклад 11.

Знайти екстремум функції $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Розв'язання.

Знаходимо частинні похідні

$z'_x = 2x + y - 3,\quad z'_y = x + 2y - 6.$

Стаціонарні точки функції визначимо із системи: $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + 2y - 6 = 0, \end{cases}$ звідки $x = 0; y = 3; M(0,3).$

Знайдемо $z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}$:

$z''_{xx} = 2;\quad z''_{yy} = 2;\quad z''_{xy} = 1$ і знайдемо за формулою (13.19) $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0; A > 0.$

Отже, в точці $M(0,3)$ задана функція має мінімум, причому $z_{\min} = -9.$

Відповідь: $z_{\min} = -9$ в точці $M(0,3)$.

Задачі

13.1. Для функції $z = \frac{x+3y}{x-3y}$ знайти:

а) $f(1,0)$; б) $f(0,1)$; в) $f(3,-1)$; г) $f(1,-3)$; д) $f(-x,-y)$; е) $f(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$.

13.2. Знайти та зобразити області визначення функцій двох змінних:

а) $z = x + \sin y$; б) $z = \frac{1}{x-y}$; в) $z = \sqrt{x-y}$; г) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$;

д) $z = \ln x - \ln y$;

е) $z = \arccos\frac{x}{x+y}$.

13.3. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{tg(x^2+y^2)}{\sin(x^2+y^2)}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$;

д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$; е) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^4+y^4}}}{x^4+y^4}$.

13.4. Знайти точки розриву функцій:

а) $z = \frac{x^2+y^2}{y-2x}$; б) $z = \frac{x+1}{y^2-4x}$; в) $z = \frac{1}{1-e^{xy}}$; г) $z = \frac{1}{\ln(x^2+y^2)}$.

13.5. Знайти частинні похідні першого порядку:

а) $z = x^3 + y^3 - 3xy$; б) $z = \frac{x-y}{x+y}$; в) $z = \ln\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$; г) $z = arctg\frac{xy-1}{x+y}$;

д) $z = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}$; е) $z = \ln\cos arctg\frac{x}{y}$.

13.6. Знайти повні диференціали першого порядку функцій:

а) $z = \ln(x^2+y^2)$; б) $z = e^x(\cos y + x\sin y)$.

13.7. Знайти повні диференціали другого порядку таких функцій:

а) $z = \frac{y^2}{x^2}$; б) $z = y\ln x$; в) $z = e^{xy}$.

13.8. Скласти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до заданих поверхонь у вказаних точках:

а) $z = 3 + x^2 - y^2$ у точці $M(1;2;0)$;

б) $z = xy$ у точці $M(1;1;1)$;

в) $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ у точці $M(1;1;1)$;

г) $z = arctg\frac{y}{x}$ у точці $M(1;1;\frac{\pi}{4})$.

13.9. Дослідити на екстремум функції:

а) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$; б) $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$; в) $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$;

г) $z = x^3 + y^3 - 3axy$.

13.10. Намет має форму циліндра, завершеного прямою конічною верхівкою. При заданому об'ємі намету визначити його розміри так, щоб для його виготовлення було витрачено найменше матеріалу.

Відповіді, вказівки

Тема1:

1.12. а) $\{1,2,3,6\}$; б) $\{2\}$; в) $\{а,б,л,о,п,р\}$; г) $\{1,3,4,5,6\}$; д) $\{1,3,5,7\}$.

1.13. а) $\{x | x = 2к, x \in N, к = 1 \div 5, к \in N\}$.

1.14. а) справжнє; б) хибне; в) хибне; г) справжнє.

1.15. а) скінчена; б) нескінчена; в) скінчена; г) скінчена; д) нескінчена; є) нескінчена; ж) нескінчена.

1.16. а) да; б) да; в) ні; г) да; д) ні; є) ні; ж) да.

1.17. Встановимо бієктивну відповідність між цілими і натуральними числами за такою схемою:

0	-1	1	-2	2	...
1	2	3	4	5	...

Тобто додатньому цілому числу $n \geq 0$ поставимо у відповідність непарне число $2n+1$, а від'ємному цілому числу $n < 0$ – парне число $2|n|$. Таким чином утворені пари вичерпають всі елементи обох множин.

1.23. Ні. Корисно звернути увагу на те, що хоча $\varnothing \subset A$, все таки $\varnothing \notin A$.

1.24. $\{\varnothing\}$.

1.25. а) $A \subset B$; б) ні; в) ні; г) $B \subset A$.

1.26. а) справжнє; б) хибне; в) хибне; г) хибне; д) хибне; є) справжнє; ж) справжнє; з) справжнє; і) хибне.

1.27. $A \subset B$, $A = C$, $C \subset B$.

1.28. $A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$; $B = \{1,4,9,16\}$;
$C = \{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$; $D = \{1,2,3,5,7,11,13,17,19\}$.

1.29. 2^n.

1.31. а) $S \subset S$; б) $x \in P$; в) $Y \not\subset X$; г) $S \subset T$; д) $z \notin Z$.

1.34. а) $\{1,2,4,6,8,9,10,12,14,16,18,20\}$; б) $\{4,16\}$; в) $\varnothing$; г) $\varnothing$; д) $\{2\}$;
е) $\{3,5,7,11,13,15,17,19\}$; ж) $\{1,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,16,17,18,19,20\}$.

1.37. Це твердження є справжнім тільки у випадку $A = B$.

1.38. $A - \overline{A} = A$.

1.39. $A - B = \varnothing$.

1.41. $A \cap B = \{2\}$; $A \cup B = \{0,1,2\}$; $A - B = \{1\}$; $B - A = \{0\}$.

1.42. $A \cap B = \{0,1\}$; $A \cup B = \{-2,-1,0,1\}$; $A - B = \{-1\}$; $B - A = \{-2\}$; $A + B = \{-2;-1\}$.

1.43. $A \cap B = \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots\}$; $A \cup B = \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots\}$;
$A - B = \{\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots\}$; $B - A = \varnothing$;
$A + B = \{\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots\}$.

1.46. 1) $\{a,b,d\}$; 2) $\{c,g\}$; 3) $\{e,f,g\}$; 7) $\{a,b,d,e,f\}$; 8) U;
9) $\{a,e,f,g\}$; 12) $\{a,b,c,d,f\}$; 17) $\{a,b,c,d,f,g\}$;
22) $\{a,e,f,g\}$; 23) $\{b,c,d,e,f,g\}$; 24) $\{a,b,d,e,f\}$.

1.53. а) не розбиття; б) розбиття; в) розбиття; г) розбиття; д) не розбиття.

Тема 2

2.1. $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

2.2. 210.

2.3. 5355.

2.4. Якщо жодна пряма не проведена, то число частин дорівнює 1. Очевидно, для того, щоб число частин було максимальним, необхідно, щоб ніякі три прямі не перетинались в одній точці і ніякі дві прямі не були паралельні. Будемо проводити послідовно прямі, дотримуючись вказаних умов. Зауважимо, що після проведення кожної прямої число частин збільшується на 1 плюс число точок перетину, які з'являються. Тому після проведення n прямих число частин збільшиться на n плюс число точок перетину прямих, яке дорівнює $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Таким чином, число частин дорівнює $1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2.5. 120.

2.6. 840.

2.7. 120.

2.8. 153.

2.9. а) 300; б) 1080; в) 81.

2.10. а) 870; б) 435.

2.11. а) 60; б) 10.

2.12. 576.

2.13. 4999680.
2.15. 5040.
2.16. 330.
2.17. 945.

2.18. Позначимо число розбиттів $2n$ елементів на пари через R_{2n}. Оберемо будь-який елемент. За участю цього елемента пару можна утворити $(2n-1)$ способом. Кожного разу після утворювання однієї пари буде залишатися $(2n-2)$ елементів, які можна розбити на пари R_{2n-2} способами. Тому $R_{2n}=(2n-1)R_{2n-2}$. Використовуючи цю рекурентну формулу, отримуємо

$$R_{2n}=(2n-1)R_{2n-2}=(2n-1)(2n-3)R_{2n-4}=\ldots=(2n-1)(2n-3)\ldots3\cdot R_2=$$
$$=(2n-1)(2n-3)\ldots3\cdot1=(2n-1)!!$$

2.19. Позначимо 5 кольорів літерами a,b,c,d,f. Тоді будь-який прапор ідентифікується кортежем з трьох різних літр. Тому число прапорів дорівнює числу розміщень без повторень з 5 по 3, тобто $A_5^3=5\cdot4\cdot3=60$

2.20. В цьому випадку різні прапори відрізняються один від одного лише порядком кольорів. Їх кількість дорівнює числу перестановок з 4 елементів, тобто $P_4=4!=24$

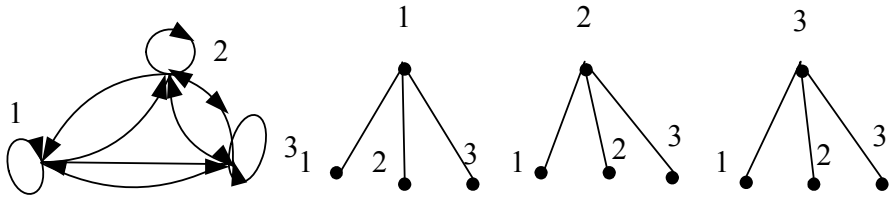
2.21. Кожному мешканцю держави відповідає підмножина множини X. Ця підмножина складається з 32 елементів. Різні набори елементів ідентифікують різних людей. Загальна кількість підмножин 32-множини дорівнює 2^{32}. Значить, в державі не може бути більше, ніж 2^{32} мешканців.

2.22. 8
2.23. 648
2.24. $32\cdot10^4+32^2\cdot10^4+32^3\cdot10^4=33820\cdot10^4$
2.25. $\sum_{r=3}^{10}C_{10}^r$
2.26. $\frac{7!}{3!\,2!}=420$
2.27. 30
2.29. 20
2.30. 294
2.31. $11\cdot10>12\cdot9$

2.32. а) 63 б) 756
2.33. 12500
2.34. 420
2.35. C_{16}^{10}
2.36. За о.п.к. $3\cdot3\cdot3=27$
2.37. $(n!)^2$
2.38. 5040
2.39. $C_{52}^{10}-\left[C_{48}^{10}+C_{48}^{9}\cdot C_4^1\right]$
2.40. 4080
2.41. а) $C_4^1\cdot C_{48}^9$ б) $C_{48}^8\cdot C_4^2$
2.42. 10
2.43. За о.п.к. 1280
2.44. 125
2.45. 303600
2.46. 26820600
2.47. За о.п.к. 768
2.48. 30

Тема 3

3.

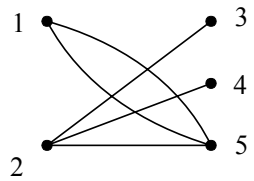


а) *б)*

Потужність множини дорівнює 9.
3.8. $\mu=6$.
3.9. $n-1$.
3.10 а) $\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$; ж) $\frac{r(r-1)}{2}$.

3.11. 3.

3.19.

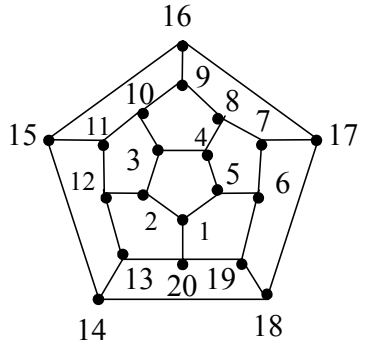


$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&2\\0&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\2&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

Висячих вершин 2. Так як $\mu=1$, то достатньо віддалити міст $2-3$, або $2-4$ і граф стане незв'язним. Для отримання каркасу треба віддалити одне ребро, що зв'язує вершини 1 і 5.

3.22. а) 2); 3); 4); б) 1).

3.25.



Тема 4

4.2. а) $\begin{pmatrix}-1&1&3\\5&-1&2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-2&4&4\\4&2&2\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}3&1&0\\3&2&2\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}2&6\\0&0\\1&3\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}4&-1&1&4\\3&0&0&6\end{pmatrix}$.

4.3. а) 9; б) 1; в) $-4xy$; г) 0; д) 60; е) -2х; ж) $-4a^3$; з) $n\cdot n!$; к) $\sin(\beta-\alpha)$; л) 0.

4.4. а) 2 і 3; б) $x\in R$; в) -2 і 0; г) 3; д) -1; е) $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in z$.

4.5. а) $\left(-\infty;1\frac{3}{5}\right)\cup(8;\infty)$; б) $x<\log_2 3$; в) $\left(\frac{1}{3};\frac{3}{4}\right)$.

4.6. $A_{14}=5$; $A_{32}=-2$.

4.7. а) 38; б) 22.

4.8. а) $(0;2)$; б) (-7;5); в) (1,5;-0,5); г) (-1;0;1); д) (2;-1;-3); ж) $x_1=1; x_2=2; x_3=-1; x_4=0$.

тема 5

5.2. $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$; $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$.

5.3. $\overrightarrow{AB}=(-4;2;-1)$; $\overrightarrow{BA}=(4;-2;1)$

5.4. $|\vec{a}|=4$

5.5. $Z=\pm 3$

5.6. $N(4;1;1)$

5.7. $(\frac{12}{25};-\frac{3}{5};-\frac{16}{25})$

5.8. 60^0

5.9. $M_1\left(\sqrt{3};\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ або $M_2(-\sqrt{3};-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

5.10 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{129}$; $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=7$

5.11. а) $np_{OX}(\vec{a}+\vec{b})=1$; $np_{OY}(\vec{a}+\vec{b})=-1$; $np_{OZ}(\vec{a}+\vec{b})=6$

б) $np_{OX}(-\frac{1}{2}\vec{b})=1$; $np_{OY}(-\frac{1}{2}\vec{b})=-\frac{1}{2}$; $np_{OZ}(-\frac{1}{2}\vec{b})=0$

в) $np_{OX}(2\vec{a}+3\vec{b})=0$; $np_{OY}(2\vec{a}+3\vec{b})=-1$; $np_{OZ}(2\vec{a}+3\vec{b})=12$

5.12. $\vec{d}=-48\vec{i}+45\vec{j}-36\vec{k}$

5.13. $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$

5.14. $\vec{c}=2\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$

5.15. а). -6 б). 13 в). -61

5.16. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

5.17. $Cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$

5.18. $\vec{b} = (-24;32;30)$

5.19. $np_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = -4$

5.20. $|\vec{a}\times\vec{b}| = 16$

5.21. $S_{\Delta ABC} = 14$

5.22. 24

5.23. Вказівка: показати, що мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$

5.24. $V = \frac{5}{6}$ Вказівка: $V_{OABC} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC}\right|$

5.25. H=11. Вказівка: довжина висоти, проведеної з вершини D – це відстань від точки D до площини (ABC).

Тема 6

6.2. $A\left(2;-\frac{5}{3}\right)$; $B\left(-\frac{7}{5};\frac{43}{15}\right)$; $C(2;4)$

6.3. 1). $k = -\frac{5}{3}$; 2). $k = \frac{3}{5}$

6.4. 1). $2x+3y-7=0$; 2). $3x-2y-4=0$

6.5. $P_1(-2;-1)$

6.6. $4x-5y-2=0$

6.7. 1). $\varphi = 45^0$; 2). $\varphi = 45^0$

6.8. $\frac{x}{6}+\frac{y}{-4}=1$

6.10. а). паралельна осі Oz; б). паралельна площині Oxz; в). проходить через початок координат.

6.11. $x-y-3z+2=0$

6.12. $(x-x_1)+4(y-y_1)+7(z-z_1)=0$

6.13. Вказівка: розглянути мішаний добуток трьох компланарних векторів.

6.14. а). так; б). ні.

6.15. а). так; б). ні.

6.16. а). $x^2+y^2=9$; б). $(x-2)^2+(y+3)^2=49$.

6.17. а). $C(5;-2), r=5$; б). $C(-2;0), r=8$; в). $C(1;-2), r=5$;

6.18. а). $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$; б). $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{84}=1$; в). $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

6.19. а). $a=1$, $b=2$; б). $a=5$, $b=1$; в). $a=\frac{5}{2}$; $b=\frac{5}{3}$; г). $a=\frac{1}{3}$; $b=\frac{1}{5}$;

д). $a=1$, $b=\frac{1}{2}$; ж). $a=\frac{1}{3}$; $b=1$.

6.20. а). $a=5$, $b=3$; б). $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$; в). $\varepsilon=\frac{4}{5}$; г). $x=\pm\frac{25}{4}$.

6.21. а). $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; б). $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; в). $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; г). $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

6.22. а). $2a=6$, $2b=4$; б). $2a=8$, $2b=2$; в). $2a=8$, $2b=4$; г). $2a=2b=2$;

д). $2a=\frac{2}{5}$; $2b=\frac{1}{2}$; ж). $2a=5$; $2b=\frac{10}{3}$.

6.23. Вказівка: виділити повні квадрати відносно x та y в рівняннях і звести рівняння до канонічного вигляду.

6.24. а). $y^2=6x$; б). $y^2=-x$; в). $x^2=\frac{y}{2}$; г). $x^2=-6y$.

6.26. 1). півколо верхньої півплощини з центром $O(0;0)$ та $R=3$;

2). півколо нижньої півплощини з центром $O(0;0)$ та $R=5$;

3). півколо з центром $C(-2;0)$ та $R=3$, розміщене ліворуч відносно прямої $x+2=0$;

4). півколо з центром $C(-2;-3)$ та $R=5$, розміщене під прямою $y+3=0$;

5). половина еліпса $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+7)^2}{4}=1$, розміщена над прямою $y+7=0$;

6). половина еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$, розміщена в лівій півплощині;

7). половина еліпса $\frac{(x+5)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}$, розміщена праворуч від прямої $x+5=0$;

8). половина еліпса $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$, розміщена під прямою $y-1=0$;

9). частина гіперболи $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$, розміщеної над прямою $y+1=0$;

10). гілка гіперболи $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-7)^2}{9}=-1$, розміщеної під прямою $y-7=0$;

11). гілка гіперболи $\frac{(x-9)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$, розміщеної ліворуч від прямої $x-9=0$;

12). частина гіперболи $\frac{(x-5)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{16}=-1$, розміщеної ліворуч від прямої $x-5=0$;

13). частина параболи $y^2=-18x$, розміщена у III чверті;

14). частина параболи $x^2=5y$, розміщена у I чверті;

15). частина параболи $y^2=-x$, розміщена у II чверті;

16). частина параболи $x^2=16y$, розміщена у IV чверті;

6.27. а). $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=36$;

б). $x^2+y^2+z^2=49$;

в). $(x-1)^2+(y-4)^2+(z+7)^2=121$.

6.28. Вказівка:

а). центр $C(3;-4;-1)$ та $R=4$;

б). центр $C(-1;2;0)$ та $R=3$;

в). сфера не існує.

6.29. Вказівка:

а). круговий циліндр з віссю, що паралельна осі $0y$;

б). гіперболічний циліндр з віссю, що паралельна осі $0y$;

в). гіперболічний циліндр з віссю, що паралельна осі $0x$, і напрямною $\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{16}=1,\quad x=0$;

г). параболічний циліндр з віссю, що паралельна осі $0y$, і напрямною $(z+2)^2=2(x-1),\quad y=0$;

д). параболічний циліндр з віссю, що паралельна осі $0x$, і напрямною $y^2=-6z,\quad x=0$;

ж). круговий циліндр з віссю, що паралельна осі $0z$, і напрямною $x^2+(y-2)^2=4,\quad z=0$.

6.30. а). $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$; б). $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{16}=1$;

в). $x^2+y^2-9z^2=0$; г). $x^2+y^2-z^2=1$ і $x^2-y^2+z^2=-1$.

6.31. а)., б)., в)., г). еліптичний параболоїд;

д). двопорожнинний гіперболоїд;

ж). однопорожнинний гіперболоїд.

6.32. а). однопорожнинний гіперболоїд;

б). еліпсоїд;

в). однопорожнинний гіперболоїд;

г). еліптичний параболоїд.

Тема 7:

7..1. $f(o)=1; f(3)=10; f(-3)=28;$

7.2. $f(-5)=-3; f(-2)=0; f(0)=4; f(3)=1;$

7.3. $f(-1)=2; f(2)=5; f(0)=1; f(3)=10; f(x)=x^2+1;$

7.5. 1). ні; 2). так.

7.6. 1). $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$; 2). -1; 3). 2; 4). $-\frac{3}{4}$; 5). -8; 6). 1; 7). 0; 1; 2; 8). $\frac{\pi}{2}n, n\in z.$

7.7. а). $f(-1)=-1; f(0)=-\frac{1}{2}; f(1)=0$; б). $f(0)=-1; f(1)=-\frac{1}{4}$;

в). $f(-1)=0{,}4; f(0)=0{,}3; f(1)=0$; г). $f(0)=0; f(1)=1$;

д). $f(-1)=-1; f(0)=0; f(1)=1$; ж). $f(-1)=-2; f(0)=-1; f(1)=1$.

7.8. а). $D:(-\infty;-2)\cup(-2;7)\cup(7;\infty)$; б). $D:(-\infty;-4)\cup(-4;4)\cup(4;\infty)$;

в). $D:(-\infty;0]$; г). $D:\varnothing$; д). $D:[-2;1)$; ж). $D:(-\infty;0)\cup(0;\infty)$;

з). $D:(-\infty;0)\cup(2{,}5;\infty)$; к). $D:[1;3)\cup(4;\infty)$; л). $x\in R, крім\, \pi n, n\in z$;

м). $x\in R$; н). $D:(-\frac{1}{2};\infty)$; 0). $D:[\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}]$;

п). $D:[-5;7]\setminus\{-\pi;0;\pi;2\pi\}$.

7.9. а). $V=4\pi h$ (рис. 7.7); б). $V=5\pi r^2$ (рис. 7.8); в). $h=\frac{1}{2\pi r^2}$ (рис. 7.9).

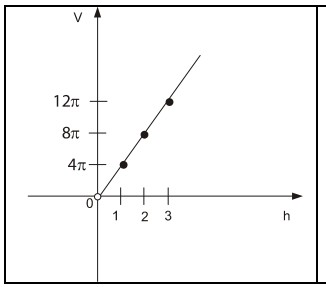


Рис. 7.7

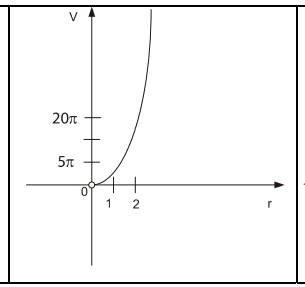


Рис. 7.8

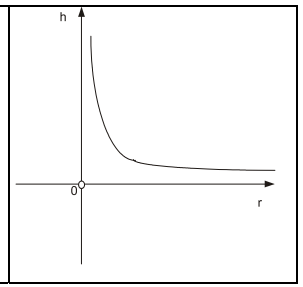


Рис. 7.9

7.10. а). функція стаціонарна; б). функція зростає на R;

в). зростає на $(-1;\infty)$; спадає на $(-\infty;-1)$; г). зростає на R; д) зростає на $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$, спадає на $\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$; ж). зростає на $(0;\infty)$; спадає на $(-\infty;0)$; з). зростає на $(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4})$;

к). зростає на $(-\infty;0)$ і $(0;\infty)$.

7.11. 1). рис. 7.10; 2). рис. 7.11; 3). рис. 7.12.

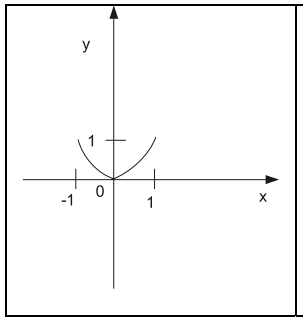


Рис. 7.10

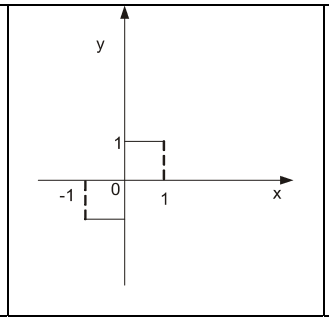


Рис. 7.11

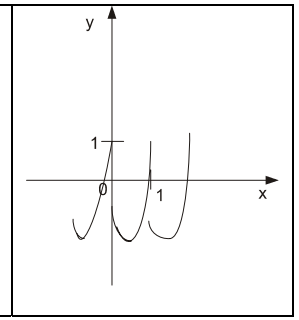


Рис. 7.12

7.12. к). рис. 7.13; л). рис. 7.14; м). рис. 7.15; н). рис. 7.16; о). рис. 7.17; п). рис. 7.18; р). рис. 7.19; с). рис. 7.20.

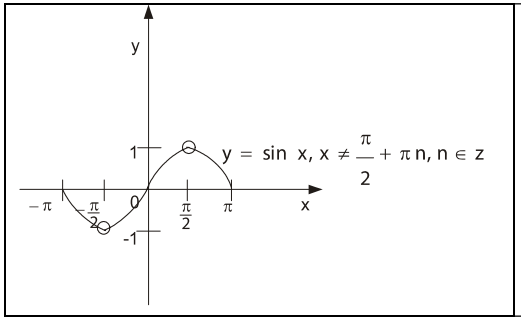


Рис. 7.13

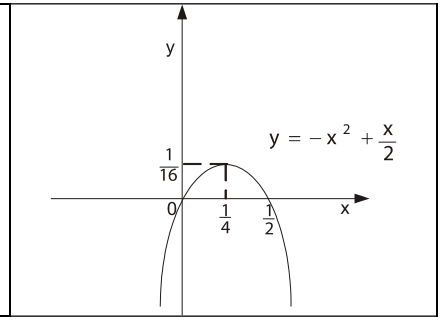


Рис. 7.14

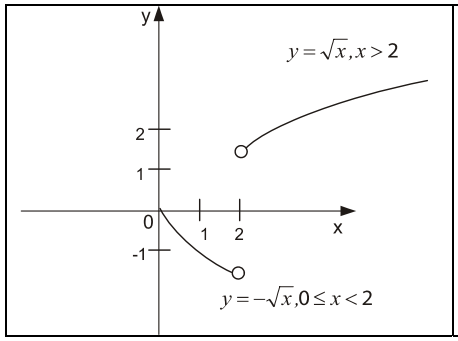


Рис. 7.15

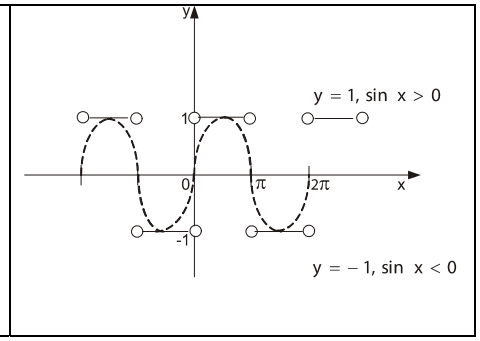


Рис. 7.16

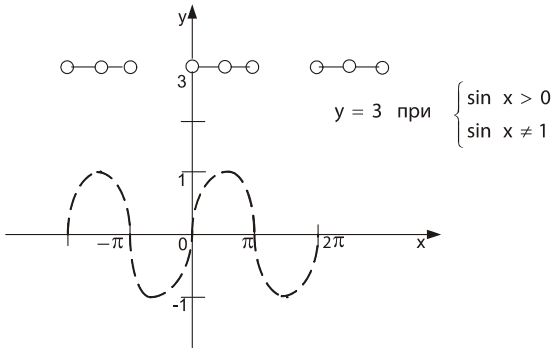


Рис. 7.17

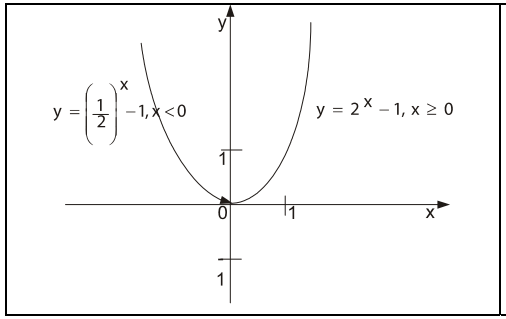


Рис. 7.18

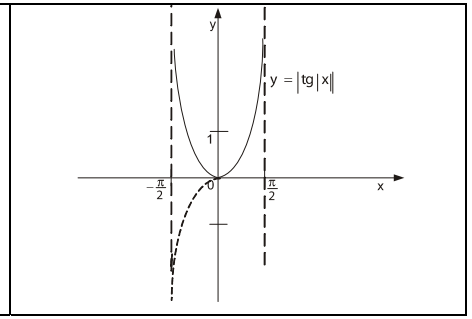


Рис. 7.19

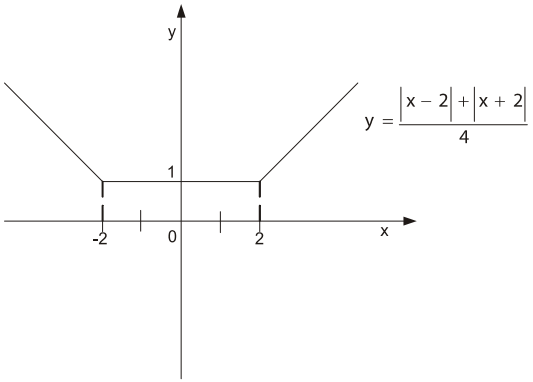


Рис. 7.20

Тема 8

8.1. 1) $-\frac{1}{5}$; 2) 2; 3) 2; 4) $\frac{1}{32}$; 5) 0; 6) $-\infty$.

8.2. 1) 12; 2) $-\frac{1}{6}$; 3) $\frac{\sqrt{11}}{286}$; 4) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $-\frac{5}{12}$.

8.3. 1) -1; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $\frac{7}{8}$; 5) ∞; 6) $\frac{10}{9}$.

8.4. 1) $\sqrt{2}$; 2) 2; 3) $\frac{5}{6}$; 4) 1; 5) -10; 6) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$; 7) $-\infty$; 8) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 9) -3; 10) ∞.

8.5. 1) 3; 2) 1; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\infty$; 5) $\frac{3}{8}$; 6) ∞.

8.6. 1) 0; 2) $\frac{13}{4}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$, якщо $x\to+\infty$ і $-\infty$, якщо $x\to-\infty$; 5) ± 2; 6) $\frac{a+b}{2}$, якщо $x\to+\infty$ і ∞, якщо $x\to-\infty$.

8.7. 1) e^{-4}; 2) e^{-2}; 3) 0; 4) 3; 5) 15; 6) e; 7) 1; 8) $e^{-\frac{1}{2}}$; 9) e^{tg2}; 10) e^{a-b}.

8.8. 1) $\frac{1}{5}$; 2) ∞.

8.9. 1) $\alpha=0(\beta)$; 2) $\alpha\sim\beta$; 3) $\alpha=0(\beta)$; 4) $\alpha\sim\beta$.

8.10. 1) 1; 2) 3; 3) $\frac{2}{\beta}$; 4) 1; 5) ∞; 6) $\frac{1}{4}$; 7) $-\frac{1}{4}$; 8) $+\infty$.

Тема 9

9.2. Використати умову неперервності функції.

9.3. Показати, що не виконуються умови неперервності в точці x_o.

9.4. а) в точці $x=0$ розрив II роду; в точці $x=2$ розрив I роду з $\delta=10$; б) в точці $x=-2$ розрив I роду з $\delta=2$; в) в точках $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in z$ розрив II роду; г) в точці $x=0$ розрив можна усунути, в точках $x=\pi n, n\in z$ (крім $n=0$) – розрив II роду.

9.5. а) ні; б) ні; в) так, $a=-1$.

9.6. а) $x=1$ - точка розриву II роду; б) $x=-1;3$ - точки розриву II роду; в) $x=\pm 1$ - точки розриву II роду; г) $x=0$ - точка розриву, який можна усунути; д) $x=-2$ - точка розриву, який можна усунути; $x=1{,}5$ - точка розриву II роду; ж) $x=\pi+2\pi n,\ n\in z$ - точки розриву II роду.

9.8. а) $x\in(-\infty;-1)\cup(2;5)$; б) $x>-1$; в) $x\in(-\infty;-3)\cup(-2;\infty)$; г) $x\in[0;1)\cup(4;\infty)$.

Тема 10

10.2. 1) $\frac{2}{3}\sqrt{x}$; 2) $-2\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$; 3) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{6}{x^3}$; 4) $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$; 5) $7x^{\frac{4}{3}}$; 6) $\frac{3}{2\sqrt[4]{2x}}$;

7) $-\frac{3}{2\sqrt[4]{2x^5}}$; 9) $\frac{-2x^5+3x^4-3x^2+14x-7}{x^2(1-x)^2}$; 11) $-\frac{2\ln 3}{x^3}$; 12) $\frac{2}{3}x+\frac{6}{x^3}$.

10.3. 1) $-4x(1-5x^2)$; 2) $2x(2x^2+1)$; 3) $\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$.

10.4. 1) $\cos x-\frac{1}{\sin^2 x}$; 2) $5(\cos x-x\sin x)$; 3) $tgx+\frac{x+\sqrt{2}}{\cos^2 x}$; 4) $-\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$;

5) $x^2(3\cos x-x\sin x)$; 10) 0.

10.5. 1) $1+\ln x$; 2) $\frac{1-\ln x}{x}$; 3) $e^x(\log_2 x+\frac{1}{x\ln 2})$; 4) $-\frac{\ln 2}{x\ln^2 x}$; 5) $\frac{e^x\cdot(1+2x+2\sqrt{2x})}{2\sqrt{x}}$;

6) $x\cdot e^x$; 7) $2^{\frac{x}{2}-1}\cdot\ln 2$; 8) $\frac{\sqrt{x}(\ln x+2+\pi)+8}{2x}$; 9) $\frac{x^3(1+\ln x^3-3e)+4}{x(x^2+4)^2}$; 11) $\frac{2^{\ln x}\cdot\ln 2}{x}$;

12) $\frac{x(\ln x+1)+10}{x}$; 13) $\frac{2\ln x}{x}$; 15) $2^{2\ln x}(1+\ln x)\cdot\ln 2$.

10.6. 1) $\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$; 2) $\frac{6(x+1)^{11}(x-1)}{x^7}$; 4) $\frac{-3\sin 6x}{\sin 5}$; 5) $\frac{2x}{\cos^2 x^2}-\frac{2\sin^2 2x}{\cos^4 2x}$; 6) $\frac{-\cos\frac{1}{x}}{x^2}$;

9) $-\sin 2x\cdot\cos\cos 2x$; 12) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 13) $-\frac{2}{(x+2)(x+3)}$; 14) $3\cdot 2^{\sin^2 3x}\ln 2\cdot\sin 6x$;

15) $\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)\cdot\ln\ln(x+1)}$; 16) $\frac{2\sin x}{(1+tg^4 x)\cdot\cos^3 x}$; 17) $tg^3 x$; 20) $\frac{2e^{\ln^2 x}\cdot\ln x}{x}$.

10.7. 1) $x^x(1+\ln x)$; 4) $x^{\sin x}(\frac{\sin x}{x}+\cos x\cdot\ln x)$; 5) $(\cos x)^{arctgx}\left(\frac{\ln\cos x}{1+x^2}-tgx\cdot arctgx\right)$;

6) $(1+2x)(1+3x)+2(1+x)(1+3x)+3(x+1)(1+2x)$;

7) $-\dfrac{(x+2)(5x^2+19x+20)}{(x+1)^4(x+3)^5}$;

8) $\dfrac{3x^2+5}{3(x^2+1)}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$; 9) $(arctgx)^x\cdot\left[\ln arctgx+\dfrac{x}{(1+x^2)arctgx}\right]$;

10) $x^{x^x}\cdot x^x\left(\dfrac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)$.

10.8. 1) $-\pi^2\ln 2$; 4) 1.

10.9. 1) 2; 3) $-2\cos 2x$; 5) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{4x}(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}})$.

10.10. 1) $x-y+1=0$; 2) $x-4y+4=0,\ 4x+y-18=0$; 3) $y-5=0,\ x+2=0$;

4) $x-1=0,\ y=0$; 5) $y=2x,\ y=-\dfrac{1}{2}x$; 6) $x-2y-1=0,\ 2x+y-2=0$;

7) $6x+2y-\pi=0,\ 2x-6y+3\pi=0$; 8) $2x+y-3=0,\ x-2y+1=0$ для точки (1;1); $2x-y+3=0,\ x+2y-1=0$ для точки (-1;1).

10.11. 1) $y_{\min}=110;\ y_{\max}=174$; 2) $y_{\min}=+2;\ y_{\max}=-2$; 3) $y_{\min}=-\sqrt[3]{+2};\ y_{\max}=\sqrt[3]{2}$.

10.12. 1) функція опукла на $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$ і вгнута на $(-\infty,-\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{1}{2},+\infty)$;

6) функція опукла на $(-\infty,0)$ і вгнута на $(0,+\infty)$.

10.13. 2) вертикальні асимптоти $x=\pm 2$, горизонтальна асимптота $y=0$, точок екстремума нема, точок перегину нема;

3) горизонтальна асимптота $y=0$, $x=3$ - точка максимума, точки перегину: $x_1=0,\ x_2\approx 1{,}27$ і $x_3\approx 4{,}73$;

4) асимптот нема, $x=e^{-1}$ - точка мінімуму, точок перегину нема;

5) похила асимптота $y=-x,$, точок екстремуму нема, точки перегину $x_1=0,\ x_2=1$.

10.14. 1) $\dfrac{e^x-x}{x\cdot e^x}dx$; 2) $-\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$; 4) $9\sqrt{x}\ln x dx$.

10.15. 1) використовується формула $\sqrt[3]{x+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}+\dfrac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ і $\sqrt[3]{65}\approx 4{,}02$; 2) 0,486.

10.16. 1) $\dfrac{10}{7}$; 2) 1; 3) $\dfrac{6}{7}$; 4) $-\dfrac{1}{2}$; 5) $\dfrac{1}{2}$.

Тема 11

11.2. 1) $x(7-x)+c$; 2) $x^2(1-x)+c$; 3) $\dfrac{x^2}{2}+\ln|x|+c$; 4) $-2\cos x+\dfrac{1}{3}\sin 3x+c$; 5) $\dfrac{\sqrt{8x^3}}{3}+c$.

x^4-x^3+3.

11.4. 1) $-\dfrac{1}{3}(c^{-3x}+5)$; 2) $\dfrac{1}{\ln 7}(4\cdot 7^{x/4}-195)$; 3) $-\dfrac{1}{3}(ctg3x+2)$.

11.5. 1) $-6x^{-\frac{1}{3}}+18x^{\frac{1}{6}}+5\ln|x|+c$; 2) $5\sin x-x^3+\ln|x|+c$; 3) $3e^x+\sin x+c$; 4) $\dfrac{x^2}{2}-x+c$;

5) $\dfrac{1}{2}\sqrt{x}+c$; 6) $\sin x-\cos x+c$; 7) $-(ctgx+tgx)+c$; 8) $x-\cos x+c$; 9) $\dfrac{1}{2}tgx+c$;

10) $\sin x-x+c$; 11) $\dfrac{a^x}{\ln a}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+c$; 12) $2(x-arctgx)+c$; 13) $\dfrac{x^2}{2}+3x+c$;

14) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}arctg\dfrac{x}{\sqrt{7}}+c$; 15) $\dfrac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right|+c$; 16) $\ln\left|x+\sqrt{4+x^2}\right|+c$;

17) $\arcsin\dfrac{x}{2\sqrt{2}}+c$; 18) $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)+c$; 19) $tgx-x+c$. Вказівка: покласти $tg^2x=\sec^2x-1$; 20) $-ctgx-x+c$; 21) $\dfrac{(3e)^x}{\ln 3+1}+c$.

11.6. 1) $\frac{1}{4}\ln|4x+1|+c$; 2) $-4\sqrt{1-\frac{x}{2}}+c$; 3) $-2\cos\left(\frac{2x-1}{4}\right)+c$;

4) $4e^{\frac{x-1}{2}}+c$;

5) $\frac{1}{2}arctg\,2x+c$; 6) $-\frac{1}{7}tg\,(3-x)+c$; 7) $x-\frac{1}{4}\cos 4x+c$;

9) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$; 10) $\frac{1}{2}\ln^2 x+c$; 11) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right)+c$;

12) $\frac{1}{9}\sqrt{\left(3y^2+1\right)^3}+c$; 13) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$; 14) $\frac{1}{10\left(1-5x^3\right)^2}+c$;

15) $\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x}+c$;

16) $-3\sqrt[3]{\cos x}+c$; 17) $\frac{1}{2}tg^2x+tgx+c$; 18) $e^{tgx}+c$;

19) $4\cos x\left(\frac{\cos^2 x}{3}-1\right)+c$;

20) $\ln\left|\frac{1}{\sqrt[3]{2-3e^x}}\right|+c$; 21) $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 y}+c$; 22) $\ln|x|\left(\frac{2}{3}\ln^2 x+3\right)+c$;

24) $\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}\ln|3x+2|+c$; 25) $\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+c$; 26) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(x^4+1\right)^2}+c$;

27) $2e^{\sqrt{x}}+c$;

28) $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}-6\sqrt{\ln x}+c$; 29) $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6-2}\right|+c$; 30) $2\sqrt{3+\sin x}+c$;

31) $\frac{2}{3}\sqrt{arctg^3 e^x}+c$.

11.7. 1) $\frac{x^3}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)+c$; 2) $e^x(x-1)+c$; 3) $x(\ln x-1)+c$;

4) $xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c$;

5) $\frac{1}{2}\left[\left(x^2+1\right)arctgx\right]+c$; 6) $(x+1)arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}+c$;

8) $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+c$;

10) $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+c$; 11) $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+c$;

12) $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+c$; 13) $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+c$.

11.8. 1) $\frac{1}{2}arctg\frac{x-1}{2}+c$; 2) $\frac{1}{5}arctg\frac{x+2}{5}+c$; 3) $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right|+c$;

4) $\ln\left|3x^2-7x+11\right|+c$; 5) $\frac{2}{3}\ln(3x-1)+\frac{1}{2}\ln(2x+1)+c$;

6) $2\ln\left(x^2+5\right)-\sqrt{5}\,arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+c$; 7) $\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)+c$;

8) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+c$;

9) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+3}\right|+c$; 10) $\arcsin\frac{x+2}{3}+c$;

11) $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}\right|+c$; 12) $-\frac{1}{11}\sqrt{3+66x-11x^2}+c$;

13) $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+c$.

11.9. 1) $\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+c$; 2) $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+c$; 3) $\frac{1}{1+x}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$;

4) $x+3\ln|x-3|-3\ln|x-2|+c$; 5) $-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}arctgx+\frac{1}{2}\ln|x-1|+c$.

11.10. 1) $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+c$; 8) $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+c$;

2) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$; 9) $-\frac{1}{4}ctg^4x+\frac{1}{2}ctg^2x+\ln|\sin x|+c$;

3) $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+c$; 10) $tgx+\frac{1}{3}tg^3x+c$;

4) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$; 11) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg^{\frac{x}{2}}-2}{2tg^{\frac{x}{2}}-1}\right|+c$;

5) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+c$; 12) $\frac{1}{2}arctg\left|2tg\frac{x}{2}\right|+c$;

6) $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{\sin 8x}{8}\right)+c$; 13) $x-tg\frac{x}{2}+c$;

7) $\frac{tg^2x}{2}+\ln|\cos x|+c$; 14) $\frac{1}{2}\left(tgx+\ln|tgx|\right)+c$;

11.11. 1) $\frac{2(44-15x)}{27}\sqrt{1-3x}+c$; 2) $\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(\sqrt[4]{x^3+1}\right)\right]+c$;

3) $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+c$; 4) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{x\sqrt{2}}+c$;

5) $2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7}+\frac{3(x-1)^2}{5}+x\right]+c$;

6) $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\ arctg\sqrt{\frac{x}{2}}+c$.

Тема 12

12.1. 1) 2,625; 2) $3\sqrt[3]{2}-4$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 1; 5) -1; 6) 0; 7) $\frac{8\ln 4-3\ln 27}{\ln 4\ln 27}$; 8) $\frac{26}{3}$;

9) $\frac{\ln 5}{6}$; 10) $\frac{1}{3}$; 15) $\ln 4-\frac{3}{4}$; 16) $\frac{e^{\pi}}{2}$.

12.2. 1) $\frac{16}{3}$; 2) 1. Вказівка: цей інтеграл представляє собою площу квадрата зі стороною $a=1$; 5) 4.

12.3. 1) додатній; 2) додатній; 3) від'ємний; 4) додатній; 5) від'ємний.

12.6. 2) $\frac{1}{3}$; 3) 9; 4) $5\frac{1}{3}$; 5) 18; 6) 2; 7) 1; 8) $\frac{2}{3}$; 10) e^3-1; 11) e^x-5; 12) $\ln 2$.

12.7. 1) $\frac{2}{27}(13\sqrt{13}-8)$; 2) $\frac{1}{2}\ln 3$; 3) $\frac{670}{27}$; 4) $\frac{28}{3}$; 5) $\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$; 6) $\ln 3$;

7) $\frac{e^2+1}{4}$.

Тема 13

13.1. а) 1; б) -1; в) 0; г) -0,8; д) $f(x,y)$; е) $\frac{y+3x}{y-3x}$.

13.2. а) уся площина; б) уся площина, за винятком точок прямої $y=x$; в) $y\le x$, півплощина під прямою $y=x$ разом з точками цієї прямої; г) $|y|\le|x|$, внутрішня частина правого та лівого вертикальних кутів, утворених прямими $y=x$ та $y=-x$ разом з точками цих прямих; д) $x>0; y>0$, внутрішні точки першого координатного кута; е) два тупі вертикальні кути, утворені прямими $y=0$ і $y=-2x$, разом з точками цих прямих з вилученням їх спільної точки (0;0).

13.3. а) 0; б) не існує; в) 1; г) 1; д) 1; е) 0.

13.4. а) точки прямої $y=2x$; б) точки параболи $y^2=4x$; в) точки осей координат Ox і Oy; г) точки кола $x^2+y^2=1$ і початок координат (0;0).

13.5. а) $z'_x=3x^2-3y$; $z'_y=3y^2-3x$; б) $z'_x=\frac{2y}{(x+y)^2}$; $z'_y=\frac{-2x}{(x+y)^2}$;

в) $z'_x=\frac{y}{x^2-y^2}$; $z'_y=-\frac{x}{x^2-y^2}$; г) $z'_x=-\frac{1}{1+x^2}$; $z'_y=-\frac{1}{1+y^2}$;

д) $z'_x=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$; $z'_y=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$;

е) $z'_x=-\frac{x}{x^2+y^2}$; $z'_y=\frac{x^2}{y(x^2+y^2)}$.

13.6. а) $dz=\frac{2(xdx+ydy)}{x^2+y^2}$;

б) $dz=e^x\left[(x\cos y-\sin y)dy+(\sin y+\cos y+x\sin y)dx\right]$.

13.7. а) $d^2z = \frac{2}{x^4}\left(3y^2dx^2 - 4xydxdy + x^2dy^2\right)$; б) $d^2z = -\frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dxdy$;

в) $d^2z = e^{xy}(y^2dx^2 + 2(1+xy)dxdy + x^2dy^2)$.

13.8. а) $2x - 4y - z + 6 = 0$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z}{-1}$; б) $x + y - z - 1 = 0$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$; в) $x - 2y + z = 0$; $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$; г) $x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\frac{\pi}{2}}{2}$.

13.9. а) $z_{\min}(-4;1) = -2$; б) $z_{\max}(2;-2) = 8$; в) $z_{\max}(0;0) = 1$; г) у точці (0;0) екстремуму немає; $z_{\min}(a;a) = -a^3$, якщо $a > 0$; $z_{\max}(a;a) = -a^3$, якщо $a < 0$.

13.10. $R = \frac{h\sqrt{5}}{2}, H = \frac{h}{2}$, якщо R - радіус основи намету, H - висота циліндричної частини; h - висота конічної верхівки.

Список літератури

1. *Столл Роберт Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории. Пер. с англ. Ю.А. Гастева и И.Х. Шмаина. Под ред. Ю.А. Шихановича.– М.: Просвещение, 1968, 230 с.

2. *Виленкин Н.Я.* Рассказы о множествах.– М.: Наука, 1963. – 128 с.

3. *Нешков К.И., Пышкало А.М., Рудницкая В.Н.* Множества. Отношения. Числа. Величины. Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1978.– 63 с.

4. *Вишенський В.А.* Відношення і функції.– Київ: Вища школа, 1972; – 96с.

5. *Дж. Риордан.* Введение в комбинаторный анализ. Пер. с англ. Л.Е.Садовского. Под ред. Л.Я. Куликова.– М.: Издательство иностранной литературы, 1963.– 287 с.

6. *Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон.* Введение в конечную математику. – М.: ИЛ, 1963.

7. *Холл М.* Комбинаторика.– М.: Мир, 1970.

8. *Виленкин Н.Я.* Индукция. Комбинаторика. Пособие для учителей.– М.: Просвещение, 1976.– 47 с.

9. *Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Элементы комбинаторики.– М.: Наука, 1977.– 80 с.

10. *Божко Ю.Г.* Архитектоника и комбинаторика формообразования: Учебник.– К.: Выща школа, 1991.– 245 с.

11. *Басакер Р., Саати Т.* Конечные графы и сети.– М.: Наука, 1974.

12. *Оре О.* Теория графов.– М.: Наука, 1980, 336 с.

13. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов.– М.: Мир, 1977, 208 с.

14. *Касти Р.* Большие системы. Связность. Сложность и катастрофы.– М.: Мир, 1982, 216 с.

15. *Берж К.* Теория графов и ее применения.– М.: ИЛ, 1962.

16. *Харари Ф.* Теория графов.– М.: Мир, 1973.

17. *Зыков А.А.* Теория конечных графов.– Новосибирск.: Наука, 1969.

18. *Нечипоренко В.И.* Структурный анализ систем.– М.: Советское радио, 1977.

19. *Березина Л.Ю.* Графы и их применение.– М.: Просвещение, 1979.– 144с.

20. *Применение теории графов связей в технике.* Сборник под ред. Д.Кернопа и Р. Розенберга.– М.: Мир, 1974.

21. *Сигорский В.П.* Математический аппарат инженера.– Киев: Техніка, 1975.– 765 с.

22. *Шаблій О.І.* Математичні методи в соціально-економічній географії: Навч. Видання.– Львів: Світ, 1994.– 304 с.

23. *Лаврик Г.И., Демин Н.М.* Методологические основы районной планировки.– М.: Стройиздат, 1975.– 96 с.

24. *Лаврик Г.І.* Основи системного аналізу в архітектурних дослідженнях і проектуванні (підручник).– К.: КНУБА, 2002.

25. *Турчанинова Л.И., Човнюк Н.Ю.* Графовые модели анализа управляемых развивающихся градостроительных систем. Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. збірник/ Відповідальний редактор М.М. Осетрін.– К., КНУБА, 1999.– Вип. 3.– С.98-101.

26. *Турчанинова Л.И., Чередниченко П.П., Човнюк Н.Ю.* Методы теории графов в цифровом моделировании местности для задач размещения коммуникаций: дискретная постановка. Інженерна геодезія: Наук.-техн. збірник.– Вип. 43/ Відповідальний редактор С.П. Войтенко.– К.: КНУБА, 2000.– С. 195–202.

27. *Турчанинова Л.И., Човнюк Н.Ю.* Теоретико-графовые модели информационных технологий управления развитием современных городов. Математические модели и современные информационные технологии. Сборник научных трудов/ НАН Украины. Институт математики; Редкол.: Самойленко А.М. (отв. ред.), Березовский А.А. (отв. ред.) и др.– Киев, 1998.– С. 219-221.

28. *Тимохин В.А.* Территориальный рост и планировочное развитие города.– К.: Будивэльнык, 1989.– 104 с.

29.Овчинников П.П., Михайленко В.М., Яремчик В.М. Вища математика, ч. І. – К.: Техніка, 1000. – 592 с.

30. *Давидов М.*О. Курс математичного аналізу в 3 ч., ч.1. – К.:Вища школа, 1990-1992. – 383 с.

31. *Бубняк Т.*І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: Новий світ-2000, 2004. – 434 с.

32. *Турчанінова Л.І.,Човник Н.Ю.* Елементи дискретної математики: Навчальний посібник. – Київ: КНУБА, 2003. – 83 с.

33. *Збірник* завдань з математики для аудиторної та індивідуальної роботи для студентів архітектурних спеціальностей: Методичні вказівки /Уклад.: Л.І.Турчанінова, О.Г.Мартинюк. – К.: КНУБА, 2001. – 40 с.